Riemann ゼータ関数の零点分布と素数に関する Dirichlet 多項式との関係

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 井上 翔太
Shōta Inoue
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1　導入と結果

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の零点分布と素数分布との関係は Riemann が発見した有名な事実である．そのため, Riemann ゼータ関数の零点分布は重要な研究対象として多くの数学者により研究がされている．良く知られている Riemann 予想も $\zeta(s)$ の零点分布に関する予想であり, その主張は $\zeta(s)$ の非自明な零点の実部が全て 1/2 であるというものである．一方で, 素数の深淵を理解するためには Riemann 予想の解決だけでは不十分なことも多く, 零点の虚部方向の分布についての理解も重要である．そのため, 零点の虚部の分布ついても多くの数学者によって研究がされている．ここで零点の虚部についての重要な公式として良く知られている Riemann-von Mangoldt の公式を紹介しよう．以下, $N(T)$ を $\zeta(s)$ の零点 $\rho = \beta + i\gamma$ で $0 < \gamma < T$ をみたすものの重複度も込めた個数とする．このとき, 次の公式が知られている．任意の $T > 0$ で零点の虚部とは一致しないものに対して,

$$N(T) = \pi^{-1} \arg \Gamma(1/4 + iT/2) - T \log \pi/2\pi + S(T) + 1 \tag{1.1}$$

が成り立つ．ただし, $S(T) = \pi^{-1} \operatorname{Im} \log \zeta(1/2 + iT)$ であり, Γ はよく知られたガンマ関数である．この公式により, Riemann ゼータ関数の対数関数の虚部 $S(T)$ について深く理解することができれば, $\zeta(s)$ の零点の虚部の分布について深く理解することができる．

ここで, いくつかの先行研究を紹介しよう．まず, von Mangoldt により得られた結果として $S(t) = O(\log t)$ という評価が知られている．この評価により, 零点の虚部の分布として十分大きな正の定数 C が存在して, 任意の $T \geq 5$, $C \leq h \leq \sqrt{T}$ に対して

$$N(T+h) - N(T) = \frac{h}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \tag{1.2}$$

という公式を得ることができる．特にこの公式からわかる自明な結論として零点の虚部を小さい方から数えて連続した組 $\gamma' \geq \gamma$ に対して, $\gamma' - \gamma = O(1)$ や零点 $\rho = \beta + i\gamma$ の重複度 $m(\rho)$ に対して $m(\rho) = O(\log |\gamma|)$ などの評価を得ることができる．この零点の間隔や重複度に関してはいくつかの予想が知られている．例えば, 全ての $\zeta(s)$ の零点は全て単純で

ある, つまり $m(\rho)$ は恒等的に 1 であることや Montgomery の pair correlation conjecture から導かれる不等式として

$$\limsup_{\gamma\to+\infty}\frac{\gamma'-\gamma}{\log\gamma}=+\infty,\quad \liminf_{\gamma\to+\infty}\frac{\gamma'-\gamma}{\log\gamma}=0$$

が予想されている. 現時点では重複度に関する評価 $m(\rho)=O(\log|\gamma|)$ は O-定数の最新の結果はあるものの関数オーダーとしては最良の評価である. この O-定数は Trudigian [15] により研究されている. また零点のギャップの評価 $\gamma'-\gamma=O(1)$ はより良い評価が知られており, 以下の不等式

$$\gamma'-\gamma=O\left(\frac{1}{\log\log\log|\gamma|}\right)$$

が Littlewood により証明されている ([13, Theorem 9.12] を参照).

さらに Riemann 予想を仮定した場合のこれらの研究も盛んに行われている. まず, Riemann 予想下の最も古典的な結果として Littlewood により $S(t)=O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)$ が証明されている. この評価により, 十分大きな定数 C が存在して, 任意の $T\geq 5$, $\frac{C}{\log\log T}\leq h\leq\sqrt{T}$ に対して, 公式 (1.2) を以下のように改良できる.

$$N(T+h)-N(T)=\frac{h}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right). \tag{1.3}$$

これから導かれる結果として Riemann 予想の仮定下では重複度の評価として $m(\rho)=O\left(\frac{\log\gamma}{\log\log\gamma}\right)$ や零点の間隔の評価として, $\gamma'-\gamma=O\left(\frac{1}{\log\log\gamma}\right)$ などを得ることができる. これらの評価は Riemann 予想下での評価として O-定数の研究を除くと現在でも最良である.

また, $S(t)$ や $\log\zeta(1/2+it)$ の O-定数を調べることは近年いくつかの発展があり, それらの研究は零点分布や Lindelöf 予想, Farmer-Gonek-Hughes 予想 [6] などらと関係することから重要な研究である. それらの研究は例えば [1], [2], [3], [4], [5], [7], [14], [15] などで確認できる.

以上のように関数 $S(t)=\pi^{-1}\operatorname{Im}\log\zeta(1/2+it)$ は $\zeta(s)$ の零点分布と深い関わりがある. 一方で, 筆者は $\operatorname{Re}\log\zeta(1/2+it)$ も $\zeta(s)$ の零点と関わっていると推測した. これは以下のことが理由である. まず, 簡単な複素関数論の定理として偏角の原理がある. この偏角の原理を用いることで, Riemann-von Mangoldt の公式を得ることができ, その結果として $S(t)$ と $\zeta(s)$ の零点分布は明確な関係をもつことがわかる. この事実を少し粗く説明をすると, Hadamard の因数分解定理により, $\log\zeta(s+it)$ は零点の周りで $\log(s-\rho)$ に近似され, その虚部の留数に対応するものと零点の個数が留数定理により関係をもつということで理解できる. 一方で, $\log(s-\rho)$ の実部は s が零点 ρ に近づくと発散するような特異点であり, 零点の寄与はその実部にこそ大きく影響する. この考察から, 筆者はその特異点の情報を取り出すことができれば零点の重複度や零点の間隔に対するより鋭い評価を得ることができるのではないかと期待したのである. このような背景から筆者はまず零点の情報と $\log\zeta(s)$ を深く結びつけるためのある公式を証明した. それが本稿の定理 2 である. そして, その公式を用いることで, 前述の特異点の情報と零点の重複度の間の関係を作ることに成功したのが本研究の成果である.

ここで, 主定理の正確な主張を述べるためにいくつかの記号を用意する. 以降, この講究録では以下の記号の定義に従う.

記号. 関数 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を面積が 1, つまり $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ であり, $[0,1]$ を台に持つ関数とする. さらに, f は $C^1([0,1])$ 関数である, もしくはある $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ があり, $C^{d-2}(\mathbb{R})$ かつ $C^d([0,1])$ 関数であるとする. また, 関数 u_f, v_f を $u_f(x) = f(\log(x/e))/x$, $v_f(y) = \int_y^\infty u_f(x)dx$ と定義する. 重み付き Dirichlet 多項式 $P_f(s)$ を

$$P_f(s, X) = \sum_{p \leq X^2} \frac{v_f(e^{\log p / \log X})}{p^s}$$

と定義する.

この記号の下で次の定理を得ることができる.

定理 1. Riemann 予想が正しいと仮定する. このとき, $t \geq 14$, $\log t \leq X \leq t$ に対して,

$$P_f(1/2 + it, X) = \log\left(\frac{\log\log t}{\log X}\right) \times (N(t + 1/\log X) - N(t - 1/\log X)) \tag{1.4}$$

$$+ \sum_{\frac{1}{\log X} < |t-\gamma| \leq \frac{1}{\log\log t}} \log(|t - \gamma| \log\log t) + O_f\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right). \tag{1.5}$$

特に, この公式と (1.3) により,

$$\max_{3 \leq X \leq t} \mathrm{Re}(P_f(1/2 + it, X)) \ll \frac{\log t}{\log\log t}, \tag{1.6}$$

$$\max_{3 \leq X \leq t} \mathrm{Re}(-P_f(1/2 + it, X)) \ll \log t, \tag{1.7}$$

$$\max_{3 \leq X \leq t} |\operatorname{Im} P_f(1/2 + it, X)| \ll \frac{\log t}{\log\log t} \tag{1.8}$$

を得る.

この公式は短区間中の零点の個数と素数に関する Dirichlet 多項式 $P_f(1/2 + it, X)$ を結ぶ公式である. この公式に現れる $\log\left(\frac{\log\log t}{\log X}\right)$ は $\log(s - \rho)$ の実部に対応するものである.

ここで, $P_f(1/2 + it, X)$ の実部や虚部に着目する. この $P_f(1/2 + it, X)$ の定義からその実部や虚部は p^{-it} の挙動により決定される. そして, p^{-it} は実部や虚部に偏りが無いことが予想されるので $P_f(1/2 + it, X)$ の実部や虚部の大きさに大きな差が無いことが予想される. この予想を正確に述べると次のようになる.

予想 1. 実数 $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ を取る. このとき,

$$\max_{14 \leq t \leq T} \max_{3 \leq X \leq t} \mathrm{Re}\, e^{-i\theta} P_f(1/2 + it, X) \asymp \max_{14 \leq t \leq T} \max_{3 \leq X \leq t} \mathrm{Re}\, e^{-i\theta'} P_f(1/2 + it, X).$$

この予想は上記の考察から成り立つことが大いに期待されるものであろう. さらに, 筆者は以下のような結果を得ることができている.

命題 1. 実数 $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ を取る．また, 実数 $a < b$ を取る．このとき, 任意の $(\log\log T)^{26} \le X \le T^{1/(\log\log T)^{26}}$ に対して,

$$\begin{aligned} &\mathrm{meas}\left\{t \in [T, 2T] \;\middle|\; \mathrm{Re}\, e^{-i\theta} P_f(1/2+it) \in [a,b]\right\} \\ &\qquad\qquad \sim \mathrm{meas}\left\{t \in [T, 2T] \;\middle|\; \mathrm{Re}\, e^{-i\theta'} P_f(1/2+it) \in [a,b]\right\} \quad (T \to +\infty) \end{aligned}$$

が成り立つ.

この結果は [9] の内容の一部, もしくは筆者の博士論文の内容の一部として公表する予定である．この命題から $P_f(1/2+it)$ の値分布は実部や虚部などの偏角の値に依らないことがわかる．従ってこの命題からも予想 1 は支持される.

次にこの予想 1 が導く興味深い結果を述べる．前述したが Riemann 予想の仮定の下では $m(\rho) \ll \frac{\log|\gamma|}{\log\log|\gamma|}$, が最良の現時点での最良の評価であり, これは Littlewood が約 100 年前に証明してから改良されていない．また, O-定数まで考慮した際の最良のとして, Goldston と Gonek [7] が次の評価を示している.

定理 (Goldston-Gonek, 2007)**.** Riemann 予想が正しいと仮定する．このとき,

$$m(\rho) \le \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)\frac{\log|\gamma|}{\log\log|\gamma|},$$
$$\gamma' - \gamma \le (\pi + o(1))\frac{1}{\log\log|\gamma|}$$

が成り立つ.

このことからも, 現時点では $m(\rho) = o\left(\frac{\log|\gamma|}{\log\log|\gamma|}\right)$ などの不等式を仮に Riemann 予想の仮定下であったとしても証明することは難しく, それに到達するための研究は重要である．そして, もし予想 1 が正しいとすると Riemann 予想の仮定下でこの重複度に関する不等式が証明できる．このことを以下で説明する.

まず, 等式 (1.4) の両辺の実部を取ることにより任意の $t \ge 14$, $\log t \le X \le t$ に対して,

$$\begin{aligned} &N(t + 1/\log X) - N(t - 1/\log X) \\ &\le \frac{1}{\log\left(\frac{\log X}{\log\log t}\right)} \mathrm{Re}(-P_f(1/2+it, X)) + O\left(\frac{1}{\log\left(\frac{\log X}{\log\log t}\right)}\frac{\log t}{\log\log t}\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

が成り立つ．また, 予想 1 が正しいとすると, 評価 (1.6), (1.8) により (1.7) は

$$\mathrm{Re}(-P_f(1/2+it, X)) \ll \frac{\log t}{\log\log t}$$

と改良できる．よってこの不等式を (1.9) に適応すると

$$N(t + 1/\log X) - N(t - 1/\log X) \ll \frac{1}{\log\left(\frac{\log X}{\log\log t}\right)}\frac{\log t}{\log\log t}$$

を得る. 従って, $X=t=\gamma$, とすると,

$$m(\rho) \le N(\gamma+1/\log\gamma) - N(\gamma-1/\log\gamma) \ll \frac{\log|\gamma|}{(\log\log|\gamma|)^2}$$

を得る. よって予想 1 は重要な帰結をもつ. そして筆者は現時点で予想 1 を証明することはできておらず, この予想を重要な未解決問題として提起したいのである.

また, 筆者は上記の研究を素数の分布のランダム性と零点の虚部方向の分布を結び付けた研究として興味深いと考えている. 少なくとも筆者は上記のような p^{-it} の分布と零点の分布に繋がりを指摘している専攻研究を見つけることはできておらず, その繋がりを初めて指摘できた研究だと考えている.

注意 1. Riemann 予想の仮定の下で, 零点の分布と Dirichlet 多項式

$$\sum_{p\le X} \frac{1}{p^{1/2+it}}$$

との関係性は Selberg の研究 [12] により, 半世紀以上前から既にわかっていたことに注意したい. 例えば, もし任意の $3 \le X \le t$ に対して評価

$$\sum_{p\le X} \frac{1}{p^{1/2+it}} \ll \sqrt{\log t \log\log t} \tag{1.10}$$

を証明することができれば Riemann 予想下で

$$m(\rho) \ll \sqrt{\log|\gamma| \log\log|\gamma|} \tag{1.11}$$

が得られることは Selberg の公式 [12, Theorem 1] により簡単にわかる. 一方で, ここでの筆者の主張は p^{-it} の分布が重複度の評価に影響を強く与えるというものであり, 上記のような Dirichlet 多項式そのものの評価と Selberg の公式から得られる重複度の評価とは異なっている. 実際に, 筆者の手法を用いることで評価 (1.10) と Riemann 予想下での Selberg の公式から得られる評価 (1.11) は

$$m(\rho) \ll \sqrt{\frac{\log|\gamma|}{\log\log|\gamma|}}$$

まで改善される. この事実のより詳しい記述及び証明は [8, Section 2.2] を参照して頂きたい.

2 主定理の証明の概略

定理 1 は次の $\log\zeta(s)$ に対する “modified hybrid formula” により得られる. 簡単のためここでは Riemann 予想を仮定した場合の結果を述べる. Riemann 予想を仮定しないより一般的な主張は [8, Theorem 1] を参照して頂きたい.

定理 2 (I., 2019+)**.** Riemann 予想が正しいと仮定する．このとき，任意の $t \geq 14$, $\log t \leq X \leq t$, $\sigma \geq 1/2$ に対して，

$$\log\zeta(\sigma+it) = P_f(\sigma+it) + \sum_{|s-\rho|\leq \frac{1}{\log X}} \log((s-\rho)\log X) + O_f\left(X^{1/2-\sigma}\frac{\log t}{\log\log t}\right).$$

本稿ではこの定理を用いた定理 1 の証明を書く．

定理 1 の証明. 実数 $t \geq 14$, $\log t \leq X \leq t$ を取る．このとき，Riemann 予想下で成り立つ公式として

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|t-\gamma|\leq 1/\log\log t} \frac{1}{s-\rho} + O\left(\log t\right) \tag{2.1}$$

が知られている ([11, Lemma 13.20] を参照)．この両辺を積分することで

$$\begin{aligned}\log\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) - \log\zeta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log\log t}+it\right)&\\ = \sum_{|t-\gamma|\leq \frac{1}{\log\log t}} \log\left(|t-\gamma|\log\log t\right) + O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)&\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．さらに Riemann 予想下で成り立つ評価 ([11, (13.44)] を参照)

$$\log\zeta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\log\log t}+it\right) \ll \frac{\log t}{\log\log t}$$

を用いることで

$$\begin{aligned}&P_f(1/2+it, X)\\ &= \sum_{|t-\gamma|\leq \frac{1}{\log\log t}} \log\left(|t-\gamma|\log\log t\right) - \sum_{|t-\gamma|\leq \frac{1}{\log X}} \log\left(|t-\gamma|\log X\right) + O_f\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right)\\ &= \log\left(\frac{\log\log t}{\log X}\right) \times \sum_{|t-\gamma|\leq \frac{1}{\log X}} 1 + \sum_{\frac{1}{\log X}<|t-\gamma|\leq \frac{1}{\log\log t}} \log\left(|t-\gamma|\log\log t\right)\\ &\qquad + O_f\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right).\end{aligned}$$

を得る． □

謝辞

この講究録は 2019 年度 RIMS 研究集会で筆者が発表した内容に基づくものである．その発表を快く受け入れて頂いた研究集会代表者である鈴木正俊先生，そして副代表者である中村隆先生にこの場を借りて深くお礼申し上げます．

参考文献

[1] J. Bourgain, Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta-function, *J. Amer. Math. Soc.* **30** (2017), 205–224.

[2] E. Carneiro, V. Chandee, and M. B. Milinovich, Bounding $S(t)$ and $S_1(t)$ on the Riemann Hypothesis, *Math. Ann.* **356** (2013), 939–968.

[3] E. Carneiro, V. Chandee, and M. B. Milinovich, A note on zeros of zeta and L-functions, *Math. Z.* **281** (2015), 315–332.

[4] E. Carneiro, A. Chirre, and M. B. Milinovich, Bandlimited approximations and estimates for the Riemann zeta-function, *Publ. Math.* **63** (2019), 601–661.

[5] V. Chandee and K. Soundararajan, Bounding $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$ on the Riemann hypothesis, *Bull. London Math. Soc.* **43** (2011) 243–250.

[6] D. W. Farmer, S. M. Gonek, and C. P. Hughes, The maximum size of L-functions, *J. Reine Angew. Math.* **609** (2007), 215–236.

[7] D. A. Goldston and S. M. Gonek, A note on $S(t)$ and the zeros of the Riemann zeta-function, *Bull. London Math. Soc.* **39** (2007) 482–486.

[8] S. Inoue, On the logarithm of the Riemann zeta-function and its iterated integrals, preprint, `arXiv:1909.03643`.

[9] S. Inoue and J. Li, Joint central limit theorems for L-functions and its large deviations, preparation.

[10] J. E. Littlewood, On the zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **22** (1924), 295–318.

[11] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University press, 2007.

[12] A. Selberg, On the remainder formula for $N(T)$, the Number of Zeros of $\zeta(s)$ in the Strip $0 < t < T$. Avhandl. Norske Vid.-Akad. Olso I. Mat.-Naturv. Kl., no.1; Collected Papers, Vol. 1, New York: Springer Verlag. 1989, 179–203.

[13] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Second Edition, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[14] T. S. Trudgian, An improved upper bound for the argument of the Riemann zeta-function on the critical line, *Math. Comp.* **81** (2012), no. 278, 1053–1061.

[15] T. S. Trudgian, An improved upper bound for the argument of the Riemann zeta-function on the critical line II, *J. Number Theory* **134** (2014), 280–292.