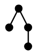
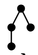
根付き木写像と多重ゼータ値, 多重 L 値

京都産業大学　田中立志 *
Tatsushi Tanaka
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kyoto Sangyo University

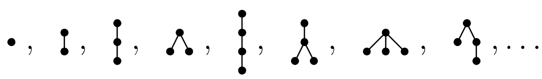
概 要

Connes-Kreimer による根付き木のホップ代数に基づいて, (r+1) 変数非可換多項式環上の写像（根付き木写像）を構成する．最近の研究により, この根付き木写像は多重 L 値の関係式族を誘導することがわかってきたので, その報告をする．本稿ではまず $r=1$ の場合にすでに得られていた多重ゼータ値に関する結果を復習し, 次に一般の r の場合に話をもっていく．

1　Connes-Kreimer's Hopf algebra of rooted trees

閉路を持たない連結な有限（有向）グラフを木 (tree) と呼ぶ．木であって, 根 (root) と呼ばれる特別な頂点を持つものを根付き木 (rooted tree) と呼ぶ．すべての辺 (edge) が根から離れる向きに向き付けられている, という性質で根は特徴付けられる．平面構造を持たない根付き木 (non-planar rooted tree) とは, 根付き木であって, 各頂点から出ている辺に順序関係がないものをいう．たとえば,  と  は区別しない．

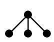
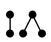
以後, 根付き木は平面構造を持たないものとする．



などが根付き木である．（このように根付き木を図示する場合には, 根を一番上に書くことにする.）

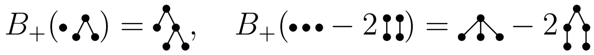
木の disjoint union を森 (forest) と呼ぶ．森が生成する $\mathbb{Q}$-ベクトル空間を $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ と書くことにする：

$$\mathcal{H}_{\mathrm{CK}} := \sum_{f:\text{forest}} \mathbb{Q}f.$$

このとき, $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ は自由な可換 $\mathbb{Q}$-代数になる.（積は disjoint union. 積の単位元を $\mathbb{I}$ と書いて, 空の森 (empty forest) と呼ぶ.）たとえば, 3  $+\frac{2}{5}$  -8  $+2\mathbb{I}\in\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$.

*email: t.tanaka@cc.kyoto-su.ac.jp

$\mathcal{T}$ を, すべての根付き木が生成する $\mathbb{Q}$-ベクトル空間とする. $\mathbb{Q}$-線形写像 $B_+ : \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \to \mathcal{T}$ を, $B_+(\mathbb{I}) := \bullet$ と, 森に対してはそれを構成している根付き木のすべての根を別の新たな点（これが新たな根になる）につなげるものとして定義する. たとえば,



などとなる. この B_+ を接ぎ木作用素 (grafting operator) と呼ぶ. 空でない任意の根付き木 t に対して, $t = B_+(f)$ となる森 f がただ一つ存在することがわかる.（f は t の根を取り除いたもの.）

接ぎ木作用素を用いて, $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ 上に余積 (coproduct) $\Delta : \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ を,

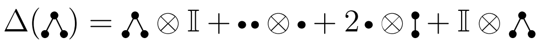
$$\Delta(fg) = \Delta(f)\Delta(g) \quad (f,\, g \in \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}),$$

および根付き木 $t = B_+(f)$ に対して

$$\Delta(t) := t \otimes \mathbb{I} + (id \otimes B_+)\,(\Delta(f))$$

で定義する. この定義により, たとえば,

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathbb{I}) &= \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \\
\Delta(\bullet) &= \bullet \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet, \\
\Delta(\bullet\bullet) &= \bullet\bullet \otimes \mathbb{I} + 2\bullet \otimes \bullet + \mathbb{I} \otimes \bullet\bullet,
\end{aligned}$$



などと計算される. 最後の例は, この余積が余可換 (cocommutative) ではないことを示している. 一方, この余積 Δ は余結合的 (coassociative) であることが知られている.

以下の定理 1 を述べるために, $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ の積（disjoint union であった）を $m : \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ と書く. 単位元 $\mathbb{I}$ は, $\mathbb{Q}$ から $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ への写像で, 1 を $\mathbb{I}$ に送る写像である. 余単位元 (counit) $\hat{\mathbb{I}} : \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \to \mathbb{Q}$ を, $\hat{\mathbb{I}}(\mathbb{I}) = 1$ であることを除いて, すべての森を消す写像として定義する. 対蹠射 (antipode) $S : \mathcal{H}_{\mathrm{CK}} \to \mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ を, 反代数準同型であって

$$m \circ (S \otimes id) \otimes \Delta = \mathbb{I} \circ \hat{\mathbb{I}} = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta$$

なる性質で定義する.（ただし, 本稿における次節以降の議論では, 余単位元や対蹠射は必要ない.）このとき, 次が知られている.

定理 1 ([CK]). $(\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}, m, \mathbb{I}, \Delta, \hat{\mathbb{I}}, S)$ は Hopf 代数になる.

2 Rooted tree maps for MZV's

この節では, Connes-Kreimer による根付き木の Hopf 代数 $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ から二変数非可換多項式環 $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x,\, y\rangle$ へのある作用を構成する.

先に記号を準備しておく. $M : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を, テンソル積を非可換積にする写像とする：$M(v \otimes w) := vw$. また, $u \in \mathfrak{H}$ に対して, $R_u : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を, u を右からかける写像とする：$R_u(w) := wu$.

さて, まず空の森 $\mathbb{I}$ を $\mathfrak{H}$ 上の恒等写像とみなすことにする. このとき, 以下のように $\mathfrak{H}$ 上の線形写像を帰納的に定義することができる.

定理 2 ([T]). 任意の森 $f(\neq \mathbb{I})$ に対し, $\mathbb{Q}$-線形写像 $f: \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$（同じ記号 f で表すことにする）を, 以下の 4 条件で定義することができる：

i) $f = \bullet$ のとき, $f(x) = -f(y) = xy$,

i') $(B_+(f))(u) = R_y R_{x+2y} R_y^{-1} f(u)$,

i") $f = gh$ $(g, h \neq \mathbb{I})$ のとき, $f(u) = g(h(u))$,

ii) $f(wu) = M((\Delta(f))(w \otimes u))$.

ただし, $u \in \{x, y\}$, $w \in \mathfrak{H}$.

これによって定義される写像 f を<u>根付き木写像</u> (rooted tree map) と呼んでいる. 条件 i') 中の R_y^{-1} が $f(u)$ にいつでも適用できることや, 条件 i") 中の $f(u)$ は f の g, h への分解の仕方によらないことがわかる. はじめの 3 条件が初期条件で, 4 つ目が帰納的なルールを与えている. 写像 f の帰納的なルールは, 対応する森 f の余積ルールからきている. 根付き木写像は $\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ から $\mathfrak{H}$ への作用を与えていることも確認できる. 根付き木写像の間の可換性は非自明だが, 証明できる.

例 3. 根付き木写像の像をいくつか計算してみる. $\Delta(\bullet) = \bullet \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \bullet$ なので,

$$\bullet\bullet(x) = \bullet(xy) = \bullet(x)y + x\bullet(y) = xy^2 - x^2y.$$

次に, $\overset{\bullet}{\bullet\,\bullet} = B_+(\bullet\bullet)$ なので,

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{\bullet\,\bullet}(x) &= (B_+(\bullet\bullet))(x) = R_y R_{x+2y} R_y^{-1} \bullet\bullet(x) \\ &= xy(x+2y)y - x^2(x+2y)y = xyxy + 2xy^3 - x^3y - 2x^2y^2.\end{aligned}$$

さらに, $\Delta(\overset{\bullet}{\bullet\,\bullet}) = \overset{\bullet}{\bullet\,\bullet} \otimes \mathbb{I} + \bullet\bullet \otimes \bullet + 2 \bullet \otimes \overset{\bullet}{\bullet} + \mathbb{I} \otimes \overset{\bullet}{\bullet\,\bullet}$ なので,

$$\overset{\bullet}{\bullet\,\bullet}(xy) = \overset{\bullet}{\bullet\,\bullet}(x)y + \bullet\bullet(x)\bullet(y) + 2\bullet(x)\overset{\bullet}{\bullet}(y) + x\overset{\bullet}{\bullet\,\bullet}(y).$$

$\overset{\bullet}{\bullet\,\bullet}(y) = -\overset{\bullet}{\bullet\,\bullet}(x)$ が成り立つことや, $\overset{\bullet}{\bullet}(y) = (B_+(\bullet))(y) = R_y R_{x+2y} R_y^{-1} \bullet(y) = -x(x+2y)y$ を用いると,

$$\overset{\bullet}{\bullet\,\bullet}(xy) = x^4y + x^3y^2 - 4x^2y^3 - 2xyx^2y - 3xyxy^2 - xy^2xy + 2xy^4$$

を得る.

3 Rooted tree maps relations

3.1 Multiple zeta values

<u>多重ゼータ値</u>(multiple zeta values, MZV) とは, 正の整数 $k_1, k_2, \ldots, k_n (n \geq 1,\ k_1 > 1)$ からなるインデックス $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ に対して, 以下の (収束) 級数で定義される実数である.

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}.$$

$\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$ は $\mathfrak{H}$ の部分環になる. Hoffman [H] にしたがい, $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1) = 1$ および

$$Z(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y \cdots x^{k_n-1}y) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

で定義する. MZV の間の $\mathbb{Q}$-線形な関係式を見つけるというのは, $\ker Z$ の元を見つけるということに等しい.

3.2 Rooted tree maps relations

以下の定理にあるように, 根付き木写像は MZV の関係式を誘導することがわかる.

定理 4 ([T])**.** 任意の rooted tree map $f\,(\neq \mathbb{I})$ に対し, $f(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

この定理は, 純代数的に川島関係式 [K] の線形部分に帰着させることで証明できる.

例 5. たとえば, $xy \in \mathfrak{H}^0$ だから, 例 3 で計算した

$$(xy) = x^4y + x^3y^2 - 4x^2y^3 - 2xyx^2y - 3xyxy^2 - xy^2xy + 2xy^4$$

を Z でうつすと 0 になるわけなので, 以下の関係式を得る.

$$\zeta(5) + \zeta(4,1) - 4\zeta(3,1,1) - 2\zeta(2,3) - 3\zeta(2,2,1) - \zeta(2,1,2) + 2\zeta(2,1,1,1) = 0.$$

3.3 Derivation relations

正の整数 n に対し, $\mathbb{Q}$-線形写像 $\partial_n : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を

$$\partial_n(x) = -\partial_n(y) = x(x+y)^{n-1}y$$

およびライプニッツ則

$$\partial_n(vw) = \partial_n(v)w + v\partial_n(w) \quad (v, w \in \mathfrak{H})$$

で定義する. このとき, 次が知られている.

定理 6 ([IKZ])**.** 任意の $n \geq 1$ に対し, $\partial_n(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

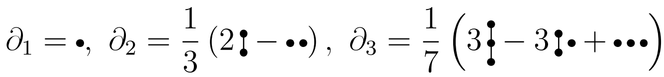
これを, MZV の導分関係式という.

幹のみからなる次数（点の個数）m の根付き木（およびそれに対応する根付き木写像）を λ_m とおく. たとえば,

$\lambda_1 =$ , $\lambda_2 =$ , $\lambda_3 =$ , $\lambda_4 =$

など. このとき, 以下の等式が成り立つ.

定理 7 ([BT2])**.** 任意の $n \geq 1$ に対し, $\partial_n = \dfrac{n}{2^n - 1} \displaystyle\sum_{d=1}^{n} \frac{(-1)^{d+1}}{d} \sum_{\substack{m_1 + \cdots + m_d = n \\ m_1, \ldots, m_d \geq 1}} \lambda_{m_1} \cdots \lambda_{m_d}$.

例 8. たとえば,  など.

この定理は, MZV の導分関係式は根付き木写像からくる関係式族に含まれることを示している.

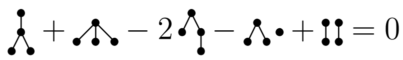
注意 1. さらなる考察として, 論文 [BT1] では, Henrik Bachmann と共同で, 根付き木写像からくる MZV の関係式族は MZV の川島関係式の線形部分と同じ族であることを示した.

4 Problems

根付き木写像の話はできたばかりで, いろんな課題が残っている. その一部を紹介する.

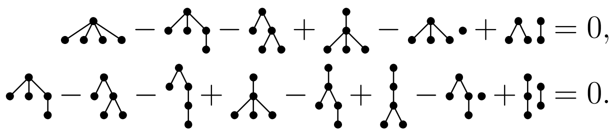
(1) 根付き木写像は MZV の間の全関係式族を与えてはいない. そこで, それを与えるように根付き木写像をうまく拡張できるか.

(2) 根付き木写像の間に関係式が成り立つことがわかっている. たとえば, 次数 4 の森に対応する根付き木写像について,



が成り立つ. 次数 4 ではこれが唯一の関係式だが, 次数 5 になると, 次の 4 つの関係式がなりたつ.

$$\bullet(\text{次数 4 の式の左辺}) = 0,$$
$$B_+(\text{次数 4 の式の左辺}) = 0,$$



このうち, はじめの 2 つは次数 4 のものからくる, いわば古い関係式であるが, あとの 2 つは低い次数のものからは来なさそうな, 新しい関係式と見ることができる. 根付き木写像の間の全関係式を与えることはできるだろうか.（これは純代数的な問題である.）

(3) 根付き木写像はそもそも Connes-Kreimer の根付き木 Hopf 代数に基づいて作られたものである. この写像たちは何か数理物理的な対象と密接に関連しているのか. たとえば, 周期 (periods) や振幅 (amplitudes) などとの関連が明確に説明できるか.

5 Rooted tree maps for MLV's

ここでは, 論文 [TW] に纏まりつつある結果をかいつまんで紹介する. r を正の整数とし, μ_r を 1 の r 乗根全体のなす群とする. A_r を $r+1$ 変数の非可換多項式環 $\mathbb{Q}\langle x, y_s \mid s \in \mu_r\rangle$ とする. $z = x + y_1$ および $z_s^\delta = x + \delta(s)y_s$ $(s \in \mu_r)$ とおく. ただし, δ は $\delta(1) = 0$

および $\delta(s)=0$ $(s\in\mu_r-\{1\})$ とする．MZV の場合と同様に，$w\in\mathcal{A}_r$ に対して，R_w は w を右からかける $\mathcal{A}_r$ 上の線形写像とし，R_w^{-1} をその（$\mathcal{A}_r w$ 上での）逆写像とする：$R_w^{-1}(vw)=v$ $(w,v\in\mathcal{A}_r)$．また，M も同様に，テンソル積を非可換積にする写像とする：$M(w\otimes v)=wv$ $(w,v\in\mathcal{A}_r)$．

空の森 $\mathbb{I}$ を $\mathcal{A}_r$ 上の恒等写像とみなすことにする．MZV の場合と同様に，$\mathcal{A}_r$ 上の根付き木写像を次のように定義できる．

定理 9. 任意の森 $f(\neq\mathbb{I})$ に対し，$\mathbb{Q}$-線形写像 $f:\mathcal{A}_r\to\mathcal{A}_r$ を，以下の 4 条件で定義することができる：

i) $f=\bullet$ のとき，$f(z_s^\delta)=z_s^\delta(z-z_s^\delta)$, $f(z)=0$,

i') $B_+(f)(z_s^\delta)=R_{z-z_s^\delta}R_{2z-z_s^\delta}R_{z-z_s^\delta}^{-1}f(z_s^\delta)$, $B_+(f)(z)=0$,

i") $f=gh$ $(g,h\neq\mathbb{I})$ のとき，$f(z_s^\delta)=g(h(z_s^\delta))$, $f(z)=0$,

ii) $f(wu)=M(\Delta(f)(w\otimes u))$.

ただし，$s\in\mu_r, w\in\mathcal{A}_r, u\in\{x,y_s\mid s\in\mu\}$.

$\mathcal{A}_r\supset\mathcal{A}_r^0:=\mathbb{Q}+\sum_{s\in\mu_r}x\mathcal{A}_ry_s+\sum_{\substack{s,t\in\mu_r\\ t\neq1}}y_t\mathcal{A}_ry_s$ とおく．$s\in\mu_r$ と $f\in\mathcal{H}_{\mathrm{CK}}$ に対して，$\psi_f^{(s)}=[f,R_{z_s^\delta}](=fR_{z_s^\delta}-R_{z_s^\delta}f)$ とおく．MZV の場合と同様に，森 f に対する根付き木写像 f の次数を，森 f のグラフの次数とする．また，$\deg(R_z)=1$ とおく．このとき，

定理 10. 空でない任意の森 f,g に対して，次が成り立つ．

(a) $s\in\mu_r$ によらない写像 ϕ_f が存在して，$\psi_f^{(s)}=R_{z-z_s^\delta}\phi_fR_{z_s^\delta}$.

(b) $f\left(\mathbb{Q}x+\sum_{s\in\mu_r}\mathbb{Q}y_s+\mathcal{A}_r^0\right)\subset\sum_{s\in\mu_r}x\mathcal{A}_ry_s+\sum_{\substack{s,t\in\mu_r\\ t\neq1}}y_t\mathcal{A}_ry_s$.

(c) $\phi_{B_+(f)}=f+R_z\phi_f$.

(d) $\phi_f\in\mathbb{Q}[R_z,t\mid t:\text{rooted trees}]_{\deg(f)-1}$.

(e) $[f,g]=0$.

(f) $f(wv)=M(\Delta(f)(w\otimes v))$ $(w,v\in\mathcal{A}_r)$.

(g) $f=gh$ のとき，$f(w)=g(h(w))$ $(w\in\mathcal{A}_r)$.

注意 2. $r=1$ のときは MZV の場合に帰着される．

$k\geq1, s\in\mu_r$ に対して $z_{k,s}=x^{k-1}y_s$ とおく．<u>多重 L 値</u>(multiple L-value, MLV) を割り当てる $\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathcal{L}:\mathcal{A}^0\to\mathbb{C}$ を $\mathcal{L}(1)=1$ および，$(k_1,s_1)\neq(1,1)$ に対して，

$$\mathcal{L}(z_{k_1,s_1}\cdots z_{k_n,s_n})=L(k_1,\ldots,k_n;s_1,\ldots,s_n)=\sum_{m_1>\cdots>m_n>0}\frac{s_1^{m_1-m_2}\cdots s_{n-1}^{m_{n-1}-m_n}s_n^{m_n}}{{m_1}^{k_1}\cdots{m_n}^{k_n}}$$

と定義する．（MLV については [AK] 参照.）また，τ を $\mathcal{A}_r$ 上の反自己同型で，$\tau(x)=y_1$, $\tau(y_1)=x$, $\tau(y_s)=-y_s$ $(s\neq1)$ とする．

定理 11. 任意の rooted tree map $f\,(\neq \mathbb{I})$ に対し, $\tau f \tau(\mathcal{A}_r^0) \subset \ker \mathcal{L}$.

注意 3. τ で共役を取ってあることに注意. 共役を取らないものも MLV の間の関係式を与えているかどうかは（$r=1$ の場合には MZV の双対公式が川島関係式の線形部分に含まれているという事実を用いれば肯定的に示せるが）一般にはまだわかっていない. 定理 7 の対応物については成り立つことが若林徳子（大阪電気通信大学）との共同研究の中で示されつつある.

謝辞　2019 年度 RIMS 共同研究「解析的整数論とその周辺」において講演の機会を下さいました鈴木正俊, 中村隆両氏に感謝いたします. 本研究は JSPS 科研費・基盤研究 (C)19K03434 の助成を受けております.

参考文献

[AK] T. Arakawa, M. Kaneko, *On multiple L-values*, J. Math. Soc. Japan 56(4) (2004), 967–991.

[BT1] H. Bachmann, T. Tanaka, *Rooted tree maps and Kawashima relations for multiple zeta values*, to appear in Kyushu J. Math.

[BT2] H. Bachmann, T. Tanaka, *Rooted tree maps and the derivation relation for multiple zeta values*, Intern. J. Num. Th. 14(10) (2018), 2657–2662.

[CK] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*, Commun. Math. Phys. 199 (1998), 203–242.

[H] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Alg. 194 (1997), 477–495.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. 142-02 (2006), 307–338.

[K] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Num. Th. 129 (2009) no.4, 755–788.

[T] T. Tanaka, *Rooted tree maps*, Comm. Num. Th. Phys. 13(2019), 647–666.

[TW] T. Tanaka, N. Wakabayashi, *Rooted tree maps for multiple L-values*, in preparation.