Improved error estimate for the number of zeros of the derivatives of the Riemann zeta function
(リーマンゼータ関数の導関数の零点の個数評価における誤差項の改良)

九州大学数理学研究院　アデイルマスリアジャヤ / チャチャ

Ade Irma Suriajaya / Chacha

Faculty of Mathematics, Kyushu University

序文

本研究は，Fan Ge 氏 (College of William and Mary) との共同研究である．この研究は部分的に科研費 (課題番号：18K13400) の助成を受けたものであり，著者が理化学研究所数理創造プログラム (iTHEMS) の基礎科学特別研究員 (SPDR) としての活動中に行ったものである．

要旨

A. Speiser (1935年) はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の一階導関数 $\zeta'(s)$ が $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ で実数でない零点を持たないことがリーマン予想と同値であることを示した．この結果は $\zeta(s)$ の零点分布とその導関数の零点と関係していることを意味する．その後，$\zeta(s)$ の k 階導関数 $\zeta^{(k)}(s)$ の零点分布は R. Spira (1960–70年代), B. C. Berndt (1970年), N. Levinson と H. L. Montgomery (1974年) により研究された．特に，Berndt は $\zeta^{(k)}(s)$ の零点個数の評価を与えた．H. Akatsuka (2012年) はリーマン予想の仮定の下で，Berndt が示した $\zeta'(s)$ の零点個数の評価における誤差項を改良し，著者 (2015年) は $\zeta(s)$ のすべての k 階導関数 $\zeta^{(k)}(s)$ に対して同様な改良を得た．Akatsuka の結果は F. Ge (2017年) によりさらに改良され，ようやく $\zeta'(s)$ の零点個数の評価に対して，$\zeta(s)$ 自身の場合 (cf. J. E. Littlewood (1924年)) と同様な誤差項が得られた．その研究に動機づけられ，著者と Ge は $\zeta^{(k)}(s)$ に対して，著者 (2015年) が得た誤差項の改良と同時に，Ge (2017年) が示した $\zeta'(s)$ の場合に関する評価の拡張に挑んだ．この講究録で，以上で述べた研究の歴史を簡単に述べ，著者と Ge [GS20] が得た結果の証明の概略を説明する．

1　リーマンゼータ関数の零点分布

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ はより前から学術論文に現れ始めたが，B. Riemann [Rie59] の考察により初めて数学的な対象として注目を浴びた．特に，$\zeta(s)$ の零点は素数の分布の情報を与えることにより，非常に興味深い研究対象になった．$\zeta(s)$ の

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11M06.
キーワード: リーマンゼータ関数，導関数，零点個数，誤差項

零点は，「関数等式」(cf. [Tit86, (2.1.1), p. 13]) により出てくる自明な零点とそれ以外の零点，非自明な零点と呼ばれる零点の二種類に分けられる．自明な零点の位置は正確に知られている一方，非自明な零点の正確な位置が不明である．Riemann [Rie59] はこれらの非自明な零点がすべて一直線上に存在すると予想した．より詳しく述べると，その直線は $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ のことであるしかあり得ない (cf. 非自明な零点の対称性)．この予想は「リーマン予想 (RH)」と愛称され，160年以上経った現在も未解決である．[Rie59] で述べられたように，この非自明な零点は素数分布の情報を持ち，とても重要な研究対象である．

$\zeta(s)$ の零点を調べるのに，まず必要なのは，零点の大まかな位置である．$\zeta(s)$ の自明な零点は全ての負の偶数点 $s = -2, -4, -6, -8, \ldots$ であり，$\mathrm{Re}(s) < 0$ において，$\zeta(s)$ はそれ以外の零点を持たない．実は同じ理由で，$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ に零点を持たないこともわかる．これを簡単に説明すれば，$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において，「オイラー積」と呼ばれる無限積表示 (cf. [Tit86, (1.1.2), p. 1]) を持ち，零点を全く持たないことがわかる．関数等式を用いて，ガンマ関数 $\Gamma(s)$ の極により生じる零点 ($\zeta(s)$ の自明な零点) 以外に $\zeta(s)$ は零点を持たない．これにより，$\zeta(s)$ の非自明な零点は $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ の中にしか存在し得ないことがわかる．もう少し詳しく述べると，素数定理により，$\zeta(s)$ は直線 $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上に零点を持たないため，再び関数等式を用いれば，$\zeta(s)$ の非自明な零点は $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ に存在することがわかる．これまでの話を簡単にまとめると，

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \le 0\} \setminus (-2\mathbb{N}) \quad \cup \quad \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \ge 1\}$$

は $\zeta(s)$ の一つの「非零領域」である．但し，$-2\mathbb{N}$ は負の偶数全体

$$-2\mathbb{N} := \{-2, -4, -6, -8, -10, -12, \ldots\}$$

を表す．より精密な非零領域も知られている (例えば [Tit86, (6.15.1), p. 131])．それにより，帯領域 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ はよく「臨界帯領域」(critical strip) と呼ばれている．

これから，$\zeta(s)$ の非自明な零点を $\rho = \beta + i\gamma$ と書く．全段落で説明したように，$0 < \beta < 1$ を満たすことに注意．

$$N(T) := \sum_{0<\gamma\le T} 1$$

とおくと，$N(T)$ は $0 < \mathrm{Im}(s) \le T$ にある $\zeta(s)$ の非自明な零点の個数を重複度込めて数える．それに対して，次が成り立つ．

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + E_0(T).$$

ここで，$T \to \infty$ のとき

$$E_0(T) = \begin{cases} O(\log T), & \text{無条件 (cf. [Tit86, Theorem 9.4]),} \\ O\left(\dfrac{\log T}{\log\log T}\right), & \text{RH の仮定の下 (cf. [Lit24])} \end{cases} \tag{1.1}$$

である．無条件の評価はH. C. F. von Mangoldt (1905年) により示され，Riemann–von Mangoldt 公式と呼ばれることが多い．RH を仮定した場合の結果はJ. E. Littlewood (1924年) によるものであり，95年以上経った現在まで改良されていない．一方，この評価

$$O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

は最良かどうかがわかっていない．つまり，これ以上改良できる可能性があるが，これ以上良い評価がなかなか得られない．D. W. Farmer, S. M. Gonek とC. P. Hughes [FGH07] が (1.1) における評価は

$$O\left(\sqrt{\log T\log\log T}\right)$$

であると予想した．

2 リーマンゼータ関数の導関数の零点

A. Speiser [Spe35] は $\zeta(s)$ の一階導関数 $\zeta'(s)$ が $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ で実数でない零点を持たないことがRH と同値であることを示した．この結果により，$\zeta(s)$ の零点の分布はその導関数の零点の分布と関係していることがわかり，$\zeta(s)$ の導関数の零点も研究され始めた．1960年代から，R. Spira [Spi65, Spi70, Spi72, Spi73] が $\zeta(s)$ の k 階導関数 $\zeta^{(k)}(s)$ の零点分布についてたくさん調べ，特に，非零領域を示した．Spira [Spi65, Spi70] が示した非零領域により，$\zeta^{(k)}(s)$ の実数でない零点はすべてある帯領域 $\alpha_k < \mathrm{Re}(s) < \beta_k$ に含まれ，その外側には実数零点しか存在しない．より詳しく述べると，$\zeta^{(k)}(s)$ が $\mathrm{Re}(s) \geq \beta_k$ に零点を全く持たず，$\mathrm{Re}(s) \leq \alpha_k$ には実数零点しか持たない．また，それらの実数零点はそれぞれ $\zeta(s)$ 自身の自明な零点と一対一対応している．このことにより，$\zeta^{(k)}(s)$ の実数零点を自明な零点とし，実数でない零点を非自明な零点と見なして良い．$k = 1$ の場合に限れば，$\zeta'(s)$ は $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ において，実数でない零点を持たない．つまり，$\alpha_1 = 0$ と取れる．しかし，この結果は $k \geq 2$ に対して成り立たない (cf. [Spi65, Fig. 1 と Table II])．よって，Speiser [Spe35] の結果において「$\zeta'(s)$ が $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ で実数でない零点を持たない」と書き換えられる．残念ながら，現在もSpeiser [Spe35] の結果はすべての導関数に対して拡張されていない．C. Y. Yıldırım [Yil96, Yil20] は $\zeta''(s)$ と $\zeta'''(s)$ の零点に対して，[Spe35] に類似する結果に挑んだが，[Spe35] で示された同値条件は得られなかった．$\zeta(s)$ の場合と併用し，これから，$\zeta^{(k)}(s)$ の実数でない零点を「非自明な零点」と称する．

B. C. Berndt [Ber70] は正の整数 k に対し，$\zeta^{(k)}(s)$ の非自明な零点の個数を調べた．N. Levinson とH. L. Montgomery [LM74] は $\zeta^{(k)}(s)$ の零点の分布を詳しく調べ，特に，Speiser [Spe35] の結果を解析的に再証明し，$\zeta(s)$ と $\zeta^{(k)}(s)$ の関係をより詳しく調べた．H. Akatsuka [Aka12] はRH を仮定し，$\zeta'(s)$ の零点に対してBerndt 及びLevinson とMontgomery が示した零点の個数および実部の分布に関する評価を $k = 1$ の場合に

対して改良した．著者 [Sur15] はそれらの結果に着目し，Akatsuka の結果を $\zeta(s)$ のすべての導関数に拡張した．実部の分布の評価に対しては，改良できるかどうかがわからないが，それより興味深いのは，零点の個数評価である．Berndt [Ber70], Akatsuka [Aka12, Theorem 3] と著者 [Sur15, Theorem 3] が示した零点の個数評価を以下で具体的に述べる．

前節で記述した $\zeta(s)$ の場合と同様に，正の整数 k に対して，$\zeta^{(k)}(s)$ の非自明な零点を $\rho_k = \beta_k + i\gamma_k$ と書き，

$$N_k(T) := \sum_{0<\gamma_k \leq T} 1$$

とおく．$N_k(T)$ は $0 < \mathrm{Im}(s) \leq T$ にある $\zeta^{(k)}(s)$ の非自明な零点の個数を重複度込めて数える．それに対して，次が成り立つ．

$$N_k(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{4\pi e} + E_k(T), \tag{2.1}$$

$T \to \infty$ のとき，

$$E_k(T) = \begin{cases} O_k(\log T), & \text{無条件 (cf. [Ber70, Theorem])}, \\ O_k\left(\dfrac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right), & \text{RH の仮定の下 (cf. [Aka12, Th. 3] と [Sur15, Th. 3])} \end{cases}$$

である．以上，O-定数は k のみに依存する．しかし，これを $\zeta(s)$ 自身の場合 (1.1) に比べれば，改良できる余地があり，$\zeta(s)$ の場合と同じ誤差の評価が得られると自然に期待される．$\zeta(s)$ の導関数に対して，初めてその評価を実現したのは，F. Ge [Ge17] であった．

Ge [Ge17] は [Zha01] の手法を基盤に，$N_1(T)$ の評価における誤差関数 $E_1(T)$ に対して，臨界線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 付近の部分とそうでない部分に分けて精密に評価し，Akatsuka が示した

$$O\left(\frac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right)$$

を

$$O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right) \tag{2.2}$$

に改良した．これは (1.1) で紹介した Littlewood [Lit24] が得た評価と一致する．$\zeta(s)$ の場合と同様に，(2.2) は最良かどうどうかが未解決であるが，現在知られている手法では，(2.2) 以上の改良は期待し難い．

著者は Ge のアイデアに着目し，それを高階導関数の場合に活かすことを考えた．Ge と直接打ち合わせを行い，Ge [Ge17] のアイデアがすぐに高階導関数の場合に適用できると互いに考えていたが，最も簡単な $k = 2$ の場合に対しても全くうまくいかなかった．そこで，$k \geq 2$ の場合に対しては，単に，臨界線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 付近の部分と

そうでない部分に分けず，細かい分け方をすればうまくいく方法 [GS20] を見つけた．さらに，臨界線との切れ目を，$k=1$ の場合に比べれば，臨界線からもう少し離れるように取らなくてはいけない．この講究録ではそのアイデアを簡単に説明する．この結果 [GS20] により，$T \to \infty$ のとき

$$E_k(T) = \begin{cases} O_k(\log T), & \text{無条件 (cf. [Ber70, Theorem]),} \\ O_k\left(\dfrac{\log T}{\log\log T}\right), & \text{RHの仮定の下 (cf. [GS20, Theorem 1])} \end{cases} \tag{2.3}$$

となる．

3 $\zeta^{(k)}(s)$ の零点個数の評価における誤差項 $E_k(T)$ の評価

この節で，RH の仮定の下での (2.3) の証明概略を説明する．以降，前節と同様に，k は正の整数であり，O-記号は $T \to \infty$ の意味で使う．O_k は O-定数が k のみに依存することを表す．便宜上，O-記号の代わりに，O-記号と同じ意味で $\ll$ の不等式記号 (cf. [BD04, p. 40]) も使う．

ひとまず，誤差関数 $E_k(T)$ はどのような関数なのかを調べる．

$$G_k(s) := 2^s \frac{(-1)^k}{(\log 2)^k} \zeta^{(k)}(s)$$

とおき，十分に大きい適当な k のみに依存する σ_k に対して，$1/4+i, \sigma_k+i, \sigma_k+iT, 1/4+iT$ において，

$$\frac{G_k}{G_{k-1}}(s)$$

に偏角の原理を適用すれば，

$$N_k(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{4\pi e} + \frac{1}{2\pi}\arg G_k\left(\frac{1}{2}+iT\right) + \frac{1}{2\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right) + O_k(1)$$

が得られる．ここで $\log G_k(s)$ と $\log\zeta(s)$ の偏角を，$+\infty$ で 0 を取るものより連続変動で定める．証明の詳細は [Sur15, Proposition 3.1] または [GS20, Lemma 3] を参照．よって，(2.1) における $E_k(T)$ は

$$E_k(T) = \frac{1}{2\pi}\arg G_k\left(\frac{1}{2}+iT\right) + \frac{1}{2\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right) + O_k(1)$$

と書ける．二項目の関数

$$\frac{1}{2\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)$$

は明らかに，$\zeta^{(k)}(s)$ に関係せず，$\zeta(s)$ のみに関わる関数である．実際，この項は $E_0(T)$ に現れる関数であり，$1/2+iT$ における偏角は $\arg\zeta(2) = 0$ からはじま

り，$2, 2+iT, 1/2+iT$ の線分を通って連続変動で定まる

$$S(T) := \frac{1}{\pi}\arg\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)$$

を用いれば，

$$E_0(T) = S(T) + \frac{7}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

と思い出せる (cf. [Tit86, 9.3])．よって，

$$E_k(T) = \frac{1}{2\pi}\arg G_k\left(\frac{1}{2}+iT\right) + \frac{1}{2}E_0(T) + O_k(1)$$

となり，$E_0(T)$ を独立に評価すれば，

$$\arg G_k\left(\frac{1}{2}+iT\right) \tag{3.1}$$

を調べれば十分である．実際，RH が成り立つと仮定し，$\log\log T \ll \Phi(T) \ll \log T$ を満たす増加関数 $\Phi(T)$ に対して $E_0(T) = O(\Phi(T))$ とすると，

$$N_k(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{4\pi e} + O_k\left(\max\left\{\Phi(2T), \sqrt{\log T}\log\log T\right\}\right) \tag{3.2}$$

が示せる (cf. [GS20, Theorem 2])．詳細は [GS20] を参照.

これから，RH が成り立つと仮定し，(3.1) を評価するアイデアを紹介するが，(3.2) の場合ではなく，(1.1) を用いて，(2.3) を示す．即ち，RH が成り立つと仮定すれば，(1.1) により，

$$E_0(T) = O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

であるので，

$$E_k(T) = \frac{1}{2\pi}\arg G_k\left(\frac{1}{2}+iT\right) + O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

となり，

$$\arg G_k\left(\frac{1}{2}+iT\right) = O_k\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

((2.3) の後者) を示す．次に紹介する補題はすべて RH の仮定の下で成り立つ.

著者 [Sur15] は Akatsuka [Aka12] のアイデアをすべての k に対して拡張し，特に，[Sur15, Lemma 2.5] では，

$$\arg G_k(\sigma+iT) = O_k\left(\frac{(\log T)^{2(1-\sigma)}}{(\sqrt{\log\log T}}\right), \qquad \frac{1}{2} \le \sigma \le \frac{3}{4}$$

が成り立つことを確認した．これを用いて，

$$\arg G_k\left(\frac{1}{2}+iT\right) = O_k\left(\frac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right)$$

しか示せなかった．しかし，Akatsuka [Aka12, Remark 2.5] も指摘したように，$\sigma = 1/2$ からある程度離れれば，

$$\arg G_1(\sigma+iT) = O\left(\frac{(\log T)^{2(1-\sigma)}}{\log\log T}\right), \quad \frac{1}{2}+\frac{(\log\log T)^2}{\log T} \le \sigma \le \frac{3}{4}$$

が得られる．これを用いて，

$$\frac{1}{2} \le \sigma \le \frac{1}{2}+\frac{(\log\log T)^2}{\log T}$$

で $\arg G_1(\sigma+iT)$ の変化を詳しく評価し，

$$O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

に抑えられることを示せば良い．これは Ge [Ge17] のアイデアであった．一般の k に対しては，このアイデアは

$$\arg\frac{G_k}{\zeta}(\sigma+iT) = O_k\left(\frac{\log\log T}{\sigma-\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{1}{2}+\frac{(\log\log T)^2}{\log T} < \sigma < 1 \tag{3.3}$$

(cf. [Sur15, Lemma 2.3]) により実現できる．我々 [GS20] はそれに着目し，今回は，

$$\frac{1}{2}+\frac{(\log\log T)^2}{\log T}$$

より，もう少し $\sigma = 1/2$ から離れて，

$$X := \frac{1}{\sqrt{\log T}}$$

とおき，

$$\Delta_1 := \mathop{\Delta}_{\infty+iT\to 1/2+X+iT} \arg G_k(\sigma+iT), \qquad \Delta_2 := \mathop{\Delta}_{1/2+X+iT\to 1/2+iT} \arg G_k(\sigma+iT)$$

に注目する．(3.3) を用いれば，

$$\Delta_1 = O_k\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

が直ちに得られる．次に，

$$\Delta_2 = O_k\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right)$$

を示せば良い．これを示す方法を簡約に説明する．

$$\Delta_2 = \operatorname{Im}\int_{1/2}^{1/2+X} \frac{G_k'}{G_k}(\sigma+iT)\,\mathrm{d}\sigma$$

であるが，[Tit86, Theorem 9.6 (A)] と同様の方法で，$s=\sigma+it,\ 1/2\le\sigma\le 1$ に対して，

$$\frac{G_k'}{G_k}(s)=\sum_{\substack{|\operatorname{Im}(\rho_k)-t|<1,\\ \zeta^{(k)}(\rho_k)=0}}\frac{1}{s-\rho_k}+O_k(\log|t|)$$

が示せる．よって，$\mathcal{D}=\mathcal{D}(T):=\{z\mid \operatorname{Re}(z)\ge 1/2, |\operatorname{Im}(z)-T|\le 1\}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\Delta_2&=\operatorname{Im}\int_{1/2}^{1/2+X}\sum_{\substack{|\operatorname{Im}(\rho_k)-T|<1,\\ \zeta^{(k)}(\rho_k)=0}}\frac{1}{\sigma+iT-\rho_k}\,\mathrm{d}\sigma+O\left(X\log T\right)\\ &\ll\sum_{\substack{\rho_k\in\mathcal{D},\\ \zeta^{(k)}(\rho_k)=0}}\left|\arg\left(\frac{1}{2}+X+iT-\rho_k\right)-\arg\left(\frac{1}{2}+iT-\rho_k\right)\right|+X\log T\end{aligned}\tag{3.4}$$

となる．

次に，

$$Y_j:=2^jX=\frac{2^j}{\sqrt{\log T}},$$

$\mathcal{R}_j:=\{\sigma+it\mid 1/2\le\sigma\le 1/2+Y_j,\ T-Y_j\le t\le T+Y_j\}$ に対して， $\mathcal{R}_j$ 上で $\zeta^{(k)}(s)$ の零点の個数 $N_{\zeta^{(k)}}(R_j)$ は

$$\ll_k Y_j\log T+\frac{\log T}{\log\log T}\tag{3.5}$$

で抑えられることを示す (cf. [GS20, Lemma 8])．これはこの論文 [GS20] において，主なポイントである．そこで，以下の二点が必要．詳細は [GS20] を参照．

- (cf. [GS20, Lemma 6]) 十分に大きい t に対して，

  $$\operatorname{Re}\frac{\zeta^{(k)}}{\zeta^{(k-1)}}(\sigma+it)<0,\qquad 0<\sigma\le 1/2,\ \zeta^{(k-1)}(\sigma+it)\ne 0.\tag{3.6}$$

  証明はアダマール分の因数分解定理，[LM74, Theorem 7 の Corollary] と $\Gamma(s)$ に関する スターリングの公式 [Tit39, Section 4.42] を用いて難しくないため，省略．

- (cf. [GS20, Lemma 7]) $\mathcal{Z}_k:=\{\gamma\mid\zeta^{(\ell)}(1/2+i\gamma)=0,\ \ell=0,1,2,\cdots,k\}$ とおくと，$Y\le T$ に対して，

  $$\sum_{\substack{T<z\le T+Y,\\ z\in\mathcal{Z}_k}}1\ll Y\log T+\frac{\log T}{\log\log T}.\tag{3.7}$$

  これは (3.6) を用いてほぼ直ちに得られる．

(3.5) を示すのに，R_j より臨界線 $\operatorname{Re}(s)=1/2$ の部分を除いたもの R_j^* を考えよ．(3.7) より，

$$N_{\zeta^{(k)}}(R_j^*)\ll_k Y_j\log T+\frac{\log T}{\log\log T}$$

を示せば十分．

$$\Theta(\rho_k; 1/2+i(T+Y_j), 1/2+i(T-Y_j)) \in (0,\pi)$$

を ρ_k における $1/2+i(T-Y_j)$ と $1/2+i(T+Y_j)$ の間の偏角とすると， $\rho_k \in R_j^*$ であるとき，

$$\Theta(\rho_k; 1/2+i(T+Y_j), 1/2+i(T-Y_j)) \gg 1$$

であることに注意．従って，

$$\begin{aligned} N_{\zeta^{(k)}}(R_j^*) &\ll \sum_{\rho_k \in R_j^*} \Theta(\rho_k; 1/2+i(T+Y_j), 1/2+i(T-Y_j)) \\ &= \sum_{\rho_k \in R_j^*} \int_{T-Y_j}^{T+Y_j} \frac{\beta_k - 1/2}{(\beta_k-1/2)^2 + (\gamma_k - t)^2} dt \\ &\leq \int_{T-Y_j}^{T+Y_j} \sum_{\beta_k > 1/2} \frac{\beta_k - 1/2}{(\beta_k-1/2)^2 + (\gamma_k - t)^2} dt \\ &\leq \sum_{\substack{T-Y_j \leq z_i \leq T+Y_j, \\ z_i \in \mathcal{Z}_k}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sum_{\beta_k > 1/2} \frac{\beta_k - 1/2}{(\beta_k-1/2)^2 + (\gamma_k - t)^2} dt \qquad (3.8) \end{aligned}$$

となる．

$$F_k(t) := \sum_{\beta_k > 1/2} \frac{\beta_k - 1/2}{(\beta_k-1/2)^2 + (\gamma_k - t)^2} = -\operatorname{Re} \frac{\zeta^{(k+1)}}{\zeta^{(k)}}(1/2+it) + O(\log|t|)$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned} \int_{z_i}^{z_{i+1}} F_k(t) dt &= \int_{z_i}^{z_{i+1}} \left(-\operatorname{Re} \frac{\zeta^{(k+1)}}{\zeta^{(k)}}(1/2+it) + O(\log t) \right) dt \\ &= \left| \Delta \arg \zeta^{(k)}(1/2+it) \right| + O\left((z_{i+1}-z_i)\log|t|\right) \end{aligned}$$

と書ける．ここで，$\Delta \arg$ は (z_i, z_{i+1}) における偏角の変化を表す．よって，(3.8) の被積分関数は $\zeta^{(k)}(1/2+it)$ の偏角の変化によって書き換えられる．

$$h(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$$

とおくと，$t \in (z_i, z_{i+1})$ に対して，

$$\zeta^{(k)}\left(\frac{1}{2}+it\right) = \left(h\zeta \cdot \frac{\zeta'}{\zeta} \cdot \frac{\zeta''}{\zeta'} \cdots \frac{\zeta^{(k)}}{\zeta^{(k-1)}} \cdot \frac{1}{h} \right)\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

と書き直し，$\Delta \arg \zeta^{(k)}(1/2+it)$ を評価すれば良い．

関数等式 (cf. [Tit86, (2.1.1), p. 13]) より

$$\Delta \arg(h(1/2+it)\zeta(1/2+it)) = 0.$$

(3.6) により，$l=1,2,\cdots,k$ と $t\in(z_i,z_{i+1})$ に対して，

$$\Delta \arg \frac{\zeta^{(l)}}{\zeta^{(l-1)}}(1/2+it) \ll 1$$

が成り立つ．再び $\Gamma(s)$ に関するスターリングの公式 [Tit39, Section 4.42] を用いれば

$$\left|\Delta \arg \frac{1}{h(1/2+it)}\right| \ll \int_{z_j}^{z_{j+1}} \left|\frac{h'}{h}(1/2+it)\right| dt \ll (z_{j+1}-z_j)\log T$$

が得られる．従って，

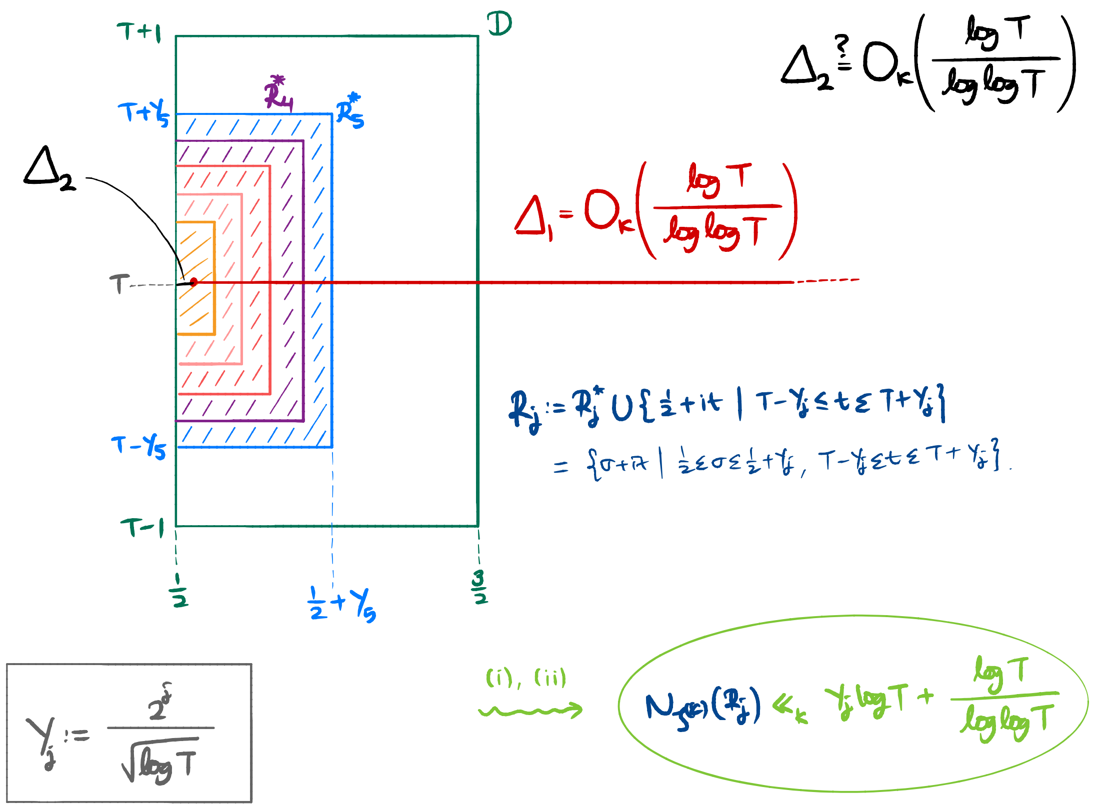
$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} F_k(t)dt \ll_k 1+(z_{i+1}-z_i)\log T$$

である．(3.8) 及び (3.7) により，

$$N_{\zeta^{(k)}}(R_j^*) \ll_k \sum_{\substack{T-Y_j\le z_i\le T+Y_j,\\ z_i\in\mathcal{Z}_k}} (1+(z_{i+1}-z_i)\log T) \ll Y_j \log T + \frac{\log T}{\log\log T}.$$

これで，(3.5) は証明できた．

ここまでの話は



でイメージできる．

(3.4) で，$2^N X \approx 1$ となる N に対し，$\mathcal{D} = \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{R}_j$ と書き直せば，

$$\begin{aligned}\Delta_2 &\ll \sum_{j=1}^{N} \sum_{\rho_k \in \mathcal{R}_j} \left| \arg\left(\frac{1}{2} + X + iT - \rho_k\right) - \arg\left(\frac{1}{2} + iT - \rho_k\right) \right| + X \log T \\ &\ll \sum_{j=1}^{N} N_{\zeta^{(k)}}\left(\mathcal{R}_j\right) \frac{X}{Y_j} + X \log T\end{aligned}$$

と評価できる．(3.5) を適用すれば，

$$\Delta_2 \ll_k \sum_{j=1}^{N} \left(2^j X \log T + \frac{\log T}{\log\log T}\right) \frac{1}{2^j} \ll \frac{\log T}{\log\log T}$$

が得られる．RH の仮定の下での (2.3) の証明は完了．

4　展望

[GS20]，そして，[Ge17] の結果は，ディリクレ L 関数やセルバーグゼータ関数などほかのゼータ関数と L 関数に対して，T 方向における改良を得るのに適用できる．つまり，例えば，ディリクレ L 関数に対して，指標 q 依存に関する改良はこの方法で得られない．一部の結果は [GS20, Section 4] と [Ge19] に記述されるので，ご参考ください．これらの結果は [Sur17] と [Luo05] の改良を果たした．

参考文献

[Aka12] H. Akatsuka, *Conditional estimates for error terms related to the distribution of zeros of* $\zeta'(s)$, J. Number Theory **132** (2012), no. 10, 2242–2257.

[BD04] P. T. Bateman and H. G. Diamond, *Analytic Number Theory: An Introductory Course*, World Scientific Publishing, 2004.

[Ber70] B. C. Berndt, *The number of zeros for* $\zeta^{(k)}(s)$, J. London Math. Soc. (2) **2** (1970), 577–580.

[FGH07] D. W. Farmer, S. M. Gonek and C. P. Hughes, *The maximum size of L-functions*, J. Reine Angew. Math. **609** (2007), 215–236.

[Ge17] F. Ge, *The number of zeros of* $\zeta'(s)$, Int. Math. Res. Not. IMRN (2017), no. 5, 1578–1588.

[Ge19] F. Ge, *The number of zeros of* $L'(s,\chi)$, Acta Arith. **190** (2019), no. 2, 127–138.

[GS20] F. Ge and A. I. Suriajaya, *Note on the number of zeros of* $\zeta^{(k)}(s)$, to appear in Ramanujan J., available online at https://doi.org/10.1007/s11139-019-00219-z.

[LM74] N. Levinson and H. L. Montgomery, *Zeros of the derivative of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **133** (1974) 49–65.

[Lit24] J. E. Littlewood, *On the zeros of the Riemann zeta-function*, Proc. Camb. Philos. Soc. **22** (1924), 295–318.

[Luo05] W. Luo, *On the zeros of the derivative of the Selberg zeta function*, Amer. J. Math. **127** (2005), no. 5, 1141–1151.

[Rie59] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie (Nov. 1859), 671–680.

[Spe35] A. Speiser, *Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion*, Math. Ann. **110** (1935), 514–521.

[Spi70] R. Spira, *Another zero-free region for $\zeta^{(k)}(s)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), 246–247.

[Spi65] R. Spira, *Zero-free regions of $\zeta^{(k)}(s)$*, J. Lond. Math. Soc. **40** (1965), 677–682.

[Spi73] R. Spira, *Zeros of $\zeta'(s)$ and the Riemann hypothesis*, Illinois J. Math. **17** (1973), 147–152.

[Spi72] R. Spira, *Zeros of $\zeta'(s)$ in the critical strip*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 59–60.

[Sur15] A. I. Suriajaya, *On the zeros of the k-th derivative of the Riemann zeta function under the Riemann hypothesis*, Funct. Approx. Comment. Math. **53** (2015), 69–95.

[Sur17] A. I. Suriajaya, *Two estimates on the distribution of zeros of the first derivative of Dirichlet L-functions under the generalized Riemann hypothesis*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **29** (2017), no. 2, 471–502.

[Tit39] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford University Press, 1939.

[Tit86] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd ed. (revised by D. R. Heath-Brown), Oxford Science Publications, Oxford, 1986.

[Yil96] C. Y. Yıldırım, *A Note on $\zeta''(s)$ and $\zeta'''(s)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), no. 8, 2311–2314.

[Yil20] C. Y. Yıldırım, *Zeros of $\zeta''(s)$ & $\zeta'''(s)$ in $\sigma < \frac{1}{2}$*, Turkish J. Math. **24** (2000), no. 1, 89–108.

[Zha01] Y. Zhang, *On the zeros of $\zeta'(s)$ near the critical line*, Duke Math. J. **110** (2001), 555–572.

Faculty of Mathematics, Kyushu University
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395
JAPAN

E-mail address: `adeirmasuriajaya@math.kyushu-u.ac.jp`

九州大学数理学研究院　Ade Irma Suriajaya

以上