弱い等差数列とフラクタル次元を用いた Szemerédi の定理と同値な条件について

名古屋大学・多元数理科学研究科・齋藤 耕太
Kota Saito
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

概要

実数の部分集合 F の $\varepsilon\Delta$-近傍長さ k の等差数列が含まれないとき，F は (k,ε)-AP を含まないという．この記事では，講演では省略した主結課に詳細な証明を与える．(k,ε)-AP を含まないような集合のフラクタル次元の上からの評価を $r_k(1/\varepsilon)$ で表し，(k,ε)-AP を含まないようなフラクタル次元が大きい例を構成する．ただし，$r_k(N)$ とは長さ k の等差数列を含まない集合 $A\subseteq\{1,\dots,N\}$ に対して A の最大の濃度と定義する．

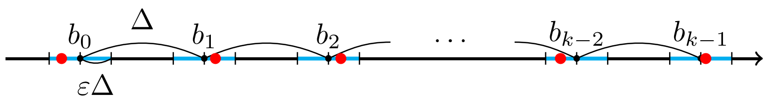
1 はじめに

本講演で紹介した結果に省略した証明をつける．この記事では一次元の等差数列についてのみ言及するが，より高次元の等差数列については [Sai19] を見よ．まず，実数 $\varepsilon>0$ と整数 $k\geq 3$ に対して，実数列 $(a_j)_{j=0}^{k-1}$ が (k,ε)-等差数列であるとは

$$|a_j-b_j|\leq\varepsilon\Delta \tag{1.1}$$

を満たす長さ k，公差 $\Delta>0$ の等差数列 $(b_j)_{j=0}^{k-1}$ が存在することをいう．

図示すると以下の等差数列 $(b_j)_{j=0}^{k-1}$ の近傍にある点列が (k,ε)-等差数列である．



次に Assouad 次元を定義しよう．任意の有界集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ と $r>0$ に対して，直径が r 以下の開集合で F を被覆することができる最小の個数を $N(E,r)$ とかく．今，集合 E が有界であることと自然数が整列集合であることから，$N(E,r)$ は well-defind である．このとき，$F\subseteq\mathbb{R}^d$ に対して

$$\dim_{\mathrm{A}}F=\inf\left\{\sigma\geq 0\ :\ (\exists\, C>0)\ (\forall\, R>0)\ (\forall\, r\in(0,R))\ (\forall\, x\in F)\right.$$
$$\left.N\big(B(x,R)\cap F,r\big)\ \leq\ C\left(\frac{R}{r}\right)^{\sigma}\right\}$$

を F の **Assouad 次元**という．ただし，$B(x,R)$ を中心 x，半径 R の閉球と定める．この Assouad 次元と (k,ε)-等差数列には関係があることを Fraser，筆者，Yu，によって示されている．彼らは各

$k \geq 3$ と $\varepsilon \in (0,1)$ を固定し，集合 $F \subseteq \mathbb{R}$ が (k,ε)-等差数列を含まないとき，

$$\dim_{\mathrm{A}} F \leq 1 + \frac{\log(1-1/k)}{\log(k\lceil 1/(2\varepsilon)\rceil)} \tag{1.2}$$

となることを示した [FSY19, Theorem 2.1]．また，彼らは整数 $k \geq 3$ を固定し，$0 < \varepsilon < \min\{(k-2)/4, 1\}$ を満たす実数 ε を固定したとき，

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \dim_{\mathrm{A}} F = \frac{\log 2}{\log \frac{2k-2-4\varepsilon}{k-2-4\varepsilon}} \tag{1.3}$$

となる具体例 $F \subseteq \mathbb{R}$ を構成した [FSY19, Theorem 2.2]．したがって，

$$D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon) := \sup\{\dim_{\mathrm{A}} F \ : \ F \subseteq \mathbb{R} \text{ は } (k,\varepsilon)\text{-等差数列を持たない}\} \tag{1.4}$$

$$D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon) := \sup\{\dim_{\mathrm{H}} F \ : \ F \subseteq \mathbb{R} \text{ は } (k,\varepsilon)\text{-等差数列を持たない}\} \tag{1.5}$$

とおくと次が成立する: 整数 $k \geq 3$ を固定し，$0 < \varepsilon < \min\{(k-2)/4, 1\}$ を満たす実数 ε を固定する．このとき，

$$\frac{\log 2}{\log \frac{2k-2-4\varepsilon}{k-2-4\varepsilon}} \leq D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon) \leq D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon) \leq 1 + \frac{\log(1-1/k)}{\log(k\lceil 1/(2\varepsilon)\rceil)} \tag{1.6}$$

が成り立つ．そこで，本講演では $r_k(N)$ を用いて上の不等式を改善するということを議論した．ここで，整数 $k \geq 3$ に対して，集合 $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ が長さ k の等差数列を含まないような最大の A の濃度を $r_k(N)$ と書く．このとき，次の結果を得た：

Theorem 1.1 ([Sai19])**.** 整数 $k \geq 3$ を固定し，$0 < \varepsilon < 1/4$ を満たす実数 ε を固定する．このとき，

$$\frac{\log r_k(\lfloor 1/(8\varepsilon)\rfloor)}{\log(1/\varepsilon + 1)} \leq D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon) \leq D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\frac{\log(r_k(\lceil 1/\varepsilon\rceil)\lceil 1/\varepsilon\rceil)}{\log(\lceil 1/\varepsilon\rceil)}$$

が成立する．

特に，正の上漸近密度を持つ自然数の部分集合は任意の長さの等差数列を含むという Szemerédi の定理 [Sze75] は

$$\frac{r_k(N)}{N} \to 0 \quad (\text{as } N \to \infty) \tag{1.7}$$

となることと同値である．この事実から次が系として成り立つ:

Corollary 1.2 ([Sai19])**.** 以下の 3 つの条件は同値である．

(i) Szemerédi の定理が成り立つ．すなわち，

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{|A \cap [1,N]|}{N} > 0$$

を満たす集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ が任意の長さの等差数列をもつ;

(ii) 任意の $k \geq 3$ に対して，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon)} = 0$$

が成り立つ;

(iii) 任意の $k \geq 3$ に対して，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon)} = 0$$

が成り立つ．

Szemerédi によって (i) は成り立つことが証明されているので [Sze75]，任意の $k \geq 3$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon)} = 0$$

が成立する．式 (1.6) の評価式では

$$\varepsilon^{1-D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon)} \leq (1/\varepsilon)^{\frac{\log(1-1/k)}{\log k \lceil 1/(2\varepsilon) \rceil}} = (1-1/k)^{\frac{\log(1/\varepsilon)}{\log k \lceil 1/(2\varepsilon) \rceil}}$$

したがって，$\overline{\lim}_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon)} \leq 1 - 1/k$ が成り立ち，式 (1.6) から Szemerédi の定理は導出できない．ここで，$r_k(N)$ のより詳しい量的な評価が得られれば $D(k,\varepsilon)$ の量的な評価も得られることに注意せよ．例えば，O'Bryant の結果 [O'B11] から，任意の $N \geq 1$ と $k \geq 3$ に対して，ある絶対定数 $C > 0$ が存在して

$$\frac{r_k(N)}{N} \geq C \exp\left((\log 2) \left(-n 2^{(n-1)/2} \sqrt[n]{\log_2 N} + \frac{1}{2n} \log_2 \log_2 N \right) \right)$$

が成立する．ただし，$n = \lceil \log_2 k \rceil$ とおく．また，Gowers の結果 [Gow01] から，任意の $N \geq 1$ と $k \geq 3$ に対して，

$$\frac{r_k(N)}{N} \leq \frac{N}{(\log \log N)^{2^{-2^{k+9}}}}$$

が成り立つ．したがって，

$$\frac{1}{\log(1/\varepsilon + 1)} \left(\log(C \lfloor 1/(8\varepsilon) \rfloor) + (\log 2) \left(-n 2^{(n-1)/2} \sqrt[n]{\log_2 \lfloor 1/(8\varepsilon) \rfloor} + \frac{1}{2n} \log_2 \log_2 \lfloor 1/(8\varepsilon) \rfloor \right) \right)$$
$$\leq D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon) \leq D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon) \leq 1 - \frac{1}{2^{1+2^{k+9}}} \frac{\log \log \log \lceil 1/\varepsilon \rceil)}{\log(\lceil 1/\varepsilon \rceil)} \tag{1.8}$$

が成り立つ．

Proposition 1.3. 整数 $k \geq 3$ を固定し，$0 < \varepsilon < 1/4$ を満たす実数 ε を固定する．このとき，

$$\varepsilon r_k(\lfloor 1/(8\varepsilon) \rfloor) \ll \varepsilon^{1-D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon)} \leq \varepsilon^{1-D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon)} \ll (\varepsilon r_k(\lceil 1/\varepsilon \rceil))^{1/2}$$

が成立する．

定理 1.1 仮定下での命題 1.3 の証明． 定理 1.1 により，

$$r_k(\lfloor 1/(8\varepsilon) \rfloor) = \exp(\log(r_k(\lfloor 1/(8\varepsilon) \rfloor))) \leq \exp(\log(1/\varepsilon + 1) D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon)) \ll \varepsilon^{-D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon)}$$

が成り立つ．よって，

$$\varepsilon r_k(\lfloor 1/(8\varepsilon) \rfloor) \ll \varepsilon^{1-D_{\mathrm{H}}(k,\varepsilon)}$$

を得る．逆向きの不等式は定理 1.1 により，

$$r_k(\lceil 1/\varepsilon \rceil) \lceil 1/\varepsilon \rceil = \exp\log(r_k(\lceil 1/\varepsilon \rceil) \lceil 1/\varepsilon \rceil)) \geq \exp(2 \log(\lceil 1/\varepsilon \rceil) D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon)) \geq \lceil 1/\varepsilon \rceil^{2 D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon)}$$

が成り立つ．したがって，

$$\varepsilon^{1-D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon)} \ll (\varepsilon r_k(\lceil 1/\varepsilon \rceil))^{1/2}$$

を得る． $\square$

2 準備

正の整数 N と有限集合 $A \subset [0,N] \cap \mathbb{Z}$ と実数 $0 < \delta < 1/2$ に対して，3 つ組 (A,N,δ) から定まる自己相似集合 $F(A,N,\delta)$ を次と定める:

$$\phi_a(x) = \frac{2\delta x}{N+2\delta} + a - \frac{N\delta}{N+2\delta} \quad (a \in A,\ x \in \mathbb{R}),$$
$$I_0 = [A]_\delta, \quad I_{n+1} = \bigcup_{a \in A} \phi_a(I_n)$$

としたとき，

$$F(A,N,\delta) = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

と定め，$F(A,N,\delta)$ を (A,N,δ) が誘導する自己相似集合と呼ぶ．このとき，次が成立する．

(i) 任意の $a \in A$ に対して，$[a-\delta, a+\delta] \supseteq \phi_a(I_0)$;

(ii) $\mathrm{Int}(I_0) \supseteq \bigcup_{a \in A} \phi_a(\mathrm{Int}(I_0))$ が成り立ち，この和集合は非公差和である．ただし，$S \subseteq \mathbb{R}$ に対して，$\mathrm{Int}(S)$ は S の内部とする．

(iii) $F(A,N,\delta)$ は空でないコンパクト集合で，

$$F(A,N,\delta) = \bigcup_{a \in A} \phi_a(F(A,N,\delta)) \tag{2.1}$$

が成立する;

(iv)

$$\dim_{\mathrm{H}} F(A,N,\delta) = \frac{\log |A|}{\log\left(\frac{N}{2\delta} + 1\right)} \tag{2.2}$$

が成り立つ．

まずこれらを簡単にチェックする．任意の $x \in I_0$ に対して，

$$a - \delta = \frac{-2\delta^2}{N+2\delta} + a - \frac{N\delta}{N+2\delta} \le \frac{2\delta x}{N+2\delta} + a - \frac{N\delta}{N+2\delta} \le a + \frac{2\delta(N+\delta)}{N+2\delta} - \frac{N\delta}{N+2\delta} = a + \delta$$

が成り立つことから (i) を得る．(ii) については $\phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が同相写像であるから，(i) により，任意の $a \in A$ に対して

$$(a-\delta, a+\delta) = \mathrm{Int}([a-\delta, a+\delta]) \supseteq \mathrm{Int}(\phi_a(I_0)) = \phi_a(\mathrm{Int}(I_0))$$

となるから，

$$\mathrm{Int}(I_0) = \bigcup_{a \in A} (a-\delta, a+\delta) \supseteq \bigcup_{a \in A} \phi_a(I_0)$$

が成立する．ここで，$a_1 \neq a_2$，$a_1, a_2 \in A$ のとき，$(a_1-\delta, a_1+\delta)$ と $(a_2-\delta, a_2+\delta)$ は互いに交わりを持たないので (ii) を得る． (iii) は IFS(Iterated Functions System) $(\phi_a)_{a\in A}$ から定まるアトラクターが一意的に存在することから (2.1) を満たす空でないコンパクト集合 F が存在する．また，その明示式により，

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$$

と書ける．よって，$F = F(A, N, \delta)$ が成り立つ．最後に (iv) を示す．(ii) により $(\phi_a)_{a\in A}$ は開集合条件を満たすから，その Hausdorff 次元は

$$\sum_{a\in A}\left(\frac{2\delta}{N+2\delta}\right)^s = 1$$

の実数解で与えられる．よって，式 (2.2) を得る．

Lemma 2.1. 集合 $F \subseteq \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\dim_A F = \inf\left\{ \sigma \geq 0 \ : \ (\exists\, C>0)\ (\exists\, \lambda \geq 1)\ (\forall\, R>0)\ (\forall\, r\in(0,R)\ \textit{with}\ R/r>\lambda) \right.$$
$$\left. (\forall\, x\in F)\ N\big(B(x,R)\cap F, r\big) \ \leq\ C\left(\frac{R}{r}\right)^{\sigma} \right\}$$

が成り立つ．

Proof. 証明すべき等式の右辺を D とおく．まず，$\dim_{\mathrm{A}} F \leq D$ を示す．実数 σ が $\sigma > D$ を満たすと仮定する．このとき，ある $C>0$ と $\lambda \geq 1$ が存在して任意の $R/r > \lambda$ 満たす任意の正数 r, R と任意の $x \in F$ に対して

$$N\big(B(x,R)\cap F, r\big) \ \leq\ C\left(\frac{R}{r}\right)^{\sigma}$$

が成り立つ．不等式 $\lambda r \geq R > r$ が成り立つとき，任意の $x\in F$ に対して

$$N\big(B(x,R)\cap F, r\big) \ \leq N\big(B(x,2\lambda r)\cap F, r\big) \leq\ C(2\lambda)^{\sigma} \leq C2^{\sigma}\left(\frac{R}{r}\right)^{\sigma}$$

が成り立つ、したがって，$C' = C2^{\sigma}$ とおくことで任意の $0<r<R$ を満たす r, R と任意の $x\in F$ に対して

$$N\big(B(x,R)\cap F, r\big) \ \leq\ C'\left(\frac{R}{r}\right)^{\sigma}$$

を得る．Assouad 次元の定義によって，$\dim_{\mathrm{A}} F \ \leq\ \sigma$ が成り立ち，$\sigma \ \to\ D+0$ とすることで $\dim_{\mathrm{A}} F \leq D$ が成り立つ．逆に，$\dim_{\mathrm{A}} F \geq D$ を示す．実数 σ が $\sigma > \dim_{\mathrm{A}} F$ を満たすと仮定する．このとき，ある $C>0$ が存在して，任意の $0<r<R$ 満たす任意の正数 r, R と任意の $x\in F$ に対して

$$N\big(B(x,R)\cap F, r\big) \ \leq\ C\left(\frac{R}{r}\right)^{\sigma}$$

が成り立つ．特に，$\lambda = 1$ とおくことで，$R/r > \lambda$ を満たす r, R と任意の $x\in F$ に対して

$$N\big(B(x,R)\cap F, r\big) \ \leq\ C\left(\frac{R}{r}\right)^{\sigma}$$

を得る．よって，D の定義から，$\sigma \leq D$ が成り立ち，$\sigma \to \dim_{\mathrm{A}} F - 0$ とすることで $\dim_{\mathrm{A}} F \leq D$ が成り立つ． $\square$

3 定理 1.1 の証明

まず，

$$\frac{\log r_k(\lfloor 1/(8\varepsilon)\rfloor)}{\log(1/\varepsilon + 1)} \leq D(k, \varepsilon)$$

を証明する．整数 $k \geq 3$ を固定し，実数 $0 < \varepsilon \leq 1/4$ をとる．また，$N := \lfloor 1/(8\varepsilon)\rfloor$ とおき，$|A'| = r_k(N)$ なる集合 $A' \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ で長さ k の等差数列を含まないようなものをとり，$A := A' - 1$ とおき，$\delta = 1/16$ とおく．自己相似集合 $F(A, N-1, \delta)$ が (k, ε)-等差数列を含まないことを証明する．背理法を用いる．自己相似集合 $F(A, N, \delta)$ が (k, ε)-等差数列 $(b_j)_{j=0}^{k-1}$ を含むと仮定する．定義から，$(b_j)_{j=0}^{k-1}$ は I_0 に含まれる．まず，$(b_j)_{j=0}^{k-1}$ が全て異なる I_0 の連結成分に属すると仮定する．すなわち，各 $j = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して，$|b_j - a'_j| \leq \delta$ を満たす $a'_j \in A$ が存在し，$i \neq j$ ならば $a'_i \neq a'_j$ が成り立つと仮定する．定義から，ある公差 $\Delta > 0$ で長さ $k > 0$ の等差数列 $(c_j)_{j=0}^{k-1}$ が存在して

$$|b_j - c_j| \leq \varepsilon\Delta$$

を各 $j = 0, 1, \ldots, k-1$ が満たす．集合 I_0 の直径は $N - 1 + 2\delta$ であるから，

$$(k-1)\Delta - 2\varepsilon\Delta \leq N - 1 + 2\delta$$

を満たす．したがって，公差の上界

$$\Delta \leq \frac{N - 1 + 2\delta}{k - 1 - 2\varepsilon}$$

を得る．よって，$0 < \delta < 1/8$ により，各 $j = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して

$$|a'_{j+1} - a'_j - \Delta| \leq |a'_{j+1} - c_{j+1}| + |a'_j - c_j| \leq 2\delta + 2\varepsilon\frac{N - 1 + 2\delta}{k - 1 - 2\varepsilon} < \frac{1}{2}$$

となり，$\Delta - 1/2 < a'_{j+1} - a'_j < \Delta + 1/2$ が $j = 0, 1, \ldots, k-1$ に対して成り立つ．ここで，$a'_{j+1} - a'_j$ が整数であるから $(a'_j)_{j=0}^{k-1}$ が長さ k の等差数列となり A の定めかたと矛盾する．よって，(k, ε)-等差数列 $(b_j)_{j=0}^{k-1}$ の少なくとも 2 項は同じ I_0 連結成分に属する．ここで，ある整数 m, L と $a \in A$ が存在して

$$\{b_m, b_{m+1}, \ldots, b_{m+L-1}\} \subset [a - \delta, a + \delta], \quad b_{m+L} \notin [a - \delta, a + \delta]$$

が成り立つと仮定する．このとき，$[a - \delta, a + \delta]$ の直径が 2δ であるから，

$$\Delta - 2\varepsilon\Delta \leq 2\delta$$

が成立する．したがって，

$$\Delta \leq \frac{2\delta}{1 - 2\varepsilon}$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned} b_{m+L} \le \varepsilon\Delta + c_{m+L} = \varepsilon\Delta + \Delta + c_{m+L-1} &\quad \le 2\varepsilon\Delta + \Delta + b_{m+L-1} \\ \le (1+2\varepsilon)\Delta + a + \delta \le \left(\frac{2+4\varepsilon}{1-2\varepsilon}+1\right)\delta + a < 7\delta + a < a + 1 - \delta \end{aligned}$$

が成り立ち，$a+\delta < b_{m+L} < a+1-\delta$ を得る．これは $(b_j)_{j=0}^{k-1} \subset I_0$ と矛盾する．したがって，ある $a \in A$ が存在して，$[a-\delta, a+\delta] \supset \{b_j\}_{j=0}^{k-1}$ が成り立つ．ここで，$[a-\delta, a+\delta] \supset \phi_a(I_0)$ であり，$F(A, N-1, \delta)$ の構成法により，$\phi_a(I_0) \supset \{b_j \colon j=0,1,\ldots,k-1\}$ が成り立つ．よって，$(\phi_a^{-1}(b_j))_{j=0}^{k-1}$ は (k,ε)-等差数列で I_0 に含まれる．これを t 回繰り返すことで，ある列 $\{a_i \colon i=1,\ldots,t\} \subseteq A$ が存在して，

$$\{\phi_{a_t}^{-1} \circ \cdots \circ \phi_{a_1}^{-1}(b_j)\}_{j=0}^{k-1} \subset I_0$$

を得る．よって，$t \to \infty$ とすることで

$$\mathrm{diam}(\{b_j \colon j=0,1,\ldots,k-1\}) \le \left(\frac{2\delta}{N+2\delta}\right)^t (N+2\delta) \to 0$$

を得る．これは矛盾である．したがって，自己相似集合 $F(A, N-1, \delta)$ が (k,ε)-等差数列を含まない．ここで，$F(A, N-1, \delta)$ の Hausdorff 次元は

$$\dim_{\mathrm{H}} F(A, N-1, \delta) = \frac{\log r_k(\lfloor 1/(8\varepsilon) \rfloor)}{\log(1/\varepsilon+1)}$$

となる．したがって，

$$\frac{\log r_k(\lfloor 1/(8\varepsilon) \rfloor)}{\log(1/\varepsilon+1)} \le D(k,\varepsilon)$$

が成り立つ．

次に，

$$D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon) \le \frac{1}{2}\frac{\log(r_k(\lceil 1/\varepsilon \rceil)\lceil 1/\varepsilon \rceil)}{\log(\lceil 1/\varepsilon \rceil)}$$

を証明する．まず，$F \subseteq \mathbb{R}$ を任意の (k,ε)-等差数列を含まない集合とし，$1/\varepsilon$ が整数になると仮定する．任意の正の実数のパラメータ $\alpha > 0$ と整数のパラメータ $N \ge 2$ を固定し，正の実数 $\lambda > 1$ を ε と α と N に依存したパラメータとする．不等式 $R/r > \lambda$ を満たす実数 r, R をとる．F と交点を持つ直径 $2R$ の区間 I をとる．その区間 I を N/ε 個の閉区間に分割して，小さい順に小区間を $A_1, A_2, \ldots, A_{N/(2\varepsilon)}$ とおく．ここで，N は ε に依存した正整数のパラメーターとする．任意の $1 \le j \le 1/\varepsilon$ を固定し，各 $n = 0,1,2,\ldots,N-1$ に対して $A_{j+n/\varepsilon}$ の中心を a_n とおく．ここで，F が区間 $A_{j+n/\varepsilon}$ $(n=0,1,\ldots,N-1)$ のうち，$r_k(N)+1$ 個以上の区間と共通部分をもつとする．このとき，集合 $\{a_n \colon n=0,1,2,\ldots,N-1\}$ は等差数列 $(b_i)_{i=0}^{k-1}$ を含み，各 $i=0,1,\ldots,k-1$ に対して

$$|b_i - c_i| \le 2\varepsilon R/N$$

が成り立つような $\{c_i \colon i=0,1,\ldots,k-1\} \subset F$ が存在する．ここで，等差数列 $(b_i)_{i=0}^{k-1}$ の公差を Δ とすると，

$$\Delta \ge 2R/N$$

が成り立つ．したがって，

$$|b_i - c_i| \leq 2\varepsilon R/N \leq \varepsilon\Delta$$

が成り立つ．よって，$(c_i)_{i=0}^{k-1}$ は (k,ε)-等差数列である．これは F の条件と矛盾する．したがって，F は区間 $A_{j+n/\varepsilon}$ $(n=0,1,\ldots,N-1)$ のうち，高々 $r_k(N)$ 個の区間としか交わりをもたない．よって，$1 \leq j \leq 1/\varepsilon$ を動かすことで，F は高々 $r_k(N)/\varepsilon$ 個の長さ $2R\varepsilon/N$ の区間 $A_{j+n/\varepsilon}$ $(j=1,2,\ldots,1/\varepsilon,\ n=0,1,\ldots,N-1)$ としか交わりをもたない．各小区間 $A_{j+n/\varepsilon}$ に対して同様の議論を t 回繰り返すことで，F は高々 $(r_k(N)/\varepsilon)^t$ 個の長さ $2R(\varepsilon/N)^t$ の区間と共通部分をもつ．ここで

$$t = \left\lceil \frac{\log(2R/r)}{\log(N/\varepsilon)} \right\rceil$$

とおくことで，

$$2R(\varepsilon/N)^t \leq r$$

が成り立つ．任意の正の実数 $\lambda = \lambda(\varepsilon,\alpha,N)$ を十分大きくとって，$R/r \geq \lambda$ により，

$$t \leq (1+\alpha)\frac{\log(2R/r)}{\log(N/\varepsilon)}$$

とできる．したがって，

$$N(I\cap F, r) \leq (r_k(N)/\varepsilon)^t \ll \left(\frac{R}{r}\right)^{(1+\alpha)\frac{\log(r_k(N)/\varepsilon)}{\log(N/\varepsilon)}}$$

が成り立ち，Assouad 次元の定義から，

$$\dim_{\mathrm{A}} F \leq (1+\alpha)\frac{\log(r_k(N)/\varepsilon)}{\log(N/\varepsilon)}$$

が成り立つ．したがって，$\alpha \to +0$ とすることで，

$$\dim_{\mathrm{A}} F \leq \frac{\log(r_k(N)/\varepsilon)}{\log(N/\varepsilon)}$$

を得る．したがって，$N = 1/\varepsilon$ とおいて

$$D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\frac{\log(r_k(1/\varepsilon)/\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

を得る．$1/\varepsilon$ が整数とならないとき，$\varepsilon' = 1/\lceil 1/\varepsilon\rceil$ とおくと，$\varepsilon' \leq \varepsilon$ である．よって，

$$D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon) \leq D_{\mathrm{A}}(k,\varepsilon') \leq \frac{1}{2}\frac{\log(r_k(\lceil 1/\varepsilon\rceil)\lceil 1/\varepsilon\rceil)}{\log(\lceil 1/\varepsilon\rceil)}$$

を得る．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP19J20878 の助成を受けている．

参考文献

[FSY19] Jonathan M. Fraser, Kota Saito, and Han Yu, *Dimensions of sets which uniformly avoid arithmetic progressions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2019), no. 14, 4419–4430. MR 3984074

[Gow01] William Timothy Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), no. 3, 465–588. MR 1844079

[O'B11] Kevin O'Bryant, *Sets of integers that do not contain long arithmetic progressions*, Electron. J. Combin. **18** (2011), no. 1, Paper 59, 15pp. MR 2788676

[Sai19] Kota Saito, *New bounds for dimensions of a set uniformly avoiding multi-dimensional arithmetic progressions*, preprint (2019).

[Sze75] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245. MR 369312