多重対数関数の特殊値の線形独立性について

大阪大学　川島 誠

Makoto Kawashima

Department of Mathematics, Osaka University

概 要

s を自然数とする. s 多重対数関数を $\mathrm{Li}_s(z):=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}/(k+1)^s\in\mathbb{Q}[[z]]$ と定義する. $\mathrm{Li}_s(z)$ を $\mathbb{C}$ 係数の冪級数とみると, その収束半径は 1 である. 本小論では多重対数関数の, 収束半径内の異なる代数的数における特殊値の代数体上の線形独立性について, Sinnou David 氏 (Sorbonne University), 平田典子氏 (日本大学), 筆者の共同で得られた結果を紹介する.

1　導入

s を自然数とする. $\mathbb{Q}$ 係数の冪級数

$$\mathrm{Li}_s(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)^s}$$

を s 多重対数関数という. 定義より $\mathrm{Li}_1(z)=-\log(1-z)$ が成り立つ. $\mathrm{Li}_s(z)$ を $\mathbb{C}$ 係数の冪級数とみると, その収束半径は 1 である. 多重対数関数は微分方程式

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_s(z)=\frac{1}{z}\mathrm{Li}_{s-1}(z)$$

を満たす. ここで, $\mathrm{Li}_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}=z/(1-z)$ である. また多重対数関数は, Siegel の意味での, G-関数 ([37] 参照) と呼ばれる冪級数のクラスに属している.

本小論では, 多重対数関数の収束半径内の代数的数における特殊値の線形独立性に関して, Sinnou David 氏 (Sorbonne University), 平田典子氏 (日本大学), 筆者の共同で得られた結果を紹介することを目的としている. はじめに, 多重対数関数の特殊値の線形独立性についての先行研究を紹介する. なお, 本小論の内容は, $x\in[0,1)\cap\mathbb{Q}$ に対して, 多重対数関数を一般化したレルヒ関数 $\Phi_s(x,z):=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k+1}/(k+x+1)^s$ に対しても成り立つ ([11] 参照).

1.1　多重対数関数の特殊値の線形独立性の先行研究

多重対数関数の特殊値の, 無理数性, 線形独立性, 或いは, 超越性といった数論的な性質は $r=1$ の対数関数の場合を除いて, あまり知られていない. ここでは, 主要な結果を紹介する. 多重対数関数 $(\mathrm{Li}_s(z))_{1\le s\le r}$ の $0<\alpha<1$ を満たす有理数 α における特殊値の無理数性に関して, 1979 年に E. M. Nikišin が次の結果を与えた.

定理 1.1. (*cf.* [28, Theorem 1]) r を自然数, a, b を互いに素な整数とし, 次を仮定する. $b > 0$ かつ,

$$b^{r+1} < |a|\exp(-(r-1)(r(\log r + 1) + 2r\log 2)). \tag{1}$$

このとき, $r+1$ 個の実数 :

$$1, \mathrm{Li}_1(b/a), \ldots, \mathrm{Li}_r(b/a)$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

原論文では, 若干のミスがあり, [28, Theorem 1] で述べられている, $1, \mathrm{Li}_1(b/a), \ldots, \mathrm{Li}_r(b/a)$ の線形独立性が成り立つための b/a に対する条件は, (1) と異なっていることに注意しておく. この修正は [22] を参照のこと. 定理 1.1 の代数体への一般化が [20] で与えられている.

つぎに, ダイログ関数 $\mathrm{Li}_2(z)$ に関する結果として, 1993 年に得られた畑正義氏の結果を紹介する.

定理 1.2. [19, Theorem 1.1] q を, $q \geq 7$, 若しくは, $q \leq -5$ を満たす整数とする. このとき, $\mathrm{Li}_2(1/q)$ は無理数である.

また, 2005 年に G. Rhin と C. Viola は, 1996 年に [31] で, 彼らによって考案された "置換群の手法" をもちいて, 定理 1.2 の改良を行っている ([32] 参照).

ここまで紹介した結果は, 一つの代数的数 α に対して $(\mathrm{Li}_s(\alpha))_{1\leq s\leq r}$ の代数体上の線形独立性に関するものであった. 次に, α を動かした際に多重対数関数の特殊値の線形独立性について知られている結果を紹介する. m を自然数とする. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ を, 相異なる, 0 でない代数的数とする. 1986 年, Rhin, P. Toffin は対数関数, $\log(1+\alpha_1 z), \ldots, \log(1+\alpha_m z)$ のパデ近似を構成することで次の結果を示した.

定理 1.3. [30, Théoreme 1] K を有理数体, 若しくは, 虚二次体とする. $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ を相異なる, 0 でない, K の元とする. $\max(|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_m|)$ が "十分 0 に近い" とき, $m+1$ 個の複素数 :

$$1, \log(1+\alpha_1), \ldots, \log(1+\alpha_m)$$

は K 上線形独立である.

定理 1.3 における, "十分 0 に近い" という条件は, [30] では定量的に与えられている. しかし, 複雑であるので, ここでは明示的には紹介していない. 定理 1.3 は対数関数に関するものであるが, ダイログ関数 $\mathrm{Li}_2(z)$ の異なる特殊値の線形独立性について, 2018 年に Viola, W. Zudilin によって得られた次の結果がある.

定理 1.4. [41, Main Theorem] q を $q \geq 9$, 若しくは, $q \leq -8$ を満たす整数とする. このとき, 4 つの実数 :

$$1, \mathrm{Li}_1(1/q), \mathrm{Li}_2(1/q), \mathrm{Li}_2(1/(1-q))$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

このように, 対数関数, 若しくは, ダイログ関数についてしか, 多重対数関数の異なる値での代数体上の線形独立性は知られていなかった. 我々の結果は, 定理 1.3 の手法を拡張して, 多重対数関数の異なる値での代数体上の線形独立性を示すものである. 次に我々の主結果を紹介する.

1.2 主結果

はじめに記号を準備する. $r, m \in \mathbb{N}$, K を代数体とする. K の整数環を $\mathcal{O}_K$ とかく. K の複素数体への埋め込み $\iota_\infty : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定し, K の元を $\mathbb{C}$ の元と見做す. $\alpha \in K$ に対して, α の共役を $\alpha^{(g)}$ $(1 \leq g \leq [K:\mathbb{Q}])$ とかく. ここで $\alpha^{(1)} = \alpha$ とする. $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (K \setminus \{0\})^m$ をどの成分も一致しないベクトル, $\beta \in K \setminus \{0\}$ とする. $D(\boldsymbol{\alpha}, \beta) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n\alpha_i, n\beta \in \mathcal{O}_K\}$ とおく. さらに

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{(g)}(\boldsymbol{\alpha}, \beta) &:= rm\left[r(1-\log 2) + \log D(\boldsymbol{\alpha}, \beta) + \log\max(1, \min(|\alpha_i^{(g)}|)^{-1} \cdot |\beta^{(g)}|\right] \\
&\quad + r\left(\sum_{i=1}^{m} \log(2^r|\alpha_i^{(g)}| + 3^r \max(|\alpha_{i'}^{(g)}|, |\beta^{(g)}|)) + \log 3\right) \ (1 \leq g \leq [K:\mathbb{Q}]), \\
\mathbb{A}(\boldsymbol{\alpha}, \beta) &:= \log|\beta| - (rm+1)\log\max_i(|\alpha_i|) - \{rm(r + \log D(\boldsymbol{\alpha}, \beta) + r\log(5/2)) + r\log 3\}, \\
V(\boldsymbol{\alpha}, \beta) &:= \mathbb{A}(\boldsymbol{\alpha}, \beta) + \mathcal{A}^{(1)}(\boldsymbol{\alpha}, \beta) - \frac{\sum_{g=1}^{[K:\mathbb{Q}]} \mathcal{A}^{(g)}(\boldsymbol{\alpha}, \beta)}{[K_\infty : \mathbb{R}]},
\end{aligned}$$

と定義する. このとき, 次が成り立つ.

定理 1.5. 上述の記号の元, $V(\boldsymbol{\alpha}, \beta) > 0$ であると仮定する. このとき, $rm+1$ 個の複素数 :

$$1, \mathrm{Li}_1(\alpha_1/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_r(\alpha_1/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_1(\alpha_m/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_r(\alpha_m/\beta)$$

は K 上線形独立である.

注意 1.6. p を素数とする. 定理 1.5 の p 進類似である, 「p 進多重対数関数の収束半径内での異なる代数的数における特殊値の代数体上の線形独立性の十分条件」も得られる ([11] 参照).

$K = \mathbb{Q}$ の場合は $V(\boldsymbol{\alpha}, \beta) = \mathbb{A}(\boldsymbol{\alpha}, \beta)$ が成り立つので, 次の系が得られる.

系 1.7. $r, m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^m$ をどの成分も一致しないベクトル, $\beta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ とする.

$$V(\boldsymbol{\alpha}, \beta) := \log|\beta| - (rm+1)\log\max_i(|\alpha_i|) - \{rm(r + \log D(\boldsymbol{\alpha}, \beta) + r\log(5/2)) + r\log 3\}$$

とおく. $V(\boldsymbol{\alpha}, \beta) > 0$ がなりたつとする. このとき, $rm+1$ 個の実数 :

$$1, \mathrm{Li}_1(\alpha_1/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_r(\alpha_1/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_1(\alpha_m/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_r(\alpha_m/\beta)$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

次に一般次数の代数体上の多重対数関数の特殊値の線形独立性の例を与える.

系 1.8. m を自然数, $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^m$ を各成分が異なるベクトルとする. d, M を自然数として, $M \geq 3$ とする. d, M に関する多項式, $f_{M,d}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}
f_{M,1}(X) &:= \left(2 + \tfrac{1}{M}\right)X - \tfrac{2}{M}, \\
f_{M,2}(X) &:= \left(2 + \tfrac{1}{M}\right)X^2 - 2X + \tfrac{2}{M}, \\
f_{M,d}(X) &:= \left(2 + \tfrac{1}{M}\right)X^d - \tfrac{2}{M}X^{d-1} - 2X + \tfrac{2}{M}.
\end{aligned}$$

このとき, $d,r,m,\boldsymbol{\alpha}$ にのみ依存する十分大きな自然数 $M_0 := M_0(d,r,m,\boldsymbol{\alpha})$ で, 次を満たすものが存在する.

M_0 より大きな任意の自然数 M に対して, $f_{M,d}(X)$ の複素数体における根の中で絶対値が最小のものを $1/\beta$ とおく. このとき, $rm+1$ 個の複素数：

$$1, \mathrm{Li}_1(\alpha_1/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_r(\alpha_1/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_1(\alpha_m/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_r(\alpha_m/\beta)$$

は $\mathbb{Q}(\beta)$ 上線形独立である.

証明. M を自然数とする. $f_{M,d}(X)$ の複素数体における根の中で絶対値が最小のものを $1/\beta$ とおく. このとき, 次が成り立つ.

(i) $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}] = d$,

(ii) $\mathrm{den}(\beta) \le 2$,

(iii) M が十分大きい時, $|1/\beta|$ は十分 0 に近く, $|1/\beta^{(g)}|$ は十分 1 に近い $(2 \le g \le [\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}])$.

(i), (ii) から次の不等式を得る.

$$V(\boldsymbol{\alpha},\beta) \ge \log|\beta| - \sum_{g=2}^{d}\Bigl(rm\cdot\log\max(1,\min(|\alpha_i|)^{-1}\cdot|\beta^{(g)}|) - r\sum_{i=1}^{m}\log(2^r|\alpha_i| + 3^r\max(|\alpha_{i'}|,|\beta^{(g)}|))\Bigr)$$
$$-(rm+1)\log\max_i(|\alpha_i|) - \{rm(r+2\log D(\boldsymbol{\alpha}) + r\log(5/2)) + r\log 3\} - \sum_{g=2}^{d}\Bigl\{rm\,[r(1-\log 2) + 2\log D(\boldsymbol{\alpha}) + \log 3]\Bigr\}. \tag{2}$$

ここで (iii) を用いると, 十分大きな自然数 M に対して, $V(\boldsymbol{\alpha},\beta) > 0$ が成り立つ. □

1.3 具体例

はじめに系 1.7 の例を与える.

例 1.9. $r=m=15$, $\boldsymbol{\alpha} := (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{15})$, β を, $|\beta| > e^{3712.5}$ を満たす整数とする. このとき, $D(\boldsymbol{\alpha},\beta) = \mathrm{l.c.m.}(1,\ldots,15) = 360360$ が成り立つ. また, 不等式：

$$\log(360360) < 12.80,\ \log 3 < 1.10,\ \log(5/2) < 0.92,$$

が成り立つことから, 不等式：

$$\log|\beta| > 3712.5 > 225(15 + \log(360360) + 15\log(5/2)) + 15\log 3$$

を得る. 従って, 定理 1.5 から, 15^2+1 個の実数,

$$1, \mathrm{Li}_1(1/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_{15}(1/\beta), \ldots, \mathrm{Li}_1(1/15\beta), \ldots, \mathrm{Li}_{15}(1/15\beta),$$

は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

次に, 系 1.8 の例を与える.

例 1.10. $d=3$, $r,m\in\{1,\dots,10\}$, $\boldsymbol{\alpha}:=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots,\frac{1}{m+1}\right)$ とする. 系 1.8 の証明中に与えた不等式, (2) の右辺に現れる実数を $V(\boldsymbol{\alpha},M,d,r,m)$ とおく. (2) から $V(\boldsymbol{\alpha},\beta)\geq V(\boldsymbol{\alpha},M,d,r,m)$ が成り立っている. これより k を自然数, $M=10^k$ に対して, k で条件：

$$V(\boldsymbol{\alpha},10^k,d,r,m)>0,\ V(\boldsymbol{\alpha},10^{k-1},d,r,m)\leq 0 \tag{3}$$

を満たすものを考察する. (r,m) に関して, (3) を満たす k の表を与えると次のようになる.

$m\backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	6	17	30	58	72	118	150	195	220	308
2	16	41	73	131	164	259	329	422	476	655
3	30	74	127	221	277	425	535	682	769	1044
4	48	115	194	326	410	615	770	974	1099	1473
5	69	164	273	449	563	830	1034	1300	1465	1944
6	96	221	364	587	737	1070	1327	1658	1869	2455
7	126	286	467	743	931	1334	1648	2049	2309	3008
8	160	360	583	914	1146	1623	1999	2472	2786	3601
9	198	442	711	1102	1381	1936	2378	2929	3301	4236
10	241	532	852	1307	1637	2274	2785	3418	3852	4912

2 対数関数の特殊値の無理数性

主定理の証明は「ディオファントス近似」と呼ばれる, 数の有理近似の手法を用いて行う. その際に, 多重対数関数の特殊値に対して, 具体的にその有理近似を構成する. 我々はその有理近似の構成のために, 冪級数の有理関数の近似の一つの手段であるパデ近似を用いた. いきなり主定理の証明そのものをみると複雑であると思われるので, まず, 本研究の雛形となる対数関数の特殊値の無理数性について復習する.

まず, 与えられた実数が無理数であるかどうかを判定する補題を与える.

補題 2.1. α を実数とする. ある整数のペアの列 $\{(p_n,q_n)\}_{n=1,2,\dots}\subset\mathbb{Z}\setminus\{0\}\times\mathbb{Z}$ で次の条件を満たすものが存在するとする.
(i) $p_n\alpha-q_n\neq 0$ となる n が無数に存在する.
(ii) $\lim_{n\to\infty} p_n\alpha-q_n=0$ が成り立つ.
このとき α は有理数でない, 即ち, 無理数である.

証明. α が有理数になると仮定して矛盾をだす. $\alpha=q/p$ とする. ここで p,q は整数である. $p>0$ とする. (i) より,

$$\frac{q_n}{p_n}\neq\frac{q}{p} \tag{4}$$

となる n が無数にある. (4) を満たす全ての n に対して, 等式 :

$$0 \neq |p_n\alpha - q_n| = \left|p_n\frac{q}{p} - q_n\right| = \frac{|p_nq - q_np|}{p}$$

が成り立つ. この時, 0 でない正の整数の大きさは 1 以上, ということから

$$|p_n\alpha - q_n| \geq \frac{1}{p}$$

が成り立つ. しかし, これは条件 (ii) に矛盾する. □

補題 2.1 を用いて対数関数の特殊値の無理数性を示す.

定理 2.2. log2 は無理数である.

証明. $\theta = \log 2$ に対して, 補題 2.1 に現れる整数のペアの列 $\{(p_n, q_n)\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{Z}\setminus\{0\}\times\mathbb{Z}$ を次のように作る. n を自然数, d_n を $1,\ldots,n$ の最小公倍数, $P_n(z) := 1/n!\left(\frac{d}{dz}\right)^n z^n(1-z)^n \in \mathbb{Z}[z]$ とおく. また

$$\left(p_n := d_nP_n(2), q_n := d_n\sum_{l=0}^{n-1}\left(\sum_{k=l}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\binom{n+k+1}{n}}{k+1-l}\right)2^l\right) \in \mathbb{Z}^2$$

とおく. このとき, 不等式 :

$$\left|\int_0^1 \frac{P_n(t)}{2-t}dt\right| = \left|\int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{(2-t)^{n+1}}dt\right| \tag{5}$$

$$\leq \left(3-2\sqrt{2}\right)^n < (0.18)^n \tag{6}$$

が得られる. ここで, (5) は部分積分公式から得られている. 更に (5) の右辺を用いると, $0 < \left|\int_0^1 \frac{P_n(t)}{2-t}dt\right|$ が成り立つ. (6) は, $\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{t(1-t)}{2-t}\right| = 3-2\sqrt{2}$ であることを用いた. さて, (6) から, 不等式 :

$$0 < |p_n\log 2 - q_n| = d_n\left|\int_0^1 \frac{P_n(t)}{2-t}dt\right| = e^{n+o(n)}\cdot(0.18)^n < (0.504)^{n+o(n)} \to 0\ (n\to\infty),$$

が得られる. 但し, 上記の不等式において, 素数定理を用いた不等式, $d_n = e^{n+o(n)}$ $(n\to\infty)$ を用いたことに注意する. これより, log2 の無理数性が示された. □

注意 2.3. 定理 2.2 の証明において現れた整数列 (p_n, q_n) は一見どのように得られたか分かりにくい. しかしこれらは, 対数関数 $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-1/z)$ のパデ近似 (補題 3.1, 及び, 定義 3.2 参照) を用いると自然に現れる対象である (注意 3.6 参照). 特に $(P_n(z))_n$ はルジャンドル多項式族と呼ばれる有名な直交多項式族である.

3 多重対数関数のパデ型近似

ここでは L を標数 0 の整域とする. まずパデ型近似を復習する. 無限遠点におけるオーダー関数, ord_∞, を次で定義する.

$$\mathrm{ord}_\infty : L((1/z)) \to \mathbb{Z}\cup\{\infty\},\ \ \sum_k a_k\cdot\frac{1}{z^k} \mapsto \min\{k\in\mathbb{Z} \mid a_k \neq 0\}\ .$$

補題 3.1. r を自然数, $f_1(z),\dots,f_r(z)\in 1/z\cdot L[[1/z]]$ をローラン級数, $\mathbf{n}:=(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{N}^r$ とする. $N:=\sum_{i=1}^r n_i$ とおく. M を $M\geq N$ を満たす整数とする. このとき, 次の条件を満たす多項式族 $(P_0(z),P_1(z),\dots,P_r(z))\in L[z]^{r+1}\setminus\{\mathbf{0}\}$ が存在する.

$$\text{(i) } \deg P_0(z)\leq M \ \ ,$$
$$\text{(ii) } \mathrm{ord}_\infty P_0(z)f_j(z)-P_j(z)\geq n_j+1 \ \ (1\leq j\leq r)\ .$$

定義 3.2. 補題3.1と同様の記号を用いる. (i) と (ii) の条件を満たす多項式の族, $(P_0(z),P_1(z),\dots,P_r(z))\in L[z]^{r+1}$ を $(f_1,\dots,f_r)$ の重さ, $\mathbf{n}$, 次数 M のパデ型近似という.

以下, r,m を自然数, $\alpha_1,\dots,\alpha_m,t$ を不定元, $L:=\mathbb{Q}[\alpha_1,\dots,\alpha_m]$ とおいて, L 係数のローラン級数族

$$\mathrm{Li}_s(\alpha_i/z):=\sum_{k=0}^\infty\frac{\alpha_i^{k+1}}{(k+1)^s}\frac{1}{z^{k+1}}\in L[[1/z]]\ \ (1\leq i\leq m,1\leq s\leq r)$$

のパデ型近似を与える. まず記号の準備を行う.

記号 3.3.

(i) $\alpha\in L$ に対して, 代入写像 $L[t]\longrightarrow L$, $P\longmapsto P(\alpha)$ を Eval_α とかく.

(ii) $P\in L[t]$, に対して, P 倍写像 $L[t]\longrightarrow L[t]$, $(Q\longmapsto PQ)$ を $[P]$ とかく.

(iii) 形式的な積分写像 $L[t]\longrightarrow L[t]$, $P\longmapsto\frac{1}{t}\int_0^t P(\xi)d\xi$ を Prim とかく. 定義より, 任意の非負整数 k に対して, $\mathrm{Prim}(t^k)=t^k/(k+1)$ が成り立つ.

(iv) n を自然数とする. 写像 $L[t]\longrightarrow L[t]$, $P\longmapsto\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^nP(t))$ を S_n とかく. 定義より, 非負整数 k に対して, $S_n(t^k)=\binom{n+k}{n}t^k$ が成り立つことに注意する.

(v) $\alpha\in L$, $s\in\mathbb{Z}$ に対して, L 線形写像 $L[t]\longrightarrow L$, $t^k\mapsto\alpha^{k+1}/(k+1)^s$ を $\varphi_{\alpha,s}$ とかく. また記号の濫用であるが, $\varphi_{\alpha,s}\otimes_{L[t]}L[t][[z]]$ も $\varphi_{\alpha,s}$ と記述する.

s を自然数, k を非負整数とする. $\varphi_{\alpha,s}(t^k)$ は次の積分の形式化であることに注意する.

$$\frac{1}{(s-1)!}\int_0^\alpha t^k\log^{s-1}\frac{1}{t}dt\ \ .$$

事実 3.4. (i) Prim は L 同型写像であり, その逆写像は S_1 である.

(ii) 非負整数 n_1,n_2 に対して, S_{n_1}, S_{n_2} は可換である. 即ち, $S_{n_1}\circ S_{n_2}=S_{n_2}\circ S_{n_1}$ が成り立つ.

(iii) 整数 $s\in\mathbb{Z}$ と $\alpha\in L$ に対して, $\varphi_{\alpha,s}\circ S_1=\varphi_{\alpha,s-1}$ が成り立つ.

(iv) $\alpha\in L$ に対して, L 加群の射, $\varphi_{\alpha,0}$ の核はイデアル $(t-\alpha)$ である.

s を自然数とする. このとき, 次の” 積分表示” が成り立つことに注意する.

$$\varphi_{\alpha,s}\left(\frac{1}{z-t}\right)=\mathrm{Li}_s(\alpha/z)\ \ . \tag{7}$$

定理 3.5. l を非負整数として,

$$P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|z) := \mathrm{Eval}_z \circ S_n^{(r)}\left(t^l \prod_{i=1}^{m}(t-\alpha_i)^{rn}\right), \tag{8}$$

$$Q_{n,l,i,s}(\boldsymbol{\alpha}|z) := \varphi_{\alpha_i,s}\left(\frac{P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|z)-P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|t)}{z-t}\right) \ (1 \le i \le m, 1 \le s \le r) \ . \tag{9}$$

とおく. このとき, $(P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|z), Q_{n,l,i,s}(\boldsymbol{\alpha}|z))_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le s\le r}}$ は, $rm+1$ 個のローラン級数族, $(\mathrm{Li}_s(\alpha_i/z))_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le s\le r}}$ の, 重さ $(n,\dots,n) \in \mathbb{N}^{rm}$, 次数 $rmn+l$ のパデ型近似を与える.

注意 3.6. $r=m=1$, $l=0$, かつ, $\alpha_1=1$ とする. このとき,

$$P_{n,0}(z) := \mathrm{Eval}_z \circ S_n((t-1)^n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^n(z-1)^n\right)$$

$$Q_{n,0,1,1}(z) = \int_0^1 \frac{P_{n,0}(z)-P_{n,0}(t)}{z-t}dt$$

が成り立ち, $P_{n,0}(z)$ は $(-1)^n$ 倍の n 番目ルジャンドル多項式である. このことから, 定理 3.5 で与えた多重対数関数のパデ近似は, 対数関数のパデ近似の自然な一般化であることがわかる.

証明. $R_{n,l,i,s}(\boldsymbol{\alpha}|z) := P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|z)\mathrm{Li}_s(\alpha_i/z) - Q_{n,l,i,s}(\boldsymbol{\alpha}|z)$ とおく. $P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|z)$ の定義から $\mathrm{deg}P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|z) = rmn+l$ が成り立つので $\mathrm{ord}_\infty(R_{n,l,i,s}) \ge n+1$ を示せばよい.

$R_{n,l,i,s}(\boldsymbol{\alpha}|z)$ の定義と性質 (7) から次が成り立つ.

$$\begin{aligned} R_{n,l,i,s}(\boldsymbol{\alpha}|z) &= P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|z)\varphi_{\alpha_i,s}\left(\frac{1}{z-t}\right) - Q_{n,l,i,s}(\boldsymbol{\alpha}|z) \\ &= \varphi_{\alpha_i,s}\left(\frac{P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|t)}{z-t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{\alpha_i,s}(t^kP_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|t))\frac{1}{z^{k+1}} \ . \end{aligned} \tag{10}$$

ここで環 $\mathrm{End}_L(L[t])$ の元として次の等式が, 成り立つことに注意する.

$$S_n = \frac{1}{n!}S_1 \circ \ldots \circ (S_1+n-1) \ \ (n \in \mathbb{N})$$

$$[t^k] \circ S_1 = (S_1-k) \circ [t^k] \ \ (k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}).$$

$P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|T)$ の定義と上の等式から, それぞれの $1 \le s \le r$, $0 \le k \le n-1$ に対して, 多項式 $U_{s,k}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ で, $\mathrm{deg}U_{s,k} = nr-s$, かつ

$$t^kP_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|T) = S_1^{(s)} \circ U_{s,k}(S_1)\left(t^{k+l}\prod_{i=1}^{m}(t-\alpha_i)^{rn}\right)$$

を満たすものが存在する. ライプニッツの公式から, $U_{s,k}(S_1)\left(t^{k+l}\prod_{i=1}^{m}(t-\alpha_i)^{rn}\right)$ は任意の $1 \le i \le m$ に対して, イデアル $(t-\alpha_i)$ に含まれる. 従って, $1 \le i \le m, 1 \le s \le r$ と $0 \le k \le n-1$ に対して,

$$\varphi_{\alpha_i,s}(t^kP_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|t)) = \varphi_{\alpha_i,0} \circ U_{s,k}(S_1)\left(t^{k+l}\prod_{i=1}^{m}(t-\alpha_i)^{rn}\right) = 0 \ ,$$

が成り立つ. 従って (10) から,

$$\mathrm{ord}_\infty R_{n,l,i,s}(\boldsymbol{\alpha}|z) \ge n+1 \ \ (1 \le i \le m, 1 \le s \le r) \ .$$

が成り立ち, 定理 3.5 が示された. □

4 証明の概要

この章では, $r, m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K \setminus \{0\}$ を相違なる元, $\beta \in K \setminus \{0\}$ とする.

定理 1.5 を示すために, 補題 2.1 の一般化である, 与えられた複素数の代数体上の線形独立性を与える次の判定法を用いている.

命題 4.1. K を代数体として, 固定した K の $\mathbb{C}$ への埋め込み ι_∞ に関する K の完備化を K_∞ とかく. $m \in \mathbb{N}$ を自然数として, $\theta_0 := 1, \theta_1, \ldots, \theta_m$ を 0 でない複素数とする. K の整数係数の行列の族,

$$\{B_n := (A_{n,l,j})_{0 \le l,j \le m}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{M}_{m+1}(\mathcal{O}_K) \cap \mathrm{GL}_{m+1}(K)$$

と正の実数

$$\{\mathcal{A}^{(g)}\}_{1 \le g \le [K:\mathbb{Q}]},\ \mathbb{A}$$

で次の条件を満たすものが存在すると仮定する.

$$\max_{0 \le l,j \le m} |A^{(g)}_{n,l,j}| \le e^{\mathcal{A}^{(g)} \cdot n + o(n)}, \quad 1 \le g \le [K:\mathbb{Q}] \quad (n \to \infty) \tag{11}$$

$$\max_{\substack{0 \le l \le m \\ 1 \le j \le m}} |A_{n,l,0} \cdot \theta_j - A_{n,l,j}| \le e^{-\mathbb{A} \cdot n + o(n)} \quad (n \to \infty). \tag{12}$$

実数 V を

$$V := \mathbb{A} + \mathcal{A}^{(1)} - \frac{\sum_{g=1}^{[K:\mathbb{Q}]} \mathcal{A}^{(g)}}{[K_\infty : \mathbb{R}]}$$

と定義する. $V > 0$ とすると, $\theta_0, \ldots, \theta_m$ は K 上線形独立である.

証明. ベクトル $\boldsymbol{\beta} := (\beta_0, \ldots, \beta_m) \in \mathcal{O}_K \setminus \{\mathbf{0}\}$ で $\Lambda(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) := \sum_{i=0}^{m} \beta_i \theta_i = 0$ を満たすものが存在すると仮定して矛盾を出す. n を自然数とする. 仮定より, $\det(A_{n,l,j})_{0 \le l,j \le m} \ne 0$ が成り立つので, $0 \le l_n \le m$ をみたす整数 l_n で,

$$B_{l_n} := \sum_{j=0}^{m} A_{n,l_n,j} \beta_j \ne 0 \tag{13}$$

が成り立つものが存在する. $1 \le j \le m, 0 \le l \le m$ に対して, $R_{n,l,j} = A_{n,l,0}\theta_j - A_{n,l,j}$ とおく. $\Lambda(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta})$, B_{l_n}, 及び, $R_{n,l,j}$ の定義から,

$$0 = A_{n,l_n,0} \Lambda(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = B_{l_n} + \sum_{j=1}^{m} R_{n,l_n,j} \beta_j$$

が成り立つ. $B_{l_n} \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ に対して積公式を用いると, 次の不等式を得る.

$$1 \le \prod_g{}' |B^{(g)}_{l_n}| \times |B_{l_n}|^{[K_\infty:\mathbb{R}]} = \prod_g{}' |B^{(g)}_{l_n}| \times \left| \sum_{j=1}^{m} R_{n,l_n,j} \beta_j \right|^{[K_\infty:\mathbb{R}]}. \tag{14}$$

ここで, $\prod_g{}'$ における “ $'$ ” は次を意味する．即ち, $K_\infty=\mathbb{R}$ の場合は, g が $2\le g\le[K:\mathbb{Q}]$ を走り, $K_\infty=\mathbb{C}$ の場合は g が, $3\le g\le[K:\mathbb{Q}]$ を走る．はじめに $|B_{l_n}^{(g)}|$ の上界の評価を行う．不等式 (11) と B_{l_n} の定義より,

$$|B_{l_n}^{(g)}|\le e^{\mathcal{A}^{(g)}n+o(n)}\ (n\to\infty) \tag{15}$$

が成り立つ．次に $\left|\sum_{j=1}^m R_{n,l_n,j}\beta_j\right|$ の上界の評価を行う．不等式 (12) から

$$\left|\sum_{j=1}^m R_{n,l_n,j}\beta_j\right|\le e^{-\mathbb{A}n+o(n)}\ (n\to\infty) \tag{16}$$

が成り立つ．(15), (16) を (14) に用いて, 新たに得られる不等式に $1/[K_\infty:\mathbb{R}]$ 乗を行うと,

$$1\le e^{-Vn+o(n)}\ (n\to\infty)$$

が成り立つ．仮定より $V>0$ なので, 上の不等式は十分大きな $n\in\mathbb{N}$ に対して矛盾を与える． □

命題 4.1 を $(\theta_{i,s}:=\mathrm{Li}_s(\alpha_i/\beta))_{1\le i\le m,1\le s\le r}$ に対して用いたい．命題 4.1 の条件にある行列の族を, 定理 3.5 を用いて, 次のように作る．

$\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta$ の分母を $D(\boldsymbol{\alpha},\beta):=\min\{n\in\mathbb{N}\mid n\alpha_i,n\beta\in\mathcal{O}_K\}$ と定義し, 自然数 n に対して, $1,\dots,n$ の最小公倍数を d_n とおく．このとき,

$$A_{n,l}:=d_n^rD(\boldsymbol{\alpha},\beta)\cdot P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|\beta), A_{n,i,s,l}:=d_n^rD(\boldsymbol{\alpha},\beta)\cdot Q_{n,i,s,l}(\boldsymbol{\alpha}|\beta)$$

に対して, $B_n:=\begin{pmatrix}A_{n,0} & \dots & A_{n,rm}\\ & A_{n,i,s,l} & \end{pmatrix}_{\substack{1\le i\le m,1\le s\le r\\0\le l\le rm}}$ と定義すると, $B_n\in\mathrm{M}_{rm+1}(\mathcal{O}_K)$ が成り立つ．ここで, B_n が可逆になることを示すことが難しいが, 次の結果が成り立つ．

命題 4.2. n を自然数とする．このとき, $c_n\in K\setminus\{0\}$ で次の条件を満たすものが存在する．

$$\mathrm{det}B_n=c_n\prod_{i=1}^m\alpha_i^{r(n+1)+r^2n+\binom{r}{2}}\prod_{1\le i_1<i_2\le m}(\alpha_{i_2}-\alpha_{i_1})^{(2n+1)r^2}.$$

この後は, $P_{n,l}(\boldsymbol{\alpha}|z),P_{n,i,s,l}(\boldsymbol{\alpha}|z)$ の定義から, (11), (12) に対応する評価を行い, $\mathcal{O}_K$ の元を成分に持つ, 可逆な行列族 $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, 命題 4.1 を用いると, 定理 1.5 が得られる．

謝辞: 最後になりますが, 講演の機会をくださいました組織委員の鈴木正俊先生 (東京工業大学), 中村隆先生 (東京理科大学) に感謝を致します．

参考文献

[1] K. Alladi and M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew Math., **318**, (1980), 137–155.

[2] A. I. Apetekarev, A. Branquinho and W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials for classical weights*, Trans. Amer. Math. Soc., **355**, no. 10, (2003), 3887–3914.

[3] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Univ. Press, 1975.

[4] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc., **11**, (1979), 268–272.

[5] F. Beukers, *Irrationality of some* p*-adic* L*-values*, Acta Math. Sin., **24**, no. 4, (2008), 663–686.

[6] G. V. Chudnovsky, *Padé approximations to the generalized hypergeometric functions I*, J. Math. Pures et Appl., **58**, (1979), 445–476.

[7] G. V. Chudnovsky, *Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence, Recent progress*, London Math. Soc. Lecture Notes ser., **56**, Cambridge Univ. Press, (1982), 11–82.

[8] G. V. Chudnovsky, *On the method of Thue-Siegel*, Annals of Math., **117**, (1983), 325–382.

[9] G. V. Chudnovsky. *On applications of Diophantine approximations*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **81** (1984), 7261–7265.

[10] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent* ?, preprint.

[11] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear forms in Polylogarithms*, preprint.

[12] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear independence criterion of the Lerch functions at distinct algebraic points*, preprint.

[13] N. I. Fel'dman, *Improved estimate for a linear form of logarithms of algebraic numbers*, Mat. Sb., **77**, (1968), 256–270; English transl. in Math. USSR Sbornik, **6** (1968), 393–406.

[14] N. I. Fel'dman and Yu. V. Nesterenko (authors), A. N. Parshin and I. R. Schfarevich (eds.), Number Theory IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 44, 1998.

[15] S. Fischler, J. Sprang and W. Zudilin, *Many odd zeta values are irrational*, Compositio Math., **155**, (2019) , 938–952.

[16] A. O. Galochikin, *Lower bounds for polynomials in values of analytic functions of certain class*, Mat. Sb., **95**, (1974), 396–417; English transl. in Math. USSR Sbornik, **24** (1974).

[17] A. O. Galochikin, *Lower bounds for linear forms in values of certain* G*-functions*, Mat. Zametki, **18**, (1975), 541–552; English transl. in Math. Note, **18** (1975).

[18] M. Hata, *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures et Appl., **69**, (1990), 133–173.

[19] M. Hata, *Rational approximations to the dilogarithms*, Trans. Amer. Math. Soc., **336**, no. 1, (1993), 363–387.

[20] N. Hirata-Kohno, M. Ito and Y. Washio, *A criterion for the linear independence of polylogarithms over a number field*, RIMS Kokyouroku Bessatu, **64**, (2017), 3–18.

[21] M. Hirose, M. Kawashima and N. Sato, *A lower bound of the dimension of the vector space spanned by the special values of certain functions*, Tokyo J. Math., **40**, no. 2, (2017), 439–479.

[22] M. Kawashima, *Evaluation of the dimension of the $\mathbb{Q}$-vector space spanned by the special values of the Lerch function*, Tsukuba J. Math. **38**, no. 2, (2014), 171–188.

[23] L. Lewin, *Structural properties of polylogarithms*, Mathematical surveys and monographs, **37**, American Math. Society, 1991.

[24] R. Marcovecchio, *Linear independence of forms in polylogarithms*, Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa CL. Sci., **5**, (2006), 1–11.

[25] M. A. Miladi, *Récurrences linéaires et approximations simultanées de type Padé: applications à l'arithmétiqus*, Thèse, Université des S. et T. de Lille, 2001.

[26] L. M. Milne-Thomson, *The Calculus of finite differences*, Macmillan and co., London, 1933.

[27] E. M. Nikišin, *On logarithms of natural numbers*, Math. USSR Izvestia, **15**, no. 3, (1980), 523–530 (originally published in Izv. Akad. Nauk., **43**, no. 6, (1979)).

[28] E. M. Nikišin, *On irrationality of the values of the functions $F(x,\ s)$*, Math. USSR Sbornik, **37**, no. 3, (1980), 381–388 (originally published in Mat, Sb., **109**, no. 3, (1979)).

[29] E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, **92**, American Math. Society, 1991.

[30] G. Rhin and P. Toffin, *Approximants de Padé simultanés de logarithmes*, J. Number Theory, **24**, (1986), 284–297.

[31] G. Rhin and C. Viola, *On a permutation group related to $\zeta(2)$*, Acta Arith., **77**, no. 1, (1996), 23–56.

[32] G. Rhin and C. Viola, *The permutation group method for the dilogarithms*, Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa CL. Sci., **4**, no. 3, (2005), 389–437.

[33] T. Rivoal, *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$*, Acta Arith., **103**, no. 2, (2002), 157—167.

[34] T. Rivoal, *Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes*, J. Théorie des Nombres Bordeaux, **15**, no. 2, (2003), 551–559.

[35] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math., **6**, (1962), 64–94.

[36] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Shaper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$*, Math. Comp., **29**, (1975), 243–269.

[37] C. Siegel, *Uber einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch Mathematische Kalasse 1929, Nr. 1.

[38] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Math. Society, Colloquium Publications **23**, first edition 1939, 4th edition, 1975.

[39] K. Väänänen, *On linear forms of a certain class of G-functions*, Acta Arith., Vol. **36**, (1980), 273–295.

[40] K. Väänänen, X. Guangshan *On linear forms of G-functions*, Acta Arith., Vol. **50**, (1988), 251–263.

[41] C. Viola and W. Zudilin, *Linear independence of dilogarithmic values*, J. Reine Angew Math., **736**, (2018), 193–223.

[42] W. Zudilin, *On a measure of irrationality for values of G-functions*, Math. USSR Izv., **60**, no. 1, 91–118.

Makoto Kawashima
Department of mathematics
Osaka University
Machikaneyama, Toyonaka
Osaka 560-8502
Japan
E-mail adress: m-kawashima@math.sci.osaka-u.ac.jp