非正整数点における多重ゼータ値の帰納的計算について

大阪体育大学　佐々木義卓

Yoshitaka Sasaki
Liberal Arts Education Center,
Osaka University of Health and Sport Sciences

1　序

複素変数 s_i $(i=1,\ldots,r)$ に対して, 多重ゼータ関数は

$$\zeta_r(s_1,\ldots,s_r):=\sum_{1<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}}$$

で定義され,

$$\left\{(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r \;\middle|\; \sum_{i=1}^{j}\Re s_{r-i+1}>j\ (1\le j\le r)\right\} \tag{1.1}$$

において絶対収束する ([5]). また, 有理型関数として $\mathbb{C}^r$ 全体に解析接続され ([1], [10]),

$$\begin{aligned} &s_r=1, \qquad s_{r-1}+s_r=2,1,0,-2,-4,\ldots,\\ &\sum_{i=1}^{j}s_{r-i+1}\in\mathbb{Z}_{\le j}\quad (j=3,\ldots,r) \end{aligned} \tag{1.2}$$

に 1 位の極を持つことが知られている ([1]). 1 重ゼータ関数 $(r=1)$ は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)=\sum_{n\ge1}n^{-s}$ であり, (1.1), (1.2) は, $\zeta(s)$ が $\Re s>1$ で絶対収束し, $s=1$ に 1 位の極を持つことに対応していることがわかる.

整数論において Riemann ゼータ関数の整数点での特殊値は重要であったことから, 多重ゼータ関数の整数点での特殊値 (多重ゼータ値) にも興味を抱くことは自然と言えるだろう. 本稿では, とりわけ非正整数点における多重ゼータ値を扱う. なぜ非正整数点に着目するのかというと, $(s_1,\ldots,s_r)=(-k_1,\ldots,-k_r)\in\mathbb{Z}_{\le0}^r$ が, (1.2) の条件を満たすため, そもそもそこでの値を導入すること自体, 問題がある対象だからである. 一般に, 非正整数点は多重ゼータ関数の不確定特異点 (ただし, $r=1$ および $r=2$, $s_1+s_2=-1,-3,\ldots$ は例外) であることが知られており ([1]), そこでの値は極限操作に依存して定まる. 秋山・江上・谷川 [1], 秋山・谷川 [2] は, 次のように極限操作を指定することで, 初めて非正整

数点における多重ゼータ値を導入し, それらの性質を多数示した. それぞれ *regular value*, *reverse value*, *central value* と呼ばれる:

$$\zeta_r^{\mathrm{Reg}}(-k_1,\ldots,-k_r) := \lim_{s_1\to -k_1}\cdots\lim_{s_r\to -k_r}\zeta_r(s_1,\ldots,s_r), \tag{1.3a}$$

$$\zeta_r^{\mathrm{Rev}}(-k_1,\ldots,-k_r) := \lim_{s_r\to -k_r}\cdots\lim_{s_1\to -k_1}\zeta_r(s_1,\ldots,s_r), \tag{1.3b}$$

$$\zeta_r^{\mathrm{C}}(-k_1,\ldots,-k_r) := \lim_{x\to 0}\zeta_r(-k_1+x,\ldots,-k_r+x). \tag{1.3c}$$

さらに, これらの自然な拡張として, 次のような極限操作 (*coordinatewise limit*, *directional limit*) が, 筆者 [7] や小森 [4] によって導入されている:

$$\zeta_r(\overset{p_1}{-k_1},\ldots,\overset{p_r}{-k_r}) := \lim_{\substack{s_j\to -k_j\\ p_j=r}}\cdots\lim_{\substack{s_j\to -k_r\\ p_j=1}}\zeta_r(s_1,\ldots,s_r), \tag{1.4a}$$

$$\zeta_r(\underset{\theta_1}{-k_1},\ldots,\underset{\theta_r}{-k_r}) := \lim_{x\to 0}\zeta_r(-k_1+x,\ldots,-k_r+x). \tag{1.4b}$$

ここで, $(p_1,\ldots,p_r)$ は $1,\ldots,r$ の順列であり, $(\theta_1,\ldots,\theta_r)\in\mathbb{C}^r$ $(\sum_{i=j}^r\theta_i\neq 0,\ j=1,\ldots,r)$ である. つまり, (1.4a) は $(p_1,\ldots,p_r)$ が示す順番にしたがって各変数の極限を考えており,

$$\zeta_r(\overset{r}{-k_1},\overset{r-1}{-k_2},\ldots,\overset{1}{-k_r}) = \zeta_r^{\mathrm{Reg}}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r),$$
$$\zeta_r(\overset{1}{-k_1},\overset{2}{-k_2},\ldots,\overset{r}{-k_r}) = \zeta_r^{\mathrm{Rev}}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)$$

である. 一方, (1.4b) は方向ベクトル $\vec{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_r)$ に沿った極限を考えており,

$$\zeta_r(\underset{1}{-k_1},\underset{1}{-k_2},\ldots,\underset{1}{-k_r}) = \zeta_r^{\mathrm{C}}(-k_1,-k_2,\ldots,-k_r)$$

である.

さて, これら非正整数点における多重ゼータ値は, どのように計算されるのであろうか？例えば, ζ_r^{Reg} と ζ_r^{Rev} は次のような明示公式が与えられている (本稿で述べる主結果との関係から, 下記は [1], [2] の表記に若干変更を加えている):

定理 1.1 (秋山・江上・谷川 [1], 秋山・谷川 [2])**.** 非負整数 $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ に対して,

$$\zeta_r^{\mathrm{Reg}}(-\mathbf{k}) = \sum_{q=-1}^{k_r}(-1)^q\, b_{q+1}(k_r)\zeta_{r-1}^{\mathrm{Reg}}(-k_1,\ldots,-k_{r-2},-k_{r-1}-k_r+q), \tag{1.5a}$$

$$\begin{aligned}\zeta_r^{\mathrm{Rev}}(-\mathbf{k}) &= \sum_{q=-1}^{k_1} b_{q+1}(k_1)\zeta_{r-1}^{\mathrm{Rev}}(-k_1-k_2+q,-k_3,\ldots,-k_r)\\ &\quad+\zeta(-k_1)\zeta_{r-1}^{\mathrm{Rev}}(-k_2,\ldots,-k_r).\end{aligned} \tag{1.5b}$$

ただし, $b_q(k) := \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{q}B_q$ (B_q は $B_1=-1/2$ の Bernoulli 数).

非常に簡潔かつ調和のとれた形で記述されていることがわかるだろう．特に, r 重ゼータ値が $(r-1)$ 重ゼータ値から導かれるという点に注意されたい．しかしながら, より一般の (1.4) の計算方法は, 定理 1.1 と比較すると非常に複雑と言える．本研究の目的は, まさにこの問題の解消であり, より具体的には種々の極限操作による非正整数点での多重ゼータ値に対して, 定理 1.1 のように簡単な計算方法を与えることである．本稿は, 近年小野塚によって与えられた非正整数点における多重ゼータ関数の漸近展開公式に着目することで, 種々の極限操作による非正整数点での多重ゼータ値を定理 1.1 のように計算できることを述べるものである．

2　小野塚の定理

小野塚 [6] は非正整数点における多重ゼータ関数の漸近挙動を与えている．ここでは, いくつかの記号を導入して小野塚が得た漸近公式について述べる．

非負整数 $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_r), \mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ に対して, $\delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k}):=\sum_{i=j}^r(u_i-k_i-1)$,

$$\mathcal{U}(\mathbf{k}):=\left\{\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r \;\middle|\; \begin{array}{ll} \delta_1(\mathbf{u},\mathbf{k})=0, & \\ \delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k})\leq 0 & \\ \quad\text{or} & (2\leq j\leq r) \\ \delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k})\geq k_{j-1}+1 & \end{array}\right\}$$

および

$$E_j(\mathbf{u},\mathbf{k},\mathbf{x}):=\begin{cases}\frac{x_j+\cdots+x_r}{x_{j-1}+x_j+\cdots+x_r} & \text{if } \delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k})\geq k_{j-1}+1 \quad (2\leq j\leq r),\\ 1 & \text{if } j=1 \text{ or } \delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k})\leq 0 \quad (2\leq j\leq r).\end{cases}$$

また,

$$(x)_n:=\begin{cases}x(x-1)\dots(x-n+1) & n\geq 1,\\ 1 & n=0,\end{cases}$$

とする．このとき,

定理 2.1 (小野塚 [6]). 複素数 $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_r)\in\mathbb{C}^r$ は $\sum_{i=j}^r x_i\neq 0 \quad (j=1,2,\dots,r)$, $\sum_{i=1}^r|x_i|\leq 1/2$, $|x_i/(x_j+\cdots+x_r)|\ll 1$ $((x_1,\dots,x_r)\to(0,\dots,0))$ $(1\leq j\leq i\leq r)$ を満たすとする．このとき, $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ に対して,

$$\zeta_r(-\mathbf{k}+\mathbf{x})=(-1)^{k_r}k_r!\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}(\mathbf{k})}\prod_{j=1}^r\frac{B_{u_j}}{u_j!}(\delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k})-1)_{k_{j-1}}E_j(\mathbf{u},\mathbf{k},\mathbf{x})+\sum_{j=1}^r O(|x_j|) \tag{2.1}$$

$((x_1,\dots,x_r)\to(0,\dots,0))$. ただし, $k_0:=0$ とする．

小野塚の定理の留意点をまとめておこう. まず, 右辺第1項の $\mathbf{u}(\in \mathcal{U}(\mathbf{k}))$ に渡る和は, $\mathbf{k}$ によってその範囲が定まる有限和である. そして, $\mathbf{u}$ が各 j に対して $\delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k}) \geq k_{j-1}+1$ を満たすときに限って, 極限 $(x_1,\dots,x_r) \to (0,\dots,0)$ において不確定となる因子 "$(x_j+\cdots+x_r)/(x_{j-1}+x_j+\cdots+x_r)$"が付加されるものとなっている.

さて, ここで小野塚の定理を不確定因子 "$(x_j+\cdots+x_r)/(x_{j-1}+x_j+\cdots+x_r)$"の観点から再考してみよう. この因子を持つかどうかは $\mathbf{u}$ が条件 $\delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k}) \geq k_{j-1}+1$ を満たすかどうかで分類できる. その様子を正確に捉えるために, 次の記号を導入してみる. $\mathbf{i}=(i_1,\dots,i_r)\in\{\bullet,0,1\}^r$, $\mathbf{i}_\bullet := (\bullet, i_2,\dots,i_r)\ \ (i_j\in\{0,1\})$, $I^r_\bullet := \{\mathbf{i}_\bullet\}$ とする. また, $\mathbf{i}$ に対して,

$$\mathcal{U}(\mathbf{k};\mathbf{i}) := \left\{ \mathbf{u}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k}) = 0 & \text{if } i_j=\bullet, \\ \delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k}) \leq 0 & \text{if } i_j = 0, \quad (1\leq j\leq r) \\ \delta_j(\mathbf{u},\mathbf{k}) \geq k_{j-1}+1 & \text{if } i_j=1, \end{array} \right\}$$

として[1],

$$\alpha_{\mathbf{i}}(\mathbf{k}) := \sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}(\mathbf{k};\mathbf{i})} \prod_{j=1}^{r} \frac{B_{u_j}}{u_j!}(\delta_{j+1}(\mathbf{u},\mathbf{k})-1)_{k_j},$$

$$\mathrm{E}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) := \prod_{\substack{2\leq j\leq r\\ i_j=1}} \frac{x_j+\cdots+x_r}{x_{j-1}+x_j+\cdots+x_r}$$

とおく. このとき, 定理2.1は次のように表現できる:

定理 2.2 ((定理2.1の書き換え版)). 定理2.1と同じ条件下で,

$$\zeta_r(-\mathbf{k}+\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}_\bullet\in I^r_\bullet} \alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})\mathrm{E}_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{r} O(|x_j|) \qquad (\mathbf{x}\to\mathbf{0}). \tag{2.2}$$

具体例を計算してみよう:

例 2.3. (i) 1重ゼータ $(r=1)$

$$\zeta(-k+x) = \alpha_\bullet(k) + O(|x|)$$

であって,

$$\alpha_\bullet(k) = (-1)^k \frac{B_{k+1}}{k+1} = \zeta(-k). \tag{2.3}$$

(ii) 2重ゼータ $(r=2)$

$$\zeta_2(-k_1+x_1,-k_2+x_2) = \alpha_{(\bullet,0)}(k_1,k_2) + \alpha_{(\bullet,1)}(k_1,k_2)\frac{x_2}{x_1+x_2} + O(|x_1|+|x_2|)$$

[1] $\bullet$ は不要ではないかというご指摘をいただきましたが, ここでは講演と同様に $\bullet$ を残した形でまとめておきます.

であり, (1.3) における極限をとれば,

$$\begin{aligned}
\zeta_2^{\mathrm{Reg}}(-k_1,-k_2)&=\alpha_{(\bullet,0)}(k_1,k_2),\\
\zeta_2^{\mathrm{Rev}}(-k_1,-k_2)&=\alpha_{(\bullet,0)}(k_1,k_2)+\alpha_{(\bullet,1)}(k_1,k_2),\\
\zeta_2^{\mathrm{C}}(-k_1,-k_2)&=\alpha_{(\bullet,0)}(k_1,k_2)+\frac{1}{2}\alpha_{(\bullet,1)}(k_1,k_2)
\end{aligned}$$

を得る. ここで, 各係数 α は以下で与えられる:

$$\alpha_{(\bullet,0)}(k_1,k_2)=(-1)^{k_2}k_2!\sum_{u_2=0}^{k_2+1}\frac{B_{u_2}}{u_2!}\sum_{\substack{u_1\geq 0,\\ u_1+u_2=k_1+k_2+2}}\frac{B_{u_1}}{u_1!}(u_2-k_2-2)_{k_1}, \tag{2.4}$$

$$\alpha_{(\bullet,1)}(k_1,k_2)=(-1)^{k_2}k_1!k_2!\frac{B_{k_1+k_2+2}}{(k_1+k_2+2)!}. \tag{2.5}$$

上の具体例からもわかるように, 極限操作の影響を受けるのは, 不確定因子 $\mathrm{E}_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{x})$ の部分のみであり, 非正整数点での多重ゼータ値を求める上で本質的な部分は, 各係数 $\alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})$ であることがわかる. では, この $\alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})$ は簡単に計算できるだろうか？上記の (2.4) は計算できそうであるが, 一般には $(u_1,\ldots,u_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ の複雑な多重和を計算することになり, 人力では限界がありそうな雰囲気である. 本稿の主定理は, この $\alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})$ が (1.5) のように帰納的に計算できるだけでなく, ある種の対称性を有し, 調和の取れた対象であることを示すものである.

3 主定理

主定理を簡潔に述べるために, 次の記号を導入する. $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して, $\overline{\mathbf{k}}:=(k_r,\ldots,k_1)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k}_l:=(k_1,\ldots,k_l), \qquad \mathbf{k}^l:=(k_{l+1},\ldots,k_r) \quad (1\leq l\leq r-1),\\
&\mathbf{k}_j^i:=(k_{i+1},k_{i+2},\ldots,k_j) \quad (i<j)
\end{aligned}$$

とし, $\{a\}_l:=(\underbrace{a,\ldots,a}_{l})$ とする. このとき, $\mathbf{i}_\bullet=(\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-l-1})$ に対する $\alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})$ は次のように計算される:

定理 3.1 (佐々木 [8]). 非負整数 $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ とする.

(i) $0\leq l\leq r-2$ に対して,

$$\alpha_{(\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-1-l})}(\mathbf{k})=\sum_{q=-1}^{k_r}(-1)^q b_{q+1}(k_r)\alpha_{(\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-2-l})}(\mathbf{k}_{r-2},k_{r-1}+k_r-q). \tag{3.1}$$

(ii) $2 \leq l \leq r-1$ に対して,

$$\alpha_{(\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-1-l})}(\mathbf{k}) = \sum_{q=-1}^{k_1} b_{q+1}(k_1)\alpha_{(\bullet,\{1\}_{l-1},\{0\}_{r-1-l})}(k_1+k_2-q,\mathbf{k}^2). \tag{3.2}$$

係数 $\alpha_{(\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-1-l})}(\mathbf{k})$ の 2 通りの帰納的明示式を述べたが, これらの違い, 特性についてまとめておこう. 前者の (3.1) は, $\alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})$ の $\mathbf{i}_\bullet$ に 1 の並びは無くてもよいが, 0 が少なくとも 1 つ含まれているときに限って有効である. 一方, 後者の (3.2) は $\mathbf{i}_\bullet$ に 1 が少なくとも 1 つ含まれているときに限って有効であり, 0 の並びが無くても成立するものとなっている. したがって, (3.1), (3.2) は, それぞれ $\alpha_{(\bullet,\{0\}_{r-1})}(\mathbf{k})$, $\alpha_{(\bullet,\{1\}_{r-1})}(\mathbf{k})$ の場合を含めた $\alpha_{(\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-1-l})}(\mathbf{k})$ 型の帰納的な計算方法を述べているわけである. ただし, 初期値は (2.3), (2.5) である.

さて, 上定理で扱っていない $\mathbf{i}_\bullet = (\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-1-l})$ 以外の場合はどうだろうか？次に述べる定理は, どの $\alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})$ も定理 3.1 の場合に帰着されることを述べている. つまり, 種々の極限操作による非正整数点での多重ゼータ値は, 本質的に定理 3.1 を用いて計算可能ということになる:

定理 3.2 (佐々木 [8]). $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ に対して,

$$\begin{aligned}\alpha_{(\bullet,i_2,\ldots,i_{l-1},0,1,i_{l+2},\ldots,i_r)}(\mathbf{k}) &= \alpha_{(\bullet,i_2,\ldots,i_{l-1},\bullet,1,i_{l+2},\ldots,i_r)}(\mathbf{k}) \\ &= \alpha_{(\bullet,i_2,\ldots,i_{l-1})}(\mathbf{k}_{l-1})\alpha_{(\bullet,1,i_{l+2},\ldots,i_r)}(\mathbf{k}^{l-1}).\end{aligned}$$

上記 2 つの定理は, $I^r_\bullet$ の元で, $\mathbf{i}_\bullet = (\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-1-l})$ $(l = 0,1,\ldots,r-1)$ 型のものが本質的であることを述べているので, これらを**原始的**と呼んでも差し支えないだろう. 本節の最後に, 原始的な $\mathbf{i}_\bullet$ に対する $\alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})$ の対称性についても触れておこう.

定理 3.3 (佐々木 [8]). 非負整数 $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\geq 0}$ に対して,

$$\alpha_{(\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-1-l})}(\mathbf{k}) = (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})}\alpha_{(\bullet,\{1\}_{r-l},\{0\}_{l-1})}(\overline{\mathbf{k}}).$$

これは, index $\mathbf{k}$ とその逆順 index $\overline{\mathbf{k}}$ の関係を述べているわけだが, そのとき $(\bullet,\{1\}_l,\{0\}_{r-1-l})$ における r と $r-l$ の入れ替えが伴うことにも注意されたい.

4 Regular, reverse, central およびその他

小野塚の定理より, regular, reverse, central value は次で与えられる:

定理 4.1.

$$\zeta_r^{\mathrm{Reg}}(-\mathbf{k}) = \alpha_{(\bullet,\{0\}_{r-1})}(\mathbf{k}), \tag{4.1a}$$

$$\zeta_r^{\mathrm{Rev}}(-\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{i}_\bullet \in I^r_\bullet} \alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k}), \tag{4.1b}$$

$$\zeta_r^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{i}_\bullet \in I^r_\bullet} \alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})\mathrm{E}(\mathbf{1}). \tag{4.1c}$$

ただし, $\mathbf{1}=(\underbrace{1,\dots,1}_{r})$.

注意 4.2. 上の (4.1a) は, 式 (1.5a) と (3.1) が全く同じ形をしており, さらに, 初期値 $\alpha_\bullet(k)=\zeta(-k)$ であることからも確認することができる.

定理 4.1 の理解を深めるために, 3 重ゼータ $(r=3)$ の場合を具体的に書き下してみよう:

例 4.3 (3 重ゼータ $(r=3)$ の場合)**.** 小野塚の定理より,

$$\begin{aligned}
&\zeta_3(-k_1+x_1,-k_2+x_2,-k_3+x_3) \\
&=\alpha_{(\bullet,0,0)}(k_1,k_2,k_3)+\alpha_{(\bullet,0,1)}(k_1,k_2,k_3)\frac{x_3}{x_2+x_3} \\
&\quad+\alpha_{(\bullet,1,0)}(k_1,k_2,k_3)\frac{x_2+x_3}{x_1+x_2+x_3}+\alpha_{(\bullet,1,1)}(k_1,k_2,k_3)\frac{x_3}{x_1+x_2+x_3} \\
&\quad+O(|x_1|+|x_2|+|x_3|)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

であり, (1.3) における極限をとれば,

$$\begin{aligned}
\zeta_3^{\mathrm{Reg}}(-k_1,-k_2,-k_3)&=\alpha_{(\bullet,0,0)}(k_1,k_2,k_3), \\
\zeta_3^{\mathrm{Rev}}(-k_1,-k_2,-k_3)&=\alpha_{(\bullet,0,0)}(k_1,k_2,k_3)+\alpha_{(\bullet,0,1)}(k_1,k_2,k_3) \\
&\quad+\alpha_{(\bullet,1,0)}(k_1,k_2,k_3)+\alpha_{(\bullet,1,1)}(k_1,k_2,k_3), \\
\zeta_3^{\mathrm{C}}(-k_1,-k_2,-k_3)&=\alpha_{(\bullet,0,0)}(k_1,k_2,k_3)+\frac{1}{2}\alpha_{(\bullet,0,1)}(k_1,k_2,k_3) \\
&\quad+\frac{2}{3}\alpha_{(\bullet,1,0)}(k_1,k_2,k_3)+\frac{1}{3}\alpha_{(\bullet,1,1)}(k_1,k_2,k_3)
\end{aligned}$$

を得る. ここで, 定理 3.2 より,

$$\alpha_{(\bullet,0,1)}(k_1,k_2,k_3)=\alpha_\bullet(k_1)\alpha_{(\bullet,1)}(k_2,k_3)$$

であることに注意する.

小野塚の定理は (1.4) の極限操作に限らず, 様々な極限操作に対しても有効である. その具体例として, 小野塚 [6] は次のような極限値を計算している:

$$\lim_{x\to 0}\zeta_3(x^2,x,x)=-\frac{1}{3}. \tag{4.3}$$

これは一般に,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\zeta_3(-k_1+x^2,-k_2+x,-k_3+x) \\
&=\alpha_{(\bullet,0,0)}(k_1,k_2,k_3)+\frac{1}{2}\alpha_{(\bullet,0,1)}(k_1,k_2,k_3) \\
&\quad+\alpha_{(\bullet,1,0)}(k_1,k_2,k_3)+\frac{1}{2}\alpha_{(\bullet,1,1)}(k_1,k_2,k_3)
\end{aligned}$$

で与えられ, $\alpha_{\mathbf{i}_\bullet}(\mathbf{k})$ を用いた表示だと, 上記 ζ_3^{Rev}, ζ_3^{C} とどの程度違うのかも具体的にわかることに注意されたい.

5 Central value に関する remark

本稿の最後に, 秋山等の central value に関する考察について言及したい. 秋山・江上・谷川 [1] は, $\mathbf{k} \in (2\mathbb{Z}_{\geq 1})^r$ に対して,

$$\zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}) + \zeta_2^{\mathrm{C}}(\overline{-\mathbf{k}}) = 0, \tag{5.1a}$$

$$\zeta_3^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}) + \zeta_3^{\mathrm{C}}(\overline{-\mathbf{k}}) = 0 \tag{5.1b}$$

が成り立つことを指摘している. では, この先はどうなっているのだろうか？第 3 節の定理を応用すると, この 2 式に加えて,

$$\zeta_4^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}) + \zeta_4^{\mathrm{C}}(\overline{-\mathbf{k}}) = \zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}_2)\zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}^2), \tag{5.2a}$$

$$\zeta_5^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}) + \zeta_5^{\mathrm{C}}(\overline{-\mathbf{k}}) = \zeta_3^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}_3)\zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}^3) + \zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}_2)\zeta_3^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}^2), \tag{5.2b}$$

$$\begin{aligned}\zeta_6^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}) + \zeta_6^{\mathrm{C}}(\overline{-\mathbf{k}}) &= \zeta_4^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}_4)\zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}^4) + \zeta_3^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}_3)\zeta_3^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}^3) \\ &\quad + \zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}_2)\zeta_4^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}^2) - \zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}_2)\zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}_4^2)\zeta_2^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}^4)\end{aligned} \tag{5.2c}$$

を得ることができる. これなら, 右辺の法則性がわかるだろう. 実際にこの法則は一般の場合でも成り立つ (ことを証明できるが, いくつかの記号を新たに導入するなどの煩わしさから, ここでは割愛する. 実は, 対称多重ゼータ関数の非正整数点での特殊値と深い繋がりがある). また, (5.1) および (5.2) より, $\mathbf{k} = (\{2k\}_{r-2}, k_{r-1}, k_r) \in (2\mathbb{Z}_{\geq 1})^r$ に対して,

$$\zeta_r^{\mathrm{C}}(-\mathbf{k}) + \zeta_r^{\mathrm{C}}(\overline{-\mathbf{k}}) = 0$$

がわかる. これは, 秋山等が (5.1) から予想した

$$\zeta_r^{\mathrm{C}}(-2k, \ldots, -2k) \stackrel{?}{=} 0 \qquad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

(鎌野 [3], 山崎 [9] によって証明された) を, より精密に捉えたものと言えるだろう.

謝辞

講演の機会を与えて下さった研究代表者である鈴木正俊先生に感謝申し上げます.

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith. **98** (2001), 107-116.

[2] S. Akiyama and Y. Tanigawa, *Multiple zeta values at non-positive integers*, Ramanujan J. **5** (2001), 327-351.

[3] K. Kamano, *The multiple Hurwitz zeta function and a generalization of Lerch's formula*, Tokyo J. Math. **29** (2006), 61–73.

[4] Y. Komori, *An integral representation of multiple Hurwitz-Lerch zeta functions and generalized multiple Bernoulli numbers*, Quart. J. Math. **60** (2009), 1–60.

[5] K. Matsumoto, *On analytic continuation of various multiple zeta-functions*, Number Theory for the Millenium (Urbana, 2000), Vol. II, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417–440.

[6] T. Onozuka, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and the asymptotic behavior at non-positive integers*, Funct. Approx. Comment. Math. **49**, (2013), 401–409.

[7] Y. Sasaki, *Multiple zeta values for coordinatewise limits at non-positive integers*, Acta Arith. **136** (2009), 299–317.

[8] Y. Sasaki, *Evaluations of multiple zeta values for various limiting processes at non-positive integers*, preprint.

[9] Y. Yamasaki, *Evaluations of multiple Dirichlet L-values via symmetric functions*, J. Number Theory **129** (2009), 2369–2386.

[10] J. Q. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1275–1283.

Liberal Arts Education Center,
Osaka University of Health and Sport Sciences,
Asashirodai 1-1, Kumatori-cho,
Sennan-gun Osaka 590-0496, Japan.

E-mail address: ysasaki@ouhs.ac.jp