負型連分数の統計的性質

筑波大学　伊藤 弘明
Hiroaki Ito
University of Tsukuba

1　導入

ここでは集会で述べた結果の解説及びその後いくつかの課題を解決できたので, それを報告する. 先ず, $N-$連分数を紹介する. N を 0 でない整数とする. このとき,

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]_N := a_0 + \cfrac{N}{a_1 + \cfrac{N}{a_2 + \cfrac{N}{a_3 + \cdots}}} \tag{1}$$

という形の表現を $N-$ 連分数という. a_i たちを部分商 (partial quotient) または digits と呼ぶ. $N \geq 1$ のとき $a_i \geq N$（$N \leq -1$ のとき $a_i \geq |N| + 1$）と仮定すると, 無理数 x に対して, この表現 $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$ は一意的である. 今, 変換 $T_N : [0,1) \to [0,1)$ を

$$T_N(x) := \frac{N}{x} - \left\lfloor \frac{N}{x} \right\rfloor, x \neq 0; \quad T_N(0) := 0$$

と定義する. ここで, $a_0 := 0, N \geq 1;\ 1, N \leq -1$, $n \geq 1$ に対して,

$$a_n := \left\lfloor \frac{N}{T_N^{n-1}(x)} \right\rfloor, N \geq 1; \quad -\left\lfloor \frac{N}{T_N^{n-1}(1-x)} \right\rfloor, N \leq -1,$$

とおくと, 任意の無理数 x に対して, $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots]_N$ を得る. 変換 T_N の不変測度は知られており, その測度に関して力学系 $([0,1), \mathfrak{B}, \mu_N, T_N)$ は ergodic であることが知られている. ここで, $\mathfrak{B}$ はルベーグ可測集合全体であり, $A \in \mathfrak{B}$ に対し,

$$\mu_N(A) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log \frac{N+1}{N}} \displaystyle\int_A \frac{dx}{N+x}, & \text{if } N \in \mathbb{Z} \setminus \{0, -1\}, \\ \displaystyle\int_A \frac{dx}{1-x}, & \text{if } N = -1. \end{cases}$$

と書ける.

特に, $N = 1$ のときは Birkhoff のエルゴード定理から以下が得られる.

Theorem 1.1. 連分数展開 $[0; a_1, a_2, \cdots]_1$ を持つ *a.e.* $x \in [0,1)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{1 \leq i \leq n; a_i = k\} = \frac{1}{\log 2} \log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) \quad \textit{for each } k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{k-1}{\log 2}}\right)^{-1}=1.74\cdots, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\log k}{\log 2}}=2.68\cdots, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\infty. \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=-\frac{\pi^2}{6\log 2} \tag{5}$$

が成り立つ．ここで, $p_n/q_n=[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_n]_1$ である．

$N\neq -1$ のときは同様の式が得られるが, $N=-1$ のときは, 不変測度が無限であるため Birkhoff のエルゴード定理を適用することができない．なので, 上記の式の $N=-1$ に対応するものに興味が生じる．$[a_0;a_1,a_2,\cdots]_{-1}$ は Backward 連分数や負型連分数（negative continued fraction）などと呼ばれることがある．K. Dajani と C. Kraaikamp は正則連分数と負型連分数との関係式

$$[0;a_1,a_2,\cdots]_1=[1;\underbrace{2,\cdots,2}_{(a_1-1)\text{ times}},a_2+2,\cdots,\underbrace{2,\cdots,2}_{(a_{2k-1}-1)\text{ times}},a_{2k}+2,\cdots]_{-1}. \tag{6}$$

を使うことで, 以下の定理を得た [6].

Theorem 1.2. $x=[1;a'_1,a'_2,\cdots]_{-1}\in[0,1)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a'_1a'_2\cdots a'_n}=2 \quad a.e.$$

算術平均については, $N=a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}+j$, $0\leq j<a_{2k-1}$ とすると (6) より,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}a'_n=2+\frac{\sum_{i=1}^{k}a_{2i}}{\sum_{i=1}^{k}a_{2i-1}+j}. \tag{7}$$

と書け, これが 3 に測度収束することを示したが, この結果はすでに知られていた [4]. その後, 相加平均の上極限は ∞, 下極限が 2 であることも示すことができたが, これもまた既知の結果であった [5]. 幸いなことに自身の証明は知られているものとは異なり, より直感的である．この証明については, §2 で概説する．

また, $x=[1;a'_1,a'_2,\cdots]_{-1}\in[0,1)$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{P_n}{Q_n}\right|=0 \quad \text{a.e.}.$$

を示した．ここで, $P_n/Q_n=[1;a'_1,a'_2,\cdots,a'_n]_{-1}$ である．0 への収束の速度に関して, 発表時は分からなかったが,

$$\frac{\log n}{n}\log\left|x-\frac{P_n}{Q_n}\right|\to-\frac{\pi^2}{3} \quad \text{in measure.}$$

であることを示すことができた．これについては, §3 で概説する．さらに, これの上極限と下極限も求めることができた.

2　負型連分数の部分商 a'_i の算術平均

この § では, 以下の定理の別証明を述べる [4], [5].

Proposition 2.1 (J. Aaronson, H. Nakada)**.** $[1; a'_1, a'_2, \cdots]_{-1}$ を $x \in [0, 1)$ の負型連分数展開とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\{x \ : \ \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a'_k - 3 \right| > \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つ. すなわち, 算術平均は 3 に測度収束する. しかし, 概収束はせず,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a'_k = 2, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a'_k = \infty \quad a.e.$$

である.

$N = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1} + j$, $0 \le j < a_{2k-1}$ とおく. このとき, (6) より,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a'_n = 2 + \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{2i}}{\sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} + j}. \tag{8}$$

[1] を注意深く見れば, 以下の主張が成立することがわかる.

Theorem 2.1. 関数 $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を狭義単調増加関数とする. このとき, $x = [0; a_1, a_2, \cdots]_1 \in [0, 1)$ に対して,

$$\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n} a_{\Lambda(k)} \to \frac{1}{\log 2} \quad \textit{in measure}$$

が成り立つ.

さらに, [1] の中のアイデアを使って,

$$\frac{j}{k\log k} \to 0 \quad \text{in measure.}$$

を示すことができる. 測度収束に関する以下の性質から, 相加平均が 3 に測度収束することが示される.

Proposition 2.2. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする. a_n, $b_n : X \to \mathbb{R}_{>0}$ を可測関数とし, a, b を正の定数とする. このとき, $a_n \to a$, $b_n \to b$ *in measure* ならば, 以下が成立する.

$$(a) \quad a_n + b_n \to a + b \quad \textit{in measure,}$$
$$(b) \quad a_n b_n \to ab \quad \textit{in measure,}$$
$$(c) \quad a_n / b_n \to a/b \quad \textit{in measure.}$$

Borel-Bernstein Theorem の証明 [8] と同様にして以下の主張を示すことができる.

Proposition 2.3 (Borel-Bernstein)**.** 関数 $\varphi : \mathbb{N} \to (0,\infty)$ に対して,

$$\mathcal{W}_\varphi = \{x = [1; a'_1, a'_2, \cdots]_{-1} \in (0,1) : a'_n > \varphi(n) \textit{ for infinitely many } n \in \mathbb{N}\}$$

とおく. このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\varphi(n)$ が発散するならば,

$$\lambda(\mathcal{W}_\varphi^c) = 0.$$

Proposition 2.3 より,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a'_i = \infty \quad a.e.$$

を得る. さらに, $T_1(x) = [0; a_2, a_3, \cdots]_1$ であるから,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a'_i(T_1(x)) = 2 + \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{2i+1}}{\sum_{i=1}^{k} a_{2i} + j}$$

と書ける. ここで, $N = a_2 + a_4 + \cdots + a_{2k} + j$, $0 \le j < a_{2k+2}$. ゆえに,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{2i}}{\sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} + j} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{2i}}{\sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} + a_{2k+1} - 1} \le \liminf_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} a_{2i}}{\sum_{i=1}^{k} a_{2i+1}} = 0 \quad a.e.$$

となり, Proposition 2.1 の証明が完了する.

今, $x = [1; a'_1, \cdots, a'_n, \cdots]_{-1} (= [0; a_1, \cdots, a_n, \cdots]_1)$ に対して, 一般化平均 $M_{p,n}(x)$ を

$$M_{p,n}(x) := \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k'^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義する. $\lim_{p\to 0} M_{p,n} = \sqrt[n]{a'_1 a'_2 \cdots a'_n}$, $\lim_{p\to\infty} M_{p,n} = \max\{a_i\}_{i=1,\cdots n}$, や $p < q$ のとき $M_{p,n}(x) \le M_{q,n}(x)$ であることに注意すると, 以下の表を得が得られる:

	$p < 1$	$p = 1$	$1 < p < \infty$	$p \to \infty$
$\lim_{n\to\infty} M_{p,n}(x)$	2	3	?	∞
type of convergence	a.e.	in measure	?	a.e.

ただし, $p \to \infty$ の場合は, $\lim_{n\to\infty}\lim_{p\to\infty} M_{p,n}(x)$ であることに注意. $1 < p < \infty$ の場合については, 例えば $p = 2$ のとき,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} a_k'^2 = 2^2 + 2^2 \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_{2i}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} + j} + \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_{2i}^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} + j}$$

となるが, 最後の項が測度収束するかどうかが分からなかった. 下極限も分からない.

3 負型連分数の近似の悪さ

$p_n/q_n = [0; a_1, a_2, \cdots, a_n]_1$, $P_n/Q_n = [1; a'_1, a'_2, \cdots, a'_n]_{-1}$ とおく.

Lemma 3.1. 任意の $x = [0; a_1, a_2, \cdots]_1 = [1; a'_1, a'_2, \cdots]_{-1} \in [0, 1)$ に対して, 整数 $N > 0$ が十分大きければ, $N = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1} + j$, $0 \le j < a_{2k+1}$ と書ける. このとき,

$$Q_N = q_{2k-1} + (j+1)q_{2k},$$
$$\frac{1}{Q_N Q_{N-1}} < \left| x - \frac{P_{N-1}}{Q_{N-1}} \right| < \frac{1}{Q_{N-1}(Q_N - Q_{N-1})}.$$

が成り立つ.

Proof. 先ず, $Q_{a_1-1} = q_1, Q_{a_1} = q_1 + q_2$ であることが確かめられる.

$$Q_{a_1+\cdots+a_{2k-1}-1} = q_{2k-1}, \quad Q_{a_1+\cdots+a_{2k-1}} = q_{2k-1} + q_{2k}$$

と仮定する. $Q_{n+1} = a'_{n+1}Q_n - Q_{n-1}$ より, $Q_{a_1+\cdots+a_{2k-1}+j} = q_{2k-1} + (j+1)q_{2k}$, $0 \le j < a_{2k+1}$ であるから, $Q_{N+a_{2k+1}-2} = q_{2k-1} + (a_{2k+1}-1)q_{2k} = q_{2k+1} - q_{2k}$, $Q_{N+a_{2k+1}-1} = q_{2k-1} + a_{2k+1}q_{2k} = q_{2k+1}$. よって,

$$\begin{aligned} Q_{N+a_{2k+1}} &= (a_{2k+2}+2)q_{2k+1} - (q_{2k+1} - q_{2k}) \\ &= a_{2k+2}q_{2k+1} + q_{2k+1} + q_{2k} \\ &= q_{2k+2} + q_{2k+1}. \end{aligned}$$

もう一つの式は, 各 N に対して,

$$\frac{P_N - P_{N-1}}{Q_N - Q_{N-1}} < x < \frac{P_N}{Q_N} < \frac{P_{N-1}}{Q_{N-1}}, \quad P_N Q_{N-1} - P_{N-1} Q_N = 1,$$

であることに注意すると,

$$\frac{1}{Q_N Q_{N-1}} = \left| \frac{P_N}{Q_N} - \frac{P_{N-1}}{Q_{N-1}} \right| < \left| x - \frac{P_{N-1}}{Q_{N-1}} \right| < \left| \frac{P_N - P_{N-1}}{Q_N - Q_{N-1}} - \frac{P_{N-1}}{Q_{N-1}} \right| = \frac{1}{Q_{N-1}(Q_N - Q_{N-1})}.$$

□

Theorem 3.1. $x = [1; a'_1, a'_2, \cdots]_{-1} \in [0, 1)$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n = 0 \quad a.e., \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| = 0 \quad a.e.$$

さらに,

$$\frac{\log n}{n} \log Q_n \to \frac{\pi^2}{6} \quad \textit{in measure}, \qquad \frac{\log n}{n} \log \left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| \to -\frac{\pi^2}{3} \quad \textit{in measure}. \tag{9}$$

が成り立つ.

Proof. $x = [0; a_1, a_2, \cdots]_1 = [1; a'_1, a'_2, \cdots]_{-1} \in [0, 1)$ とする. このとき, 整数 $N > 0$ が十分大きければ, $N = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1} + j$, $k \ge 1$ と $0 \le j < a_{2k+1}$ と書ける. すると, Lemma 3.1 より,

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{1}{N} \log Q_N &= \frac{1}{N} \log(q_{2k-1} + (j+1)q_{2k}) < \frac{1}{N} \{\log(j+2) + \log q_{2k}\} \\ &< \frac{\log(a_{2k+1}+2)}{\sum_{i=1}^{k} a_{2i-1}} + \frac{2k}{N} \cdot \frac{1}{2k} \log q_{2k} \to 0 \quad \text{a.e.} \end{aligned}$$

さらに, Lemma 3.1 より,

$$0 \geq \frac{1}{N}\log\left|x-\frac{P_N}{Q_N}\right| > -\frac{1}{N}\log Q_N Q_{N+1} = -\left(\frac{1}{N}\log Q_N + \frac{N+1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}\log Q_{N+1}\right) \to 0 \qquad \text{a.e.}$$

が言える. 後半の主張を証明する.

$$\begin{aligned}\frac{\log k}{N}\log Q_N &= \frac{\log k}{N}\log(q_{2k-1}+(j+1)q_{2k}) < \frac{\log k}{N}\{\log(j+2)+\log q_{2k}\}\\ &< \frac{\frac{1}{k}\log(a_{2k+1}+2)}{\frac{1}{k\log k}\sum_{i=1}^{k}a_{2i-1}} + \frac{2}{\frac{1}{k\log k}\sum_{i=1}^{k}a_{2i-1}}\cdot\frac{1}{2k}\log q_{2k} \to \frac{\pi^2}{6} \quad \text{in measure,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\log k}{N}\log Q_N &= \frac{\log k}{N}\log(q_{2k-1}+(j+1)q_{2k}) > \frac{\log k}{N}\log q_{2k-1}\\ &> \frac{2}{\frac{1}{k\log k}\sum_{i=1}^{k}a_{2i-1}+\frac{j}{k\log k}}\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{1}{2k-1}\log q_{2k-1} \to \frac{\pi^2}{6} \quad \text{in measure.}\end{aligned}$$

となるので,

$$\frac{\log k}{N}\log Q_N \to \frac{\pi^2}{6} \quad \text{in measure.}$$

また,

$$\frac{\log N}{\log k} = \frac{\log\frac{N\log 2}{k\log k}+\log\frac{k\log k}{\log 2}}{\log k} \to 1 \quad \text{in measure} \tag{10}$$

であるから, Proposition 2.2 より,

$$\frac{\log n}{n}\log Q_n \to \frac{\pi^2}{6} \quad \text{in measure.}$$

を得る. さらに, Lemma 3.1 より, $Q_N - Q_{N-1} = q_{2k}$ に注意すれば,

$$\frac{\log n}{n}\log\left|x-\frac{P_n}{Q_n}\right| \to -\frac{\pi^2}{3} \quad \text{in measure.}$$

を得る. □

(10) については気付くのに時間がかかった. というのも $N = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2k-1} + j$ なので, k は N よりかなり小さくなるからである. 実は,

$$\frac{\log N}{\log k} \to 1 \quad \text{a.e.,}$$

が言える. これと Borel-Bernstein の定理や [3] の結果などを使うことにより, 以下の結果も得た.

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}\log Q_n = 0 \quad \text{a.e.,} \quad \limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}\log\left|x-\frac{P_n}{Q_n}\right| = 0 \quad \text{a.e.}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}\log Q_n = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{a.e.,} \quad \liminf_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}\log\left|x-\frac{P_n}{Q_n}\right| = -\frac{\pi^2}{3} \quad \text{a.e.}$$

Reference

[1] A. Khintchin, *Metrische Kettenbruchprobleme*, Compositio Math. 1 (1935), 361-382.

[2] A. Ya. Khinchin, *Continued Fraction*, Dover, 1935.

[3] H. G. Diamond / J. D. Vaaler, *Estimates of partial sums of continued fraction partial quotient*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 122, No.1, 1986.

[4] J. Aaronson, *Random f-Expansions*, The Annals of Probability, Vol. 14, No.3 1037-1057, 1986.

[5] J. Aaronson / H. Nakada, *Trimmed sums for non-negative, mixing stationary processes*, Stochastic Processes and their Applications 104 (2003) 173-192.

[6] K. Dajani / C. Kraaikamp, *The mother of all continued fractions*, Colloquium Math. 84/85 (2000), no.1, 109-123.

[7] K. Dajani / C. Kraaikamp / N.v.d. Wekken, *Ergodicity of N-continued fraction expansions*, Journal of Number Theory, 133(2013)3183-3204.

[8] M. Kesseböhmer / S. Munday / B. O. Stratmann, *Infinite Ergodic Theory of Numbers*, De Gruyter, 2016.

University of Tsukuba
Tsukuba 305-8577
JAPAN
E-mail address: hiroaki-i@math.tsukuba.ac.jp