ある 2 変数整関数及びその偏導関数の値の代数的独立性

慶應義塾大学大学院理工学研究科　井手春希
Haruki Ide
Graduate School of Science and Technology,
Keio University

1　導入と先行研究

解析関数の代数的数における値の代数的独立性については種々の先行研究が存在する. 特に, 次のような性質を有する整関数の実例が知られている. その性質とは, 任意の 0 でない相異なる代数的数における任意の階数の微分係数が代数的独立となるというものである. 実際, 西岡 [2] はそのような整関数の実例を次のように構成した. 以下本稿を通して a は $0 < |a| < 1$ を満たす (固定された) 代数的数とする. また, 関数 $f(x)$ の l 階導関数を $f^{(l)}(x)$ と表す.

定理 1.1 (西岡 [2]). $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a^{k!}x^k$ と定めると, 無限集合 $\{f^{(l)}(\alpha) \mid \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ l \geq 0\}$ は代数的独立である.

さらに西岡 [3] は, 定理 1.1 における冪級数 $f(x)$ の係数 $a^{k!}$ の指数の数列 $\{k!\}_{k\geq 0}$ を等比数列 $\{d^k\}_{k\geq 0}$ (d は固定された 2 以上の整数) に置き換えた場合にも同様の結果が成り立つことを示した.

定理 1.2 (西岡 [3]). d を 2 以上の整数とし, $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a^{d^k}x^k$ と定める. このとき無限集合 $\{g^{(l)}(\alpha) \mid \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ l \geq 0\}$ は代数的独立である.

定理 1.2 のさらなる一般化は田中 [4] により得られた. n を正整数とする. $R_0, \ldots, R_{n-1}$ を少なくとも一つが 0 でない非負整数とし, $c_1, \ldots, c_n$ を $c_n \neq 0$ を満たす非負整数とする. 線形回帰数列 $\{R_k\}_{k\geq 0}$ と, 対応する多項式 $\Phi(X)$ を

$$R_{k+n} = c_1 R_{k+n-1} + \cdots + c_n R_k \quad (k \geq 0),$$
$$\Phi(X) := X^n - c_1 X^{n-1} - \cdots - c_n$$

と定める. このとき冪級数 $F(x)$ を

$$F(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a^{R_k} x^k \tag{1.1}$$

と定めれば, 次が成り立つ.

定理 1.3 (田中 [4]). $\Phi(\pm 1) \neq 0$ とし, $\Phi(X)$ の相異なる根の比はいずれも 1 の冪根でないとする. このとき無限集合 $\{F^{(l)}(\alpha) \mid \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ l \geq 0\}$ は代数的独立である.

上記は全て代数的数係数の冪級数として表示される整関数に関する結果である. 一方, 代数的数係数の 1 次式を因子とする無限積として表示される整関数に関する先行結果も存在する. $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は定理 1.3 の仮定を満

たす, 等比数列でない線形回帰数列とし,

$$G(y) := \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - a^{R_k} y\right) \tag{1.2}$$

と定める. 田中 [6] は $G(y)$ の零点でない代数的数における微分係数の代数的独立性を示した.

定理 1.4 (田中 [6])**.** $\Phi(\pm 1) \neq 0$ とし, $\Phi(X)$ の相異なる根の比はいずれも 1 の冪根でないとする. さらに $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は等比数列でないと仮定する. このとき無限集合 $\{G^{(m)}(\beta) \mid \beta \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \setminus \{a^{-R_k}\}_{k\geq 0},\ m \geq 0\}$ は代数的独立である.

注意 1.5. $\Phi(\pm 1) \neq 0$ かつ $\Phi(X)$ の相異なる根の比がいずれも 1 の冪根でないならば, $\Phi(X)$ の根 $\rho_1, \ldots, \rho_n$ は $\rho_1 > \max\{1, |\rho_2|_\infty, \ldots, |\rho_n|_\infty\}$ を満たす. さらに, 漸近公式 $R_k = c\rho_1^k + o(\rho_1^k)$ が成り立つ. ここで c は正定数である (田中 [5, Lemma 4, Remark 4] 参照).

定理 1.3 及び定理 1.4 の仮定を満たす線形回帰数列 $\{R_k\}_{k\geq 0}$ として,

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \quad (k \geq 0)$$

で定義される Fibonacci 数列 $\{F_k\}_{k\geq 0}$ をとることができる.

2 主結果

$\{R_k\}_{k\geq 0}$ は定理 1.4 の仮定を満たす線形回帰数列とし, $F(x)$, $G(y)$ はそれぞれ (1.1), (1.2) の通りとする. さらに 2 変数整関数 $\Theta(x, y)$ を

$$\Theta(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} a^{R_k} x^k \prod_{\substack{k'=0, \\ k' \neq k}}^{\infty} \left(1 - a^{R_{k'}} y\right)$$

と定める. $\Theta(x, y)$ は $F(x)$ と $G'(y)$ の 2 変数化の一種である. 実際,

$$\frac{\partial^l \Theta}{\partial x^l}(x, 0) = \frac{d^l}{dx^l}\Theta(x, 0) = F^{(l)}(x) \quad (l \geq 0) \tag{2.1}$$

及び

$$\frac{\partial^m \Theta}{\partial y^m}(1, y) = \frac{d^m}{dy^m}\Theta(1, y) = -G^{(m+1)}(y) \quad (m \geq 0) \tag{2.2}$$

が成り立つ.

さて, 本稿では定理 1.4 で扱われていなかった $G(y)$ の零点における高階微分係数をも考察する. そこで $G(y)$ の各点における位数を表す記号を導入する. 各代数的数 β に対し, 非負整数 N_β を

$$N_\beta := \#\{k \geq 0 \mid a^{-R_k} = \beta\} = \operatorname*{ord}_{y=\beta} G(y) \tag{2.3}$$

と定める. 注意 1.5 より, 有限個の代数的数 β を除いて N_β は 0 または 1 である. 本稿の主定理は次のように述べられる.

主定理 2.1 ([1])**.** $\Phi(\pm 1)\neq 0$ とし, $\Phi(X)$ の相異なる根の比はいずれも 1 の冪根でないとする. さらに $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は等比数列でないと仮定する. このとき無限集合

$$\left\{\frac{\partial^{l+m}\Theta}{\partial x^l\partial y^m}(\alpha,\beta)\ \middle|\ \alpha\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ \beta\in\overline{\mathbb{Q}},\ l\geq 0,\ m\geq N_\beta\right\}\bigcup\left\{G^{(N_\beta)}(\beta)\ \middle|\ \beta\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times}\right\}$$

は代数的独立である.

主定理 2.1 から得られる二つの系を述べる. 第 1 の系は, 定理 1.3 と定理 1.4 で扱われた二つの無限集合の和集合に $G(y)$ の零点における高階微分係数を加えることで得られる集合の代数的独立性を主張する. これは (2.1), (2.2), 及び主定理 2.1 より直ちに従う.

系 2.2 ([1])**.** 主定理 2.1 と同じ仮定の下で, 無限集合

$$\left\{F^{(l)}(\alpha)\ \middle|\ \alpha\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ l\geq 0\right\}\bigcup\left\{G^{(m)}(\beta)\ \middle|\ \beta\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ m\geq N_\beta\right\}\bigcup\left\{G^{(m)}(0)\ \middle|\ m\geq 2\right\}$$

は代数的独立である.

第 2 の系は, 次のような性質を有する 2 変数整関数の実例を与える: $\alpha\neq 0$ であるような任意の相異なる代数点 (α,β) における任意の階数の偏微分係数が代数的独立となる. 実際, $\{R_k\}_{k\geq 0}$ が狭義単調増加ならば全ての代数的数 β に対して N_β は 0 または 1 であるから, $\Theta(x,y)$ の y に関する偏導関数

$$\Xi(x,y):=\frac{\partial\Theta}{\partial y}(x,y)=\prod_{j=0}^{\infty}\left(1-a^{R_j}y\right)\times\sum_{\substack{k_1,k_2\geq 0,\\ k_1\neq k_2}}\frac{-a^{R_{k_1}+R_{k_2}}x^{k_1}}{(1-a^{R_{k_1}}y)(1-a^{R_{k_2}}y)}$$

は上記の性質を持つ.

系 2.3 ([1])**.** 主定理 2.1 と同じ仮定に加え, $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は狭義単調増加とする. このとき無限集合

$$\left\{\frac{\partial^{l+m}\Xi}{\partial x^l\partial y^m}(\alpha,\beta)\ \middle|\ \alpha\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ \beta\in\overline{\mathbb{Q}},\ l\geq 0,\ m\geq 0\right\}$$

は代数的独立である.

主定理 2.1 は下記の定理 2.4 より従う. $\mathbb{C}\times(\mathbb{C}\setminus\{a^{-R_k}\}_{k\geq 0})$ 上の正則関数 $H(x,y)$ と整関数 $F_m(x)$ $(m\geq 0)$ を

$$H(x,y):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{R_k}x^k}{1-a^{R_k}y},$$

$$F_m(x):=\frac{\partial^m H}{\partial y^m}(x,0)=m!\sum_{k=0}^{\infty}a^{(m+1)R_k}x^k\quad(m=0,1,2,\ldots)$$

により定める.

定理 2.4 ([1])**.** 主定理 2.1 と同じ仮定の下で, 無限集合

$$\left\{\frac{\partial^{l+m}H}{\partial x^l\partial y^m}(\alpha,\beta)\ \middle|\ \alpha\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ \beta\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times}\setminus\{a^{-R_k}\}_{k\geq 0},\ l\geq 0,\ m\geq 0\right\}$$
$$\bigcup\left\{F_m^{(l)}(\alpha)\ \middle|\ \alpha\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ l\geq 0,\ m\geq 0\right\}\bigcup\left\{G(\beta)\ \middle|\ \beta\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times}\setminus\{a^{-R_k}\}_{k\geq 0}\right\}$$

は代数的独立である.

定理 2.4 は Mahler 関数の理論を応用することで得られる．その証明は [1] を参照されたい．一方, 定理 2.4 から主定理 2.1 を導く議論は Mahler 関数の理論と無関係であり, より広いクラスに属する関数に対して有効である．従って, 本稿の残りの部分では定理 2.4 を仮定して主定理 2.1 を証明する．

3　主定理の証明

これまでに, 我々は冪級数 $F(x)$ の係数列として線形回帰数列 $\{R_k\}_{k\geq 0}$ を指数に持つ代数的数の列 $\{a^{R_k}\}_{k\geq 0}$ を考えてきた．一方, 係数列の具体的な形は本節の議論において何ら役割を果たさない．そこで本節では係数列として $\{a^{R_k}\}_{k\geq 0}$ の代わりにより一般的な代数的数の列 $\{a_k\}_{k\geq 0}$ を考える．

$\{a_k\}_{k\geq 0}$ を

$$\frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} =: r > 1 \tag{3.1}$$

を満たす代数的数の列とし,

$$\theta(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \prod_{\substack{k'=0,\\ k'\neq k}}^{\infty} (1 - a_{k'} y),$$

$$f_m(x) := m! \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{m+1} x^k \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad g(y) := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - a_k y)$$

と定める．これらの関数はそれぞれ $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < r\} \times \mathbb{C}$, $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < r\}$, $\mathbb{C}$ において収束する．a が $0 < |a| < 1$ を満たす代数的数で $\{R_k\}_{k\geq 0}$ が主定理 2.1 の仮定を満たす線形回帰数列ならば, 注意 1.5 より $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a^{R_k}|} = 0$ である．従って, この枠組みは第 2 節の状況を $a_k = a^{R_k}$ の場合として含んでいる．$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ を $\alpha_1 = 1$ かつ $0 < |\alpha_i| < r$ $(1 \leq i \leq s)$ を満たす任意の相異なる代数的数とする．また $\beta_1, \ldots, \beta_t$ を任意の 0 でない相異なる代数的数とする．非負整数 n_j $(1 \leq j \leq t)$ を

$$n_j := \#\{k \geq 0 \mid a_k = \beta_j^{-1}\} = \operatorname*{ord}_{y=\beta_j} g(y) \quad (1 \leq j \leq t)$$

と定める．n_j は (2.3) により定義される数 N_{β_j} に対応する．(3.1) より $a_k \to 0$ $(k \to \infty)$ であるから, 十分大きな非負整数 k_0 が存在し, $k \geq k_0$ ならば $1 - a_k \beta_j \neq 0$ $(1 \leq j \leq t)$ が成り立つ．そこで $\widetilde{a}_k := a_{k+k_0}$ $(k \geq 0)$ とおき, 関数 $\widetilde{\theta}(x,y)$, $\widetilde{f}_m(x)$ $(m \geq 0)$, $\widetilde{g}(y)$ を

$$\widetilde{\theta}(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{a}_k x^k \prod_{\substack{k'=0,\\ k'\neq k}}^{\infty} (1 - \widetilde{a}_{k'} y),$$

$$\widetilde{f}_m(x) := m! \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{a}_k^{m+1} x^k \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad \widetilde{g}(y) := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \widetilde{a}_k y)$$

と定める．L, M を任意の非負整数とし, 有限集合 $T, \widetilde{T}$ を

$$\begin{aligned} T := &\left\{ \frac{\partial^{l+m}\theta}{\partial x^l \partial y^m}(\alpha_i, \beta_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq t, \\ 0 \leq l \leq L,\ n_j \leq m \leq M + n_j \end{array} \right\} \\ &\bigcup \left\{ f_m^{(l)}(\alpha_i) \;\middle|\; 1 \leq i \leq s,\ 0 \leq l \leq L,\ 0 \leq m \leq M \right\} \\ &\bigcup \left\{ g^{(n_j)}(\beta_j) \;\middle|\; 1 \leq j \leq t \right\}, \end{aligned}$$

$$\widetilde{T} := \left\{ \frac{\partial^{l+m}\widetilde{\theta}}{\partial x^l \partial y^m}(\alpha_i, \beta_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t, \\ 0 \le l \le L,\ 0 \le m \le M \end{array} \right\}$$
$$\bigcup \left\{ \widetilde{f}_m^{(l)}(\alpha_i) \;\middle|\; 1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L,\ 0 \le m \le M \right\}$$
$$\bigcup \{ \widetilde{g}(\beta_j) \mid 1 \le j \le t \}$$

と定める. $N := \#T\ (= \#\widetilde{T})$ とする. 次の命題は主定理 2.1 の証明において中心的な役割を果たす.

命題 3.1. 集合 $T, \widetilde{T}$ の要素を適当に並べて得られる N 次列ベクトル $\boldsymbol{T}^*, \widetilde{\boldsymbol{T}}^*$ が存在し, $\boldsymbol{T}^* \equiv P\widetilde{\boldsymbol{T}}^* \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^N}$ が成り立つ. ここで P は代数的数成分の N 次下三角行列で, 対角成分に 0 が現れない. 従って特に $P \in GL_N(\overline{\mathbb{Q}})$ である.

証明. 有限集合 $T_0, \widetilde{T}_0$ を

$$T_0 := \left\{ \frac{\partial^{l+m}\theta}{\partial x^l \partial y^m}(\alpha_i, \beta_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t, \\ l_0(i) \le l \le L,\ n_j \le m \le M + n_j \end{array} \right\}$$
$$\bigcup \left\{ f_m^{(l)}(\alpha_i) \;\middle|\; 1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L,\ 0 \le m \le M \right\}$$
$$\bigcup \left\{ g^{(m)}(\beta_j) \;\middle|\; 1 \le j \le t,\ n_j \le m \le M + 1 + n_j \right\},$$
$$\widetilde{T}_0 := \left\{ \frac{\partial^{l+m}\widetilde{\theta}}{\partial x^l \partial y^m}(\alpha_i, \beta_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t, \\ l_0(i) \le l \le L,\ 0 \le m \le M \end{array} \right\}$$
$$\bigcup \left\{ \widetilde{f}_m^{(l)}(\alpha_i) \;\middle|\; 1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L,\ 0 \le m \le M \right\}$$
$$\bigcup \left\{ \widetilde{g}^{(m)}(\beta_j) \;\middle|\; 1 \le j \le t,\ 0 \le m \le M + 1 \right\}$$

と定める. ただし

$$l_0(i) := \begin{cases} 1 & (i = 1), \\ 0 & (2 \le i \le s) \end{cases}$$

とおいた. $\alpha_1 = 1$ であり, (2.2) と同様に

$$\frac{\partial^m \theta}{\partial y^m}(1, \beta_j) = -g^{(m+1)}(\beta_j) \quad (1 \le j \le t,\ n_j \le m \le M + n_j),$$
$$\frac{\partial^m \widetilde{\theta}}{\partial y^m}(1, \beta_j) = -\widetilde{g}^{(m+1)}(\beta_j) \quad (1 \le j \le t,\ 0 \le m \le M) \tag{3.2}$$

であるから, $T_0, \widetilde{T}_0$ はそれぞれ $T, \widetilde{T}$ の要素を ± 1 倍して得られる集合である. 従って, $T_0, \widetilde{T}_0$ の要素を適当に並べて得られる列ベクトル $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{0}}^*, \widetilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{0}}^*$ と, 対角成分に 0 が現れないような代数的数成分の N 次下三角行列 P_0 が存在し, $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{0}}^* \equiv P_0 \widetilde{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{0}}^* \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^N}$ が成り立つことを示せばよい.

まず $f_m^{(l)}(\alpha_i)$ $(1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L,\ 0 \le m \le M)$ を $\widetilde{f}_m^{(l)}(\alpha_i)$ $(1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L,\ 0 \le m \le M)$ の $\overline{\mathbb{Q}}$ を法とした 1 次結合で表す. x の単項式 $R(x)$ を

$$R(x) := x^{k_0}$$

と定めれば, $0 \le m \le M$ に対して

$$f_m(x) = m! \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k^{m+1} x^k + m! \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k^{m+1} x^k = R(x)\widetilde{f}_m(x) + m! \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k^{m+1} x^k$$

である．よって, $1 \leq i \leq s,\, 0 \leq l \leq L,\, 0 \leq m \leq M$ に対して

$$f_m^{(l)}(\alpha_i) \equiv \sum_{h=0}^{l} \binom{l}{h} R^{(l-h)}(\alpha_i) \widetilde{f}_m^{(h)}(\alpha_i) \pmod{\overline{\mathbb{Q}}}$$

である．これより $1 \leq i \leq s,\, 0 \leq m \leq M$ に対して

$$\begin{pmatrix} f_m(\alpha_i) \\ f'_m(\alpha_i) \\ \vdots \\ f_m^{(L)}(\alpha_i) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_i^{k_0} & & & \text{\huge 0} \\ & \alpha_i^{k_0} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge $*$} & & & \alpha_i^{k_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{f}_m(\alpha_i) \\ \widetilde{f}'_m(\alpha_i) \\ \vdots \\ \widetilde{f}_m^{(L)}(\alpha_i) \end{pmatrix} \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^{L+1}}$$

である．従って,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{im} &:= {}^t(f_m(\alpha_i), f'_m(\alpha_i), \ldots, f_m^{(L)}(\alpha_i)) \quad (1 \leq i \leq s,\ 0 \leq m \leq M), \\ \boldsymbol{f} &:= {}^t({}^t\boldsymbol{f}_{10}, \ldots, {}^t\boldsymbol{f}_{1M}, {}^t\boldsymbol{f}_{20}, \ldots, {}^t\boldsymbol{f}_{2M}, \ldots, {}^t\boldsymbol{f}_{s0}, \ldots, {}^t\boldsymbol{f}_{sM}), \\ \widetilde{\boldsymbol{f}}_{im} &:= {}^t(\widetilde{f}_m(\alpha_i), \widetilde{f}'_m(\alpha_i), \ldots, \widetilde{f}_m^{(L)}(\alpha_i)) \quad (1 \leq i \leq s,\ 0 \leq m \leq M), \\ \widetilde{\boldsymbol{f}} &:= {}^t({}^t\widetilde{\boldsymbol{f}}_{10}, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{f}}_{1M}, {}^t\widetilde{\boldsymbol{f}}_{20}, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{f}}_{2M}, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{f}}_{s0}, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{f}}_{sM}), \end{aligned}$$

$$A_i := \begin{pmatrix} \alpha_i^{k_0} & & & \text{\huge 0} \\ & \alpha_i^{k_0} & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge $*$} & & & \alpha_i^{k_0} \end{pmatrix} \in GL_{L+1}(\overline{\mathbb{Q}}) \quad (1 \leq i \leq s),$$

$$A := \mathrm{diag}(\underbrace{A_1, \ldots, A_1}_{M+1}, \underbrace{A_2, \ldots, A_2}_{M+1}, \ldots, \underbrace{A_s, \ldots, A_s}_{M+1}) \in GL_{s(L+1)(M+1)}(\overline{\mathbb{Q}})$$

とおけば,

$$\boldsymbol{f} \equiv A\widetilde{\boldsymbol{f}} \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^{s(L+1)(M+1)}}$$

である．次に $g^{(m)}(\beta_j)$ $(1 \leq j \leq t,\ n_j \leq m \leq M+1+n_j)$ を $\widetilde{g}^{(m)}(\beta_j)$ $(1 \leq j \leq t,\ 0 \leq m \leq M+1)$ の 1 次結合で表す．$1 \leq j \leq t$ に対し

$$P_j(y) := (1 - \beta_j^{-1}y)^{n_j} \in \overline{\mathbb{Q}}[y], \quad Q_j(y) := \prod_{\substack{k=0, \\ a_k \neq \beta_j^{-1}}}^{k_0-1} (1 - a_k y) \in \overline{\mathbb{Q}}[y]$$

と定めれば,

$$g(y) = \prod_{k=0}^{k_0-1}(1 - a_k y) \times \prod_{k=k_0}^{\infty}(1 - a_k y) = P_j(y)Q_j(y)\widetilde{g}(y)$$

である．よって,

$$\begin{cases} 0 \leq h \leq n_j - 1 \Rightarrow P_j^{(h)}(\beta_j) = 0, \\ p_j := P_j^{(n_j)}(y) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}, \\ h \geq n_j + 1 \Rightarrow P_j^{(h)}(y) = 0 \end{cases}$$

に注意すれば, $1 \leq j \leq t,\, 0 \leq m \leq M+1$ に対して

$$g^{(m+n_j)}(\beta_j) = \sum_{h=0}^{m} \binom{m+n_j}{n_j \quad m-h \quad h} p_j Q_j^{(m-h)}(\beta_j) \widetilde{g}^{(h)}(\beta_j)$$

を得る．これより $1 \le j \le t$ に対して

$$\begin{pmatrix} g^{(n_j)}(\beta_j) \\ g^{(1+n_j)}(\beta_j) \\ \vdots \\ g^{(M+1+n_j)}(\beta_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_j q_j & & & \text{\huge 0} \\ & \binom{1+n_j}{n_j} p_j q_j & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge $*$} & & & \binom{M+1+n_j}{n_j} p_j q_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{g}(\beta_j) \\ \widetilde{g}'(\beta_j) \\ \vdots \\ \widetilde{g}^{(M+1)}(\beta_j) \end{pmatrix}$$

である．ただし $q_j := Q_j(\beta_j) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ である．従って,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}_j &:= {}^t(g^{(n_j)}(\beta_j), g^{(1+n_j)}(\beta_j), \ldots, g^{(M+1+n_j)}(\beta_j)) \quad (1 \le j \le t), \\ \boldsymbol{g} &:= {}^t({}^t\boldsymbol{g}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{g}_t), \\ \widetilde{\boldsymbol{g}}_j &:= {}^t(\widetilde{g}(\beta_j), \widetilde{g}'(\beta_j), \ldots, \widetilde{g}^{(M+1)}(\beta_j)) \quad (1 \le j \le t), \\ \widetilde{\boldsymbol{g}} &:= {}^t({}^t\widetilde{\boldsymbol{g}}_1, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{g}}_t), \end{aligned}$$

$$B_j := \begin{pmatrix} p_j q_j & & & \text{\huge 0} \\ & \binom{1+n_j}{n_j} p_j q_j & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge $*$} & & & \binom{M+1+n_j}{n_j} p_j q_j \end{pmatrix} \in GL_{M+2}(\overline{\mathbb{Q}}) \quad (1 \le j \le t),$$

$$B := \mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_t) \in GL_{t(M+2)}(\overline{\mathbb{Q}})$$

とおけば,

$$\boldsymbol{g} = B\widetilde{\boldsymbol{g}}$$

である．最後に $\partial^{l+m}\theta/\partial x^l \partial y^m(\alpha_i, \beta_j)$ $(1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t,\ l_0(i) \le l \le L,\ n_j \le m \le M + n_j)$ を $\partial^{l+m}\widetilde{\theta}/\partial x^l \partial y^m\ (\alpha_i, \beta_j)$ $(1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t,\ l_0(i) \le l \le L,\ 0 \le m \le M)$ と $\widetilde{g}^{(m)}(\beta_j)$ $(1 \le j \le t,\ 0 \le m \le M+1)$ の 1 次結合で表す．k を非負整数とすると

$$\prod_{\substack{k'=0,\\ k' \ne k}}^{\infty} (1 - a_{k'} y) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k'=0}^{k_0-1} (1 - a_{k'} y) \times \prod_{\substack{k'=k_0,\\ k' \ne k}}^{\infty} (1 - a_{k'} y) & (k \ge k_0), \\ \displaystyle\prod_{\substack{k'=0,\\ k' \ne k}}^{k_0-1} (1 - a_{k'} y) \times \prod_{k'=k_0}^{\infty} (1 - a_{k'} y) & (0 \le k \le k_0 - 1) \end{cases}$$

であるから, $1 \le j \le t$ に対して

$$\begin{aligned} \theta(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \prod_{\substack{k'=0,\\ k' \ne k}}^{\infty} (1 - a_{k'} y) \\ &= \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k x^k \prod_{\substack{k'=0,\\ k' \ne k}}^{\infty} (1 - a_{k'} y) + \sum_{k=0}^{k_0-1} a_k x^k \prod_{\substack{k'=0,\\ k' \ne k}}^{\infty} (1 - a_{k'} y) \\ &= \prod_{k'=0}^{k_0-1} (1 - a_{k'} y) \times \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k x^k \prod_{\substack{k'=k_0,\\ k' \ne k}}^{\infty} (1 - a_{k'} y) + \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} a_k x^k \prod_{\substack{k'=0,\\ k' \ne k}}^{k_0-1} (1 - a_{k'} y) \right) \prod_{k'=k_0}^{\infty} (1 - a_{k'} y) \end{aligned} \tag{3.3}$$

である. n_j の定義より, 各 k $(0 \le k \le k_0 - 1)$ に対して $\prod_{k'=0,\ k' \neq k}^{k_0-1}(1 - a_{k'}y)$ は $\overline{\mathbb{Q}}[y]$ において $1 - \beta_j^{-1}y$ で少なくとも $\max\{n_j - 1, 0\}$ 回割り切れる. そこで

$$U_j(y) := (1 - \beta_j^{-1}y)^{\max\{n_j-1,0\}} \in \overline{\mathbb{Q}}[y],$$

$$V_j(x,y) := \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} a_k x^k \prod_{\substack{k'=0,\\ k'\neq k}}^{k_0-1}(1 - a_{k'}y)\right) U_j(y)^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}}[x,y]$$

と定めれば, (3.3) より

$$\theta(x,y) = R(x)P_j(y)Q_j(y)\widetilde{\theta}(x,y) + U_j(y)V_j(x,y)\widetilde{g}(y)$$

である. ここで $\max\{n_j, 1\} + \min\{1, n_j\} = n_j + 1$ より $n_j - \max\{n_j - 1, 0\} = \min\{1, n_j\}$ $(1 \le j \le t)$ であるから, $1 \le i \le s$, $1 \le j \le t$, $l_0(i) \le l \le L$, $0 \le m \le M$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{l+m+n_j}\theta}{\partial x^l \partial y^{m+n_j}}(\alpha_i, \beta_j)\\
&= \sum_{h_1=0}^{l}\binom{l}{h_1}R^{(l-h_1)}(\alpha_i)\sum_{h_2=0}^{m}\binom{m+n_j}{n_j\ m-h_2\ h_2}p_j Q_j^{(m-h_2)}(\beta_j)\frac{\partial^{h_1+h_2}\widetilde{\theta}}{\partial x^{h_1}\partial y^{h_2}}(\alpha_i, \beta_j)\\
&\quad + \sum_{h_3=0}^{m+\min\{1,n_j\}}\binom{m+n_j}{\max\{n_j-1,0\}\quad m+\min\{1,n_j\}-h_3\quad h_3}u_j\frac{\partial^{l+m+\min\{1,n_j\}-h_3}V_j}{\partial x^l \partial y^{m+\min\{1,n_j\}-h_3}}(\alpha_i, \beta_j)\widetilde{g}^{(h_3)}(\beta_j)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

である. ただし $u_j := U_j^{(\max\{n_j-1,0\})}(y) \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ である. 特に $i = 1$ の場合は $\alpha_1 = 1$ であるから, (3.2) と (3.4) より, $1 \le j \le t$, $1 \le l \le L$, $0 \le m \le M$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{l+m+n_j}\theta}{\partial x^l \partial y^{m+n_j}}(1, \beta_j)\\
&= \sum_{h_1=1}^{l}\binom{l}{h_1}R^{(l-h_1)}(1)\sum_{h_2=0}^{m}\binom{m+n_j}{n_j\ m-h_2\ h_2}p_j Q_j^{(m-h_2)}(\beta_j)\frac{\partial^{h_1+h_2}\widetilde{\theta}}{\partial x^{h_1}\partial y^{h_2}}(1, \beta_j)\\
&\quad + \sum_{h_3=0}^{m+\min\{1,n_j\}}\binom{m+n_j}{\max\{n_j-1,0\}\quad m+\min\{1,n_j\}-h_3\quad h_3}u_j\frac{\partial^{l+m+\min\{1,n_j\}-h_3}V_j}{\partial x^l \partial y^{m+\min\{1,n_j\}-h_3}}(1, \beta_j)\widetilde{g}^{(h_3)}(\beta_j)\\
&\quad - R^{(l)}(1)\sum_{h_4=0}^{m}\binom{m+n_j}{n_j\quad m-h_4\quad h_4}p_j Q_j^{(m-h_4)}(\beta_j)\widetilde{g}^{(h_4+1)}(\beta_j)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

となる. 今,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}_{ijl} &:= {}^t\left(\frac{\partial^{l+n_j}\theta}{\partial x^l \partial y^{n_j}}(\alpha_i, \beta_j), \frac{\partial^{l+1+n_j}\theta}{\partial x^l \partial y^{1+n_j}}(\alpha_i, \beta_j), \ldots, \frac{\partial^{l+M+n_j}\theta}{\partial x^l \partial y^{M+n_j}}(\alpha_i, \beta_j)\right),\\
\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{ijl} &:= {}^t\left(\frac{\partial^{l}\widetilde{\theta}}{\partial x^l}(\alpha_i, \beta_j), \frac{\partial^{l+1}\widetilde{\theta}}{\partial x^l \partial y}(\alpha_i, \beta_j), \ldots, \frac{\partial^{l+M}\widetilde{\theta}}{\partial x^l \partial y^{M}}(\alpha_i, \beta_j)\right)\\
&\qquad\qquad (1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t,\ l_0(i) \le l \le L)
\end{aligned}$$

とおき, さらに

$$\boldsymbol{\theta}_{ij} := {}^t({}^t\boldsymbol{\theta}_{ij\,l_0(i)}, {}^t\boldsymbol{\theta}_{ij\,l_0(i)+1}, \ldots, {}^t\boldsymbol{\theta}_{ijL}), \quad \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{ij} := {}^t({}^t\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{ij\,l_0(i)}, {}^t\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{ij\,l_0(i)+1}, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{ijL}) \quad (1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t)$$

とおく．このとき (3.4) と (3.5) より, $1 \le i \le s$, $1 \le j \le t$, $l_0(i) \le l \le L$ に対して

$$\boldsymbol{\theta}_{ijl} = \sum_{h=l_0(i)}^{l} \binom{l}{h} R^{(l-h)}(\alpha_i) B'_j \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{ijh} + D_{ijl} \widetilde{\boldsymbol{g}}_j$$

である．ただし

$$B'_j := \begin{pmatrix} p_j q_j & & & \text{\huge 0} \\ & \binom{1+n_j}{n_j} p_j q_j & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge $*$} & & & \binom{M+n_j}{n_j} p_j q_j \end{pmatrix} \in GL_{M+1}(\overline{\mathbb{Q}})$$

であり, $D_{ijl} \in M_{M+1,M+2}(\overline{\mathbb{Q}})$ である．これよりさらに, $1 \le i \le s$, $1 \le j \le t$ に対して

$$\boldsymbol{\theta}_{ij} = C_{ij} \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{ij} + D_{ij} \widetilde{\boldsymbol{g}}_j$$

である．ただし

$$C_{ij} := \begin{pmatrix} \alpha_i^{k_0} B'_j & & & \text{\huge 0} \\ & \alpha_i^{k_0} B'_j & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge $*$} & & & \alpha_i^{k_0} B'_j \end{pmatrix} \in GL_{(L+1-l_0(i))(M+1)}(\overline{\mathbb{Q}}),$$

$$D_{ij} := \begin{pmatrix} D_{ij\,l_0(i)} \\ D_{ij\,l_0(i)+1} \\ \vdots \\ D_{ijL} \end{pmatrix} \in M_{(L+1-l_0(i))(M+1),M+2}(\overline{\mathbb{Q}}).$$

従って,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &:= {}^t({}^t\boldsymbol{\theta}_{11}, \ldots, {}^t\boldsymbol{\theta}_{1t}, {}^t\boldsymbol{\theta}_{21}, \ldots, {}^t\boldsymbol{\theta}_{2t}, \ldots, {}^t\boldsymbol{\theta}_{s1}, \ldots, {}^t\boldsymbol{\theta}_{st}), \\ \widetilde{\boldsymbol{\theta}} &:= {}^t({}^t\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{11}, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{1t}, {}^t\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{21}, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{2t}, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{s1}, \ldots, {}^t\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_{st}), \\ C &:= \mathrm{diag}(C_{11}, \ldots, C_{1t}, C_{21}, \ldots, C_{2t}, \ldots, C_{s1}, \ldots, C_{st}) \\ &\quad \in GL_{tL(M+1)+(s-1)t(L+1)(M+1)}(\overline{\mathbb{Q}}), \\ D &:= \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(D_{11}, \ldots, D_{1t}) \\ \mathrm{diag}(D_{21}, \ldots, D_{2t}) \\ \vdots \\ \mathrm{diag}(D_{s1}, \ldots, D_{st}) \end{pmatrix} \in M_{tL(M+1)+(s-1)t(L+1)(M+1),t(M+2)}(\overline{\mathbb{Q}}) \end{aligned}$$

とおけば

$$\boldsymbol{\theta} = C\widetilde{\boldsymbol{\theta}} + D\widetilde{\boldsymbol{g}}$$

である．以上より

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{\theta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{f}} \\ \widetilde{\boldsymbol{g}} \\ \widetilde{\boldsymbol{\theta}} \end{pmatrix} \pmod{\overline{\mathbb{Q}}^N}$$

を得る．これは所望の 1 次関係式である． □

関数 $h(x,y)$ を

$$h(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^k}{1-a_k y}$$

と定める．$h(x,y)$ は第 2 節で定義された関数 $H(x,y)$ の一般化であり，$\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < r\} \times (\mathbb{C} \setminus \{a_k^{-1}\}_{k \geq 0, a_k \neq 0})$ において収束する．

命題 3.2. l, m を任意の非負整数とすると

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{l+m}\theta}{\partial x^l \partial y^m}(x,y)\\ &= g(y)\frac{\partial^{l+m}h}{\partial x^l \partial y^m}(x,y) + g(y)A_m\left(h(1,y),\ldots,\frac{\partial^{m-1}h}{\partial y^{m-1}}(1,y),\frac{\partial^l h}{\partial x^l}(x,y),\ldots,\frac{\partial^{l+m-1}h}{\partial x^l \partial y^{m-1}}(x,y)\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

及び

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{l+m}h}{\partial x^l \partial y^m}(x,y)\\ &= \frac{1}{g(y)}\frac{\partial^{l+m}\theta}{\partial x^l \partial y^m}(x,y)B_m\left(\frac{\theta(1,y)}{g(y)},\ldots,\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^{m-1}\theta}{\partial y^{m-1}}(1,y),\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^l\theta}{\partial x^l}(x,y),\ldots,\frac{1}{g(y)}\frac{\partial^{l+m-1}\theta}{\partial x^l \partial y^{m-1}}(x,y)\right)\end{aligned} \tag{3.7}$$

が成り立つ． ここで $A_m(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_m)$, $B_m(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_m) \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_m, Y_1,\ldots,Y_m]$ である (ただし $A_0 = B_0 = 0$ とする)．特に，

$$\frac{\partial^{l+m}\theta}{\partial x^l \partial y^m}(x,0) = f_m^{(l)}(x) + A_m\left(f_0(1),\ldots,f_{m-1}(1),f_0^{(l)}(x),\ldots,f_{m-1}^{(l)}(x)\right) \tag{3.8}$$

及び

$$f_m^{(l)}(x) = \frac{\partial^{l+m}\theta}{\partial x^l \partial y^m}(x,0) + B_m\left(\theta(1,0),\ldots,\frac{\partial^{m-1}\theta}{\partial y^{m-1}}(1,0),\frac{\partial^l\theta}{\partial x^l}(x,0),\ldots,\frac{\partial^{l+m-1}\theta}{\partial x^l \partial y^{m-1}}(x,0)\right) \tag{3.9}$$

が成り立つ．

証明. $g(y)$ の対数微分より

$$g'(y) = \prod_{k'=0}^{\infty}(1-a_{k'}y) \times \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-a_k}{1-a_k y} = g(y)(-h(1,y))$$

である．これより $m \geq 1$ に関する帰納法によって

$$g^{(m)}(y) = g(y)C_m\left(h(1,y),\ldots,\frac{\partial^{m-1}h}{\partial y^{m-1}}(1,y)\right)$$

となることが分かる．ただし $C_m(X_1,\ldots,X_m) \in \mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_m]$ である．このことと

$$\theta(x,y) = \prod_{k'=0}^{\infty}(1-a_{k'}y) \times \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k x^k}{1-a_k y} = g(y)h(x,y)$$

より (3.6) が従う．さらに (3.6) より

$$\frac{\partial^{l+m}h}{\partial x^l \partial y^m}(x,y) = \frac{1}{g(y)}\frac{\partial^{l+m}\theta}{\partial x^l \partial y^m}(x,y) - A_m\left(h(1,y),\ldots,\frac{\partial^{m-1}h}{\partial y^{m-1}}(1,y),\frac{\partial^l h}{\partial x^l}(x,y),\ldots,\frac{\partial^{l+m-1}h}{\partial x^l \partial y^{m-1}}(x,y)\right) \tag{3.10}$$

を得る. (3.10) において $m=0,1,2,\ldots$ と順次考えることで, 任意の非負整数 m に対して (3.7) が成り立つことが分かる. さらに (3.6) と (3.7) の両辺に $y=0$ を代入し

$$\frac{\partial^{l+m}h}{\partial x^l\partial y^m}(x,0)=f_m^{(l)}(x)$$

を用いれば (3.8) と (3.9) がそれぞれ従う. $\square$

以上の準備の下, 定理 2.4 を仮定して主定理 2.1 を示す.

主定理 2.1 の証明. $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ を $\alpha_1=1$ であるような任意の 0 でない相異なる代数的数とし, $\beta_1,\ldots,\beta_t$ を任意の 0 でない相異なる代数的数とする. また $N_j:=N_{\beta_j}$ $(1\le j\le t)$ と表す. 主定理 2.1 を示すためには, 任意の十分大きな整数 L,M に対し, 有限集合

$$\begin{aligned}S:=&\left\{\frac{\partial^{l+m}\Theta}{\partial x^l\partial y^m}(\alpha_i,\beta_j)\;\middle|\;\begin{array}{l}1\le i\le s,\ 1\le j\le t,\\ 0\le l\le L,\ N_j\le m\le M+N_j\end{array}\right\}\\&\bigcup\left\{\frac{\partial^{l+m}\Theta}{\partial x^l\partial y^m}(\alpha_i,0)\;\middle|\;1\le i\le s,\ 0\le l\le L,\ 0\le m\le M\right\}\\&\bigcup\left\{G^{(N_j)}(\beta_j)\;\middle|\;1\le j\le t\right\}\end{aligned}$$

が代数的独立であることを示せばよい. 命題 3.2 の (3.8), (3.9) より, S の代数的独立性は

$$\begin{aligned}T:=&\left\{\frac{\partial^{l+m}\Theta}{\partial x^l\partial y^m}(\alpha_i,\beta_j)\;\middle|\;\begin{array}{l}1\le i\le s,\ 1\le j\le t,\\ 0\le l\le L,\ N_j\le m\le M+N_j\end{array}\right\}\\&\bigcup\left\{F_m^{(l)}(\alpha_i)\;\middle|\;1\le i\le s,\ 0\le l\le L,\ 0\le m\le M\right\}\\&\bigcup\left\{G^{(N_j)}(\beta_j)\;\middle|\;1\le j\le t\right\}\end{aligned}$$

の代数的独立性と同値である. $R_k\to\infty$ $(k\to\infty)$ であるから, 十分大きな非負整数 k_0 が存在し, $k\ge k_0$ ならば $1-a^{R_k}\beta_j\ne 0$ $(1\le j\le t)$ が成り立つ. そこで $\widetilde{R}_k:=R_{k+k_0}$ $(k\ge 0)$ とおく. $\{\widetilde{R}_k\}_{k\ge0}$ も主定理 2.1 の仮定を満たす線形回帰数列である. 関数 $\widetilde{\Theta}(x,y)$, $\widetilde{F}_m(x)$ $(m\ge 0)$, $\widetilde{G}(y)$, $\widetilde{H}(x,y)$ を

$$\widetilde{\Theta}(x,y):=\sum_{k=0}^{\infty}a^{\widetilde{R}_k}x^k\prod_{\substack{k'=0,\\ k'\ne k}}^{\infty}(1-a^{\widetilde{R}_{k'}}y),$$

$$\widetilde{F}_m(x):=m!\sum_{k=0}^{\infty}a^{(m+1)\widetilde{R}_k}x^k\quad(0\le m\le M),$$

$$\widetilde{G}(y):=\prod_{k=0}^{\infty}(1-a^{\widetilde{R}_k}y),\quad \widetilde{H}(x,y):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{\widetilde{R}_k}x^k}{1-a^{\widetilde{R}_k}y}$$

と定める. 命題 3.1 より, T の代数的独立性は

$$\begin{aligned}\widetilde{T}:=&\left\{\frac{\partial^{l+m}\widetilde{\Theta}}{\partial x^l\partial y^m}(\alpha_i,\beta_j)\;\middle|\;\begin{array}{l}1\le i\le s,\ 1\le j\le t,\\ 0\le l\le L,\ 0\le m\le M\end{array}\right\}\\&\bigcup\left\{\widetilde{F}_m^{(l)}(\alpha_i)\;\middle|\;1\le i\le s,\ 0\le l\le L,\ 0\le m\le M\right\}\\&\bigcup\left\{\widetilde{G}(\beta_j)\;\middle|\;1\le j\le t\right\}\end{aligned}$$

の代数的独立性と同値である．命題 3.2 の (3.6), (3.7) より, $\widetilde{T}$ の代数的独立性は

$$\widetilde{U} := \left\{ \frac{\partial^{l+m}\widetilde{H}}{\partial x^l \partial y^m}(\alpha_i, \beta_j) \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t, \\ 0 \le l \le L,\ 0 \le m \le M \end{array} \right\}$$
$$\bigcup \left\{ \widetilde{F}_m^{(l)}(\alpha_i) \;\middle|\; 1 \le i \le s,\ 0 \le l \le L,\ 0 \le m \le M \right\}$$
$$\bigcup \left\{ \widetilde{G}(\beta_j) \;\middle|\; 1 \le j \le t \right\}$$

の代数的独立性と同値である．線形回帰数列 $\{\widetilde{R}_k\}_{k\ge 0}$ に対する定理 2.4 より $\widetilde{U}$ は代数的独立であるから, 主定理 2.1 が示された． □

参考文献

[1] H. Ide, *Algebraic independence of certain entire functions of two variables generated by linear recurrences*, Preprint arXiv:1908.06289.

[2] K. Nishioka, *Algebraic independence of certain power series of algebraic numbers*, J. Number Theory **23** (1986), 353–364.

[3] K. Nishioka, *Algebraic independence of Mahler functions and their values*, Tohoku Math. J. **48** (1996), 51–70.

[4] T. Tanaka, *Algebraic independence of certain numbers defined by linear recurrences*, Keio Sci. Tech. Reports **47** (1994), 11–20.

[5] T. Tanaka, *Algebraic independence of the values of power series generated by linear recurrences*, Acta Arith. **74** (1996), 177–190.

[6] T. Tanaka, *Algebraic independence properties related to certain infinite products*, AIP Conference Proceedings **1385** (2012), 116–123.