# Riemann ゼータ関数の対数関数の積分の値分布について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 遠藤健太
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

## 1 導入と主結果

この研究は, 名古屋大学の博士後期課程の井上翔太氏との共同研究である. Riemann ゼータ関数を $\zeta(s)$ で表す. Riemann ゼータ関数の値分布に関して, 任意に固定された $1/2 < \sigma \leq 1$ に対して, 集合 $\{\zeta(\sigma+it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ において稠密になることはよく知られた定理である. この定理は, 1914 年に Bohr と Courant [2] によって証明された. 後に, 1916 年に Bohr [1] によりこの定理が $\log\zeta(\sigma+it)$ に対しても成り立つことが証明されている. 前者の結果は, 後者の結果から直ちに従うことに注意しておく.

まずは, このような集合 $\{\zeta(\sigma+it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ の複素平面上の稠密性の結果に関して, ほかにどのような結果が知られているかを紹介する. $\sigma > 1$ に関しては, よく知られているように Riemann ゼータ関数 $\zeta(\sigma+it)$ は絶対収束するので, その値の集合は有界となり複素平面上では稠密にならないことがわかる. $\sigma < 1/2$ に関しては, Garunkštis と Steuding [4] により, Riemann 予想の仮定の下で, 集合 $\{\zeta(\sigma+it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は複素平面上で稠密にならないことが証明されている.

さて, 臨界線上については次の問題が未解決問題として知られている.

**問題 1.** 集合 $\{\zeta(1/2+it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は複素平面上で稠密になるか.

この問題は, おそらく Ramachandra が 1979 年のある集会で提起したと Kowalski と Nikeghbali の論文 [7] に書かれている. Kowalski と Nikeghbali は同論文において興味深い結果を与えている. 彼らは, ランダム行列理論に基づくある強い仮定の下で集合 $\{\zeta(1/2+it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は複素平面上で稠密になることを証明している. この結果から, 問題 1 の真偽は真であるように思える. 一方で, Garunkštis と Steuding [4] により集合 $\{((\zeta(1/2+it), \zeta'(1/2+it))) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}^2$ 上で稠密にならないという結果が示されており, この結果からは, 問題 1 の真偽は偽であるようにも思える. このように, 現状では問題 1 の真偽を予想することすら困難であるように思う.

今回, 筆者らはこの問題に関係する新しい結果を得ることができたのでこれを報告する. 任意の $m \in \mathbb{N}$ と $t > 0$ に対して, 関数 $\eta_m(s)$ を

$$\eta_m(\sigma+it) = \int_0^t \eta_{m-1}(\sigma+it')dt' + c_m(\sigma)$$

で定義する. ただし,

$$\eta_0(\sigma+it) = \log\zeta(\sigma+it),$$
$$c_m(\sigma) = \frac{i^m}{(m-1)!}\int_\sigma^\infty (\alpha-\sigma)^{m-1}\log\zeta(\alpha)d\alpha.$$

とする. 簡潔に言うと, $\eta_m(\sigma+it)$ は $\log\zeta(\sigma+it)$ を虚部方向に反復積分した関数である. また, $\eta_m(\sigma+it)$ は広義積分となる. 正確な定義は [5] を見よ. このとき, 次の定理が成り立つ.

**定理 1.1.** 任意に $1/2 \leq \sigma < 1$ をとる. もし $\beta > \sigma$ を満たす零点 $\rho = \beta + i\gamma$ の個数が有限だとすると, 集合

$$\left\{ \int_0^t \log\zeta(\sigma+it')dt' \;\middle|\; t \in [0,\infty) \right\}$$

は複素平面上で稠密となる. さらに, 任意の整数 $m \geq 2$ に対して, 次の主張が同値となる.

(I) Riemann ゼータ関数は, 実部が $\sigma$ より大きい零点を持たない.
(II) 集合 $\{\eta_m(\sigma+it) \mid t \in [0,\infty)\}$ は複素平面上で稠密となる.

この結果から, 特に Riemann 予想の仮定の下で, 集合

$$\left\{ \int_0^t \log\zeta(1/2+it')dt' \;\middle|\; t \in [0,\infty) \right\}$$

は複素平面上で稠密となることが示される. この結果は, 問題 1 の答えが真であることを示唆する結果の一つになるのではないかと筆者らは考えている.

また, 今回の研究の過程で $\log\zeta(\sigma+it)$ を実軸方向に反復積分した関数についての結果も得られたのでそれについて報告する. 関数 $\tilde{\eta}_m(\sigma+it)$ を

$$\tilde{\eta}_m(\sigma+it) = \int_\sigma^\infty \tilde{\eta}_{m-1}(\alpha+it)d\alpha,$$

で定義する. ただし, $\tilde{\eta}_0(\sigma+it) = \log\zeta(\sigma+it)$ とする. このとき, 次が成り立つ.

**定理 1.2.** 任意に $1/2 \leq \sigma < 1$ と自然数 $m$ を固定する. また, 任意の $T_0 > 0$ をとる. このとき, 集合

$$\{\tilde{\eta}_m(\sigma+it) \mid t \in [T_0,\infty)\}$$

は, 複素平面上で稠密となる.

セクション 2 で証明の概略を述べる．その後の研究で定理 1.2 に関して, 確率論の弱収束を用いてより精密な結果を証明することができたので, セクション 3 ではそれについてと今できていることなどを述べることにする．

# 2　証明の概略

関数 $\eta_m(s)$ と $\tilde{\eta}_m(s)$ は, 次の公式で結ばれる．

**補題 2.1.** $m$ を正の整数とし, $t>0$ とする．このとき, 任意の $\sigma \geq 1/2$ に対して,

$$\eta_m(\sigma+it) = i^m \tilde{\eta}_m(\sigma+it) + 2\pi \sum_{k=0}^{m-1} \frac{i^{m-1-k}}{(m-k)!k!} \sum_{\substack{0<\gamma<t \\ \beta>\sigma}} (\beta-\sigma)^{m-k}(t-\gamma)^k. \tag{1}$$

が成り立つ．

この補題は Littlewood の補題から導かれる．詳しい証明は, [5] を見よ．この結果を用いることで, $\eta_m(s)$ に関する結果は $\tilde{\eta}_m(s)$ の結果から導かれるので, まずは定理 1.2 の証明から始める．

## 2.1　定理 1.2 の証明の概略

任意の $\sigma \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_1(\sigma+it) &= \int_\sigma^\infty \log\zeta(\alpha+it)d\alpha \\
&= \int_\sigma^\infty \sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^{\alpha+it}}\right)^{-1} d\alpha \\
&= \sum_p \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \int_\sigma^\infty \frac{1}{p^{k(\alpha+it)}} d\alpha = \sum_p \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \left[-\frac{1}{kp^{k(\alpha+it)}\log p}\right]_{\alpha=\sigma}^\infty \\
&= \sum_p \frac{1}{\log p} \sum_{k=1}^\infty \frac{(p^{-(\sigma+it)})^k}{k^2} \\
&= \sum_p \frac{\mathrm{Li}_2(p^{-\sigma-it})}{\log p}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし, $\mathrm{Li}_m(z)$ は多重対数関数と呼ばれる関数で $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^m}$ で定義されるものである．また, $\sigma=1$ のときの収束性は

$$\sum_p \frac{1}{p\log p} < \infty$$

から従う．この計算を繰り返すことにより, 任意の自然数 $m$ と $\sigma \geq 1$ に対して,

$$\tilde{\eta}_m(\sigma + it) = \sum_p \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma-it})}{(\log p)^m} \tag{2}$$

を得る．上の公式は, $1/2 \leq \sigma < 1$ の範囲に関しては成り立たないが, $\tilde{\eta}_m(s)$ は上式の右辺の級数を有限和で切った形の Dirichlet 多項式で近似することができる．その公式を用いると以下の命題を証明することができる．

**命題 2.2.** 任意に自然数 $m$ を固定する．このとき, 任意の $\sigma \geq 1/2$, $T \geq X^{135}$, $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas} \left\{ t \in [0, T] \;\middle|\; \left| \tilde{\eta}_m(\sigma + it) - \sum_{p \leq X} \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma-it})}{(\log p)^m} \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

が成り立つ．ただし, 記号 $\mathrm{meas}(\cdot)$ は 1 次元 Lebesgue 測度を表す．

この命題は, 本質的には [5] で証明がされている．証明は省略するが, それについて少しコメントしておく．この証明には, 零点密度定理を用いるのだが, $\sigma > 1/2$ のときだけでなく臨界線上まで含めて議論しようとすると Selberg の論文 [8] にあるような議論をする必要が出てくる．そこでは, ある $c > 0$ と $A < m + 1$ が存在して,

$$N(\sigma, T) \ll T^{1-c(\sigma-1/2)}(\log T)^A$$

が任意の $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ に対して成り立つという強い形の零点密度が本質的に必要となる．一方で $\sigma > 1/2$ のときのみの議論であれば, ここまで強い形の零点密度定理を用いずとも証明することができる．

命題 2.2 により, $\tilde{\eta}_m(s)$ は (2) の級数を有限和で切った形の Dirichlet 多項式で近似することができることが分かったので, 稠密性を証明するには $\tilde{\eta}_m(s)$ を近似する Dirichlet 多項式が任意の複素数を近似することを証明すれば良い．これに関しては, 次の補題が成り立つ．

**命題 2.3.** 任意に自然数 $m$ と $1/2 \leq \sigma < 1$ を固定する．$a$ を任意の複素数, $\varepsilon$ を任意の正の実数とする．十分大きい $N_0 = N_0(m, \sigma, a, \varepsilon)$ をとる．このとき, 任意の $N \geq N_0$ に対して, ある Jordan 可測な集合 $\Theta_0 = \Theta_0(m, \sigma, a, \varepsilon, N) \subset [0, 1)^{\pi(N)}$ で $\mathrm{meas}(\Theta_0) > 0$ となるものが存在して,

$$\left| \sum_{p \leq N} \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} \exp(-2\pi i \theta_p))}{(\log p)^m} - a \right| < \varepsilon.$$

が任意の $\underline{\theta} = (\theta_{p_n})_{n=1}^{\pi(N)} \in \Theta_0$ に対して成り立つ．この命題についても, 証明は省略する．

以下, この二つの命題 2.2 と命題 2.3 を用いて, 定理 1.2 がどのように導かれるかを概説する. 任意に自然数 $m$ と $\varepsilon > 0$ を固定する. 任意に複素数 $a$ を取る. $X > 0$ と $N > 0$ に対して, 集合 $\mathcal{A}_T^X$ と $\mathcal{B}_T^N$ を

$$\mathcal{A}_T^X = \left\{ t \in [0,T] \;\middle|\; \left| \tilde{\eta}_m(\sigma + it) - \sum_{p \le X} \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma - it})}{(\log p)^m} \right| < \varepsilon \right\}$$

$$\mathcal{B}_T^N = \left\{ t \in [0,T] \;\middle|\; \left| \sum_{p \le N} \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma - it})}{(\log p)^m} - a \right| < \varepsilon. \right\}.$$

で定義する. 命題 2.3 より, $N$ が十分大きいとき, ある $\delta = \delta(m, \sigma, a, \varepsilon)$ が存在して,

$$\mathrm{meas}(\mathcal{B}_T^N) > \delta T$$

が十分大きい $T$ に対して成り立つ. また, 命題 2.2 より, $X \ge N$ が十分大きいとき,

$$\mathrm{meas}(\mathcal{A}_T^X) > (1 - \delta/2)T$$

が十分大きい $T$ に対して成り立つ. これらより, $\mathcal{A}_T^X \cap \mathcal{B}_T^N \ne \emptyset$ が十分大きい $T$ に対して成り立つことがわかる. よって, $T$ が十分大きいとき, ある $t_0 \in \mathcal{A}_T^X \cap \mathcal{B}_T^N$ が存在して,

$$\begin{aligned}
&|\tilde{\eta}_m(\sigma + it_0) - a| \\
&\le \left| \tilde{\eta}_m(\sigma + it_0) - \sum_{p \le X} \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} e^{-it_0 \log p})}{(\log p)^m} \right| \\
&\quad + \left| \sum_{p \le N} \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} e^{-it_0 \log p})}{(\log p)^m} - a \right| \\
&\quad\quad + \left| \sum_{N < p \le X} \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} e^{-it_0 \log p})}{(\log p)^m} \right| \text{“}<\text{”} 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 最後の項の不等式は “ほとんどすべて” の $t \in [0,T]$ に対して,

$$\left| \sum_{N < p \le X} \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma} e^{-it_0 \log p})}{(\log p)^m} \right| < \varepsilon$$

が成り立つことを示す必要があるが, これは省略する.

## 2.2 定理 1.1 の証明の概略

$m = 1$ のとき, 公式 (1) の右辺の第二項は $t$ が十分大きいときに定数となる. これと定理 1.2 により, 主張が成り立つ. $m \ge 2$ のとき, (I) $\Rightarrow$ (II) を示す. Riemann ゼータ関数

は, 実部が $\sigma$ より大きい零点を持たないとする. このとき, 公式 (1) の右辺の第二項は

$$2\pi \sum_{k=0}^{m-1} \frac{i^{m-1-k}}{(m-k)!k!} \sum_{\substack{0<\gamma<t \\ \beta>\sigma}} (\beta-\sigma)^{m-k}(t-\gamma)^k = 0$$

となる. これと定理 1.2 により主張が成り立つ. (II) $\Rightarrow$ (I) を対偶で示す. Riemann ゼータ関数が実部が $\sigma$ より大きい零点を持つとする. このとき, 十分大きい $t$ に対して,

$$2\pi \sum_{k=0}^{m-1} \frac{i^{m-1-k}}{(m-k)!k!} \sum_{\substack{0<\gamma<t \\ \beta>\sigma}} (\beta-\sigma)^{m-k}(t-\gamma)^k \gg t^{m-1}.$$

が成り立つ. この公式と [5] にある $\tilde{\eta}_m(s) = O_m(\log t)$ という評価を用いることで, 十分大きな $t$ に対して,

$$|\eta_m(\sigma+it)| \gg t^{m-1}$$

が成り立つことがわかる. これより, ある $T_0 > 0$ が存在して, 任意の $t > T_0$ に対して

$$|\eta_m(\sigma+it)| > 1$$

が成り立つことがわかる. よって,

$$\overline{\{\eta_m(\sigma+it) \mid t \in [T_0, \infty)\}} \subset \mathbb{C} \setminus \{z \mid |z| \leq 1\}$$

が成り立つ. ただし, $\overline{A}$ は $A$ の閉包を表す. しかし, $\mu_2\left(\overline{\{\eta_m(\sigma+it) \mid t \in [0, T_0]\}}\right) = 0$ なので,

$$\{z \mid |z| \leq 1\} \not\subset \overline{\{\eta_m(\sigma+it) \mid t \in [0, T_0]\}}$$

となり, $\overline{\{\eta_m(\sigma+it) \mid t \in [0, \infty)\}}$ は複素平面上で稠密とならないことがわかる. ただし, $\mu_2$ は 2 次元 Lebesgue 測度を表す. 以上より, 主張が示された.

## 3　確率論の弱収束の議論を用いた定理 1.2 の精密化について

冒頭で紹介した Riemann ゼータ関数の値の稠密性に関する結果は, 確率論の弱収束の議論を用いてより精密化できることが知られている. これは, Bohr-Jessen の極限定理 [3] と呼ばれているものである. $\tilde{\eta}_m(s)$ に対しても, この定理に相当する結果が得られたのでここで報告する.

まずは, 定義から始める. $m$ を正の整数, $T > 0$ とする. $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度 $\varphi_{m,T}$ を

$$\varphi_{m,T}(A) = \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left(\{t \in [0,T] \mid \tilde{\eta}_m(\sigma+it) \in A\}\right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

で定義する．ただし, $\mathcal{B}(X)$ は集合 $X$ の Borel 集合族を表す．次に, $\mathcal{P}$ を素数全体の集合とし, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおく．$\mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ は, コンパクトハウスドルフ群なので, ある $(\mathbb{T}^{\mathcal{P}}, \mathcal{B}(\mathbb{T}^{\mathcal{P}}))$ 上の Haar 測度 $\mathbf{m}$ で $\mathbf{m}(\mathbb{T}^{\mathcal{P}}) = 1$ となるものが存在する．また, 任意の $\omega = (\omega(p))_{p\in\mathcal{P}} \in \mathbb{T}^{\mathcal{P}}$ に対して,

$$\tilde{\eta}_m(\sigma, \omega) = \sum_p \frac{\mathrm{Li}_{m+1}(p^{-\sigma}\omega(p))}{(\log p)^m}$$

とする．これらを用いて, $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度 $\varphi_m$ を

$$\varphi_m(A) = \mathbf{m}\left(\left\{\omega \in \mathbb{T}^{\mathcal{P}} \mid \tilde{\eta}_m(\sigma, \omega) \in A\right\}\right), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}) \tag{3}$$

と定義する．このとき, 次が成り立つ．

**定理 3.1.** $m$ を正の整数とし, $1/2 \leq \sigma < 1$ とする．このとき, $T \to \infty$ としたとき , $\varphi_{m,T}$ は $\varphi_m$ に弱収束する．また, $\varphi_{m,T}$ の台は $\mathbb{C}$ に一致する．

証明には, 確率測度の Fourier 変換を用いる．証明は, 省略する．

現在, 東京工業大学の博士後期課程の峰正博氏と共同でさらなる確率論的な精密化の研究をすすめており, (3) が確率密度関数を持つことや [6] に相当するようなその性質については研究が終わっている．今後, ディスクレパンシーや大偏差原理などの研究を進めていく予定である．

## 参考文献


[1] H. Bohr, Zur Theorie der Riemann'schen Zeta-funktion im kritischen Streifen, *Acta Math.* **40** (1916), 67–100.

[2] H. Bohr and R. Courant, Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximationen auf die Riemannsche Zetafunktion, *J. Reine Angew. Math.* **144** (1914), 249–274.

[3] H. Bohr and B. Jessen, Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Erste Mitteilung, *Acta Math.* **54** (1930), 1–35; Zweite Mitteilung, ibid. **58** (1932), 1–55.

[4] R. Garunkštis and J. Steuding, On the roots of the equation $\zeta(s) = a$, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **84** (2014), 1–15.

[5] S. Inoue, On the logarithm of the Riemann zeta-function and its iterated integrals, preprint, `arXiv:1909.03643`.

[6] B. Jessen and A. Wintner, Distribution functions and The Riemann zeta function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **38** (1935), no. 1, 48–88.

[7] E. Kowalski and A. Nikeghbali, Mod-Gaussian convergence and the value distribution of $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ and related quantities, *J. London Math. Soc.* (2) **86** (2012), 291–319.

[8] A. Selberg, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, Avhandl. Norske Vid.-Akad. Olso I. Mat.-Naturv. Kl., no.1; Collected Papers, Vol. 1, New York: Springer Verlag. 1989, 214–280.