How to calculate the proportion of everywhere locally soluble diagonal hypersurfaces

慶應義塾大学大学院理工学研究科 * 金村 佳範 †
Yoshinori Kanamura
Graduate school of Science and Technology,
Keio University

1 序ー対角的超曲面と $\mathbb{Q}$-有理点

n, k を 2 以上の整数とし, $\boldsymbol{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{\oplus n+1}$ とする. 各 k, n に対して, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面

$$X_{\boldsymbol{a}}^k : \sum_{i=0}^{n} a_i x_i^k = 0$$

が $\mathbb{Q}$-有理点を持つか, また持つとしたらどのくらい $\mathbb{Q}$-有理点を持つのかという問題は, 古くから解析数論, 数論幾何など幅広い分野で考えられている興味深い問題である.

特に, 解析数論の文脈では, 「自然数をいくつかの k 乗数の和で表すとき, 最低いくつの k 乗数が必要か？」という Waring 問題と関連がある. Waring 問題の研究では, Hardy-Littlewood の円周法という手法が用いられている. この円周法は, 最初に掲げた対角的超曲面が $\mathbb{Q}$-有理点を持つかを調べる際にも有用で, 例えば Birch[2] は円周法を用いて, k の値によらず, 十分大きな n に対して, $X_{\boldsymbol{a}}^k$ が $\mathbb{Q}$-有理点を持つことを示している.

一般に, $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面 $X_{\boldsymbol{a}}^k$ が $\mathbb{Q}$-有理点を持つかどうかの判定法は知られていない. しかし, $\mathbb{Q}$ の各素点 v に対して $X_{\boldsymbol{a}}^k$ が $\mathbb{Q}_v$-有理点を持つ事を調べる事は, $X_{\boldsymbol{a}}^k$ が $\mathbb{Q}$-有理点を持つ事を調べる際に有効な場合がある. 最も典型的なのは 2 次対角的超曲面 $X_{\boldsymbol{a}}^2$ の場合であり, Hasse-Minkowski の定理より $\mathbb{Q}$ の各素点 v に対して $X_{\boldsymbol{a}}^2$ が $\mathbb{Q}_v$-有理点を持つならば, $X_{\boldsymbol{a}}^2$ は $\mathbb{Q}$-有理点を持つ. この定理は, $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面の次数が 3 次以上の場合には一般に成り立たないが, $\mathbb{P}^{n+1}$ の k 次対角的超曲面が非特

* 〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1
† email: kana1118yoshi@keio.jp

異かつ $k \leq n+1$ ならば成り立つことが Colliot-Thélène により予想されている（例えば, [10, p49] や [17, Conjecture 3.2 and Appendix A] 参照）.

本研究では, 上記のような $\mathbb{Q}_v$-有理点の存在と $\mathbb{Q}$-有理点の存在の関係性を念頭に置き, 各 k, n に対して, $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面 $X_{\boldsymbol{a}}^k$ の係数を整数の範囲で動かして出来る族のうち, $\mathbb{Q}$-有理点を持つ「割合」について考察を行う. より正確には, 各 k, n に対して, $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面 $X_{\boldsymbol{a}}^k$ の係数を整数の範囲で動かして出来る族で局所点を持つ「割合」を計算する方法を与えたのでその結果について報告を行う. その上で, 今回得た計算方法を $k=2,3$ の場合に具体的に適用し, 得られた結果より $\mathbb{Q}$-有理点や $\mathbb{Q}$-（単）有理性を満たす割合の近似値を得られたので紹介する. 本研究は慶應義塾大学及び理化学研究所の平川義之輔氏との共同研究である.

なお, 本講究録では [14] に沿って主結果のみを紹介する. 証明については [14] を参照していただきたい.

2 先行研究と主結果

本章では, 主結果である $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面の族にて局所点を持つ「割合」の計算方法について先行研究と共に紹介する. はじめに, 先行研究や主結果に登場するいくつかの「割合」の定義を述べる.

k, n を固定する. $\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{\oplus n+1}$ に対して, $|\boldsymbol{a}| := \max\{|a_0|, \cdots, |a_n|\}$（但し, 右辺の $|\cdot|$ は $\mathbb{R}$ 上のユークリッドノルム）と定義する. このとき, $\mathbb{Q}$-有理点を持つ $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面の割合を

$$\rho(n,k) := \lim_{H\to\infty} \frac{\#\left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^{\oplus n+1} \;\middle|\; |\boldsymbol{a}| < H \text{ かつ } X_{\boldsymbol{a}}^k(\mathbb{Q}) \neq \emptyset\right\}}{\#\left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^{\oplus n+1} \mid |\boldsymbol{a}| < H\right\}}$$

と定める. また, Ω を $\mathbb{Q}$ の素点全体の集合として, 局所点を持つ $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面の割合を

$$\rho_{\mathrm{loc}}(n,k) := \lim_{H\to\infty} \frac{\#\left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^{\oplus n+1} \;\middle|\; |\boldsymbol{a}| < H \text{ かつ任意の } v \in \Omega \text{ に対して } X_{\boldsymbol{a}}^k(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset\right\}}{\#\left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^{\oplus n+1} \mid |\boldsymbol{a}| < H\right\}}$$

と定める. 更に, 各 $v \in \Omega$ に対して $\mathbb{Q}_v$-有理点を持つ $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面の割合を

$$\rho_v(n,k) := \begin{cases} \mu_p\left(\left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}_p^{\oplus n+1} \;\middle|\; X_{\boldsymbol{a}}^k(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset\right\}\right) & v \text{ が有限素点 } p \text{ のとき,} \\ 2^{-n-1}\mu_\infty\left(\left\{\boldsymbol{a} \in [-1,1]^{n+1} \;\middle|\; X_{\boldsymbol{a}}^k(\mathbb{R}) \neq \emptyset\right\}\right) & v \text{ が無限素点 } \infty \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める. ただし, μ_p は全体測度が 1 に正規化された $\mathbb{Z}_p$ 上の Haar 測度の積測度であり, μ_∞ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度の積測度である.

ここで, $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面が有理点を持つ割合と局所点を持つ割合はそれぞれ極限を用いて定めているが, この極限値が存在するのかについては非自明である. 以降では, この極限値の存在に関する先行研究を紹介する.

Poonen-Voloch[17] は $\mathbb{Q}$-有理点及び局所点を持つ $\mathbb{P}^n$ のファノ超曲面の割合はそれぞれ存在し, それらは等しい事を予想した. この予想を $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面に対して述べると, 以下のようになる.

予想 2.1 (cf. Poonen-Voloch, [17, Conjecture 2.2])**.** n, k を 2 以上の整数で, $(n,k) \neq (2,2)$ 及び $n < k+1$ を満たすものとする. このとき, 上で定めた $\rho(n,k), \rho_{\mathrm{loc}}(n,k)$ は 0 ではない値に収束し, $\rho(n,k) = \rho_{\mathrm{loc}}(n,k)$ が成り立つ.

この予想はいくつかの場合に既に解決されている. 例えば, $k=2$ の場合は Hasse-Minkowski の定理より成り立つ. また, Brüdern-Dietmann[7] により $k < n/3$ ならば予想が成り立つ事が示されている.

仮にこの予想が正しいとすると, $\mathbb{Q}$-有理点を持つ対角的超曲面の割合を求めるには局所点を持つ割合を求めればよい. 局所点を持つ対角的超曲面の割合について, Bright-Browning-Loughran は以下の定理を示した.

定理 2.2 (cf. [3, Theorem 1.3])**.** n, k を 2 以上の整数とし, $(n,k) \neq (2,2)$ とする. このとき, $\rho_{\mathrm{loc}}(n,k)$ は 0 ではない値に収束し,

$$\rho_{\mathrm{loc}}(n,k) = \prod_{v:\mathrm{place}} \rho_v(n,k),$$

が成り立つ. ただし, 右辺の v は $\mathbb{Q}$ の全ての素点を走る. 特に, $n \geq 3$ のとき, $\rho_{\mathrm{loc}}(n,k)$ は常に正の値を取る.

筆者は平川氏との共同研究 [14] により, 定理 2.2 の右辺に現れる無限積の各因子を計算する方法を全ての n, k に対して与えた. 特に, n, k, p が一定の条件を満たすとき, $\rho_p(n,k)$ を計算する以下の命題を得た.

命題 2.3. n, k を 2 以上の整数, p を素数とし, $\gcd(p,k) = 1$ を満たすとする. このとき,

$$\begin{aligned}
&\rho_p(n,k) \\
&\leq 1 - (n+1)! \left(\frac{1-p^{-1}}{1-p^{-k}}\right)^{n+1} \sum_{r \geq 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\gcd(p-1,k)}\right)^r \sum_{\substack{K \in [k]^{(r)} \\ L \in [k]^{(n+1-2r)} \\ \text{s.t. } K \cap L = \emptyset}} p^{-2\boldsymbol{w}(K) - \boldsymbol{w}(L)}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 但し, r に関する和は有限和であり

$$\max\{n-k+1, 0\} \leq r \leq \min\left\{\left[\frac{n+1}{2}\right], k\right\}.$$

を走る. 更に, $p \geq (k-1)^2(k-2)^2$ または $\gcd(p-1,k) = 1$ が成り立つとき, 等号が成立する.

この命題より, 各 n, k に対して有限個の素数 p を除いて $\rho_p(n,k)$ は計算が出来る. また, 命題にて除外されている有限個の素数 p に対しても個別に $\rho_p(n,k)$ を計算出来る. 以上を踏まえて, $k = 2$ 及び 3 の場合に全ての n, p に対して $\rho_p(n,k)$ を計算を実行し, 以下を得た.

定理 2.4. $k=2$ とし, p を素数とする. このとき, $\rho_p(n,2)$ はそれぞれ以下のように与えられる.

1. $n=2$ のとき,

$$\rho_p(2,2)=\begin{cases}\dfrac{7}{12} & p=2\text{ のとき},\\ 1-\dfrac{3}{2}p^{-1}\left(\dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-2}}\right)^2 & p\neq 2\text{ のとき}.\end{cases}$$

2. $n=3$ のとき,

$$\rho_p(3,2)=\begin{cases}\dfrac{1231}{1296} & p=2\text{ のとき},\\ 1-\dfrac{3}{2}p^{-2}\left(\dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-2}}\right)^4 & p\neq 2\text{ のとき}.\end{cases}$$

3. (cf. [19, Corollary 2]) $n\geq 4$ のとき, $\rho_p(n,2)=1$.

定理 2.5. $k=3$ とし, p を素数とする. このとき, $\rho_p(n,2)$ はそれぞれ以下のように与えられる.

1. $n=2$ のとき,

$$\rho_p(2,3)=\begin{cases}\dfrac{13831}{19773} & p=3\text{ のとき},\\ 1-2p^{-1}\left(\dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-3}}\right) & p\equiv 1 \bmod 3\text{ のとき},\\ 1-6p^{-3}\left(\dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-3}}\right)^3 & p\equiv 2 \bmod 3\text{ のとき}.\end{cases}$$

2. (= [3, Theorem 2.2]) $n=3$ のとき,

$$\rho_p(3,3)=\begin{cases}\dfrac{6391}{6591} & p=3\text{ のとき},\\ 1-\dfrac{8}{3}p^{-2}(1+p^{-1})^2\left(\dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-3}}\right)^3 & p\equiv 1 \bmod 3\text{ のとき},\\ 1 & p\equiv 2 \bmod 3\text{ のとき}.\end{cases}$$

3. $n=4$ のとき,

$$\rho_p(4,3)=\begin{cases}1-\dfrac{40}{3}p^{-4}\left(\dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-3}}\right)^4 & p\equiv 1 \bmod 3\text{ のとき},\\ 1 & p\not\equiv 1 \bmod 3\text{ のとき}.\end{cases}$$

4. $n=5$ のとき,

$$\rho_p(5,3)=\begin{cases}1-\dfrac{80}{3}p^{-6}\left(\dfrac{1-p^{-1}}{1-p^{-3}}\right)^6 & p\equiv 1 \bmod 3\text{ のとき},\\ 1 & p\not\equiv 1 \bmod 3\text{ のとき}.\end{cases}$$

5. (cf. [16, Theorem 2]) $n \geq 6$ のとき, $\rho_p(n,3)=1$.

注意 2.6. 無限素点 ∞ に対して, $\rho_\infty(n,k)$ は $\mathbb{R}$-有理点を持つ $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面の割合である. 対角的超曲面 $X_{\boldsymbol{a}}^k$ は, k が偶数ならば定義方程式の係数の符号が全て同じでない限り $\mathbb{R}$-有理点を持ち, k が奇数ならば常に $\mathbb{R}$-有理点を持つ. これより, $\rho_\infty(n,k)$ の値は

$$\rho_\infty(n,k)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{2^n} & k\text{ が偶数のとき}, \\ 1 & k\text{ が奇数のとき}. \end{cases}$$

であることが直ちに分かる.

3 応用例

以降では, 定理 2.4, 定理 2.5 の応用例を 2 つ紹介する. 3.1 節では, 一定の仮定の元で有理点を持つ割合 $\rho(n,k)$ の近似値が計算出来ることを紹介する. また, 3.2 節では, 有理点を持つ割合の近似値を利用して, $\mathbb{Q}$-(単) 有理的な $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面の割合の近似値も与えられることを紹介する.

3.1 $\mathbb{Q}$-有理点を持つ対角的超曲面の割合の近似値

対角的超曲面 $X_{\boldsymbol{a}}^k$ が $\mathbb{Q}$-有理点を持つかどうかの研究は解析数論に限らず幅広い手法によって行われている. 特に $k=3$ のとき, すなわち 3 次対角的超曲面が $\mathbb{Q}$-有理点を持つかどうかは $[1,4,7,8,13,18,20]$ を始め, 非常に多くの先行研究が存在する. ここでは, $k=2,3$ の場合に我々が得た $\rho(n,k)$ の近似値を述べ, 先行研究との関係性を述べる.

定理 3.1. 1. $\rho(n,2)$ の近似値は以下のようになる.

n	2	3	≥ 4
$\rho(n,2)$	0	$0.8268\ldots$	$1-2^{-n}$

2. $\rho(n,3)$ の近似値は以下のようになる. 但し, $n=3,4,5$ のとき, 予想 2.1 を仮定している.

n	2	3	4	5	≥ 6
$\rho(n,3)$	0	$0.8964\ldots$	$0.9965\ldots$	$0.999905\ldots$	1

$\rho(n,2)$ について, $n=2$ の場合は [5, Theorem 1.1] にて, $n\geq 4$ の場合は [19, p36, Theorem 6] にて既に得られている. 同様に, $\rho(n,3)$ について, $n=2$ の場合は $\rho(2,2)$ 同様 [5, Theorem 1.1] にて, $n=3$ の場合は [3, Theorem 2.2][a] にて, $n\geq 6$ の場合は

[a] [3] では $\rho(3,3)=\rho_{\mathrm{loc}}(3,3)$ の近似値が 0.8964... となっているが, 著者たちが改めて計算したところ, 表にある 0.8268... が正しいことがわかった.

[1, Theorem 1] にて得られている．一方, $\rho(3,2), \rho(4,3), \rho(5,3)$ については, 明示的に近似値を与えた文献を見つけられなかった．これらの値を明示的に与えたところが今回の研究の意義の一つといえる．

注意 3.2. Hardy-Littlewood[12] は方程式の族 $\left\{\sum_{i=0}^{4} x_i^3 - N = 0 \mid N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\right\}$ で自然数解を持たない割合が, Davenport[11] は方程式の族 $\left\{\sum_{i=0}^{3} x_i^3 - N = 0 \mid N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\right\}$ で自然数解を持たない割合がそれぞれ 0% であることを示した． 一方, 今回得た $\rho(5,3), \rho(4,3)$ の近似値を見ることで, 方程式の族 $\left\{\sum_{i=0}^{4} a_i x_i^3 + a_5 x_5^3 = 0 \mid a_i \in \mathbb{Z}\right\}$ が非自明な整数解を持たない割合は約 0.0095%, 族 $\left\{\sum_{i=0}^{3} a_i x_i^3 + a_4 x_4^3 = 0 \mid a_i \in \mathbb{Z}\right\}$ が非自明な整数解を持たない割合は約 0.35% であることが分かる．考えている方程式の族やパラメータの範囲が異なっているとはいえ, この結果は Waring 問題で扱っている対角的超曲面と今回扱っている対角的超曲面の間で, 不定方程式の整数解の有無について異なった特徴を持つことを表す.

3.2 $\mathbb{Q}$-(単) 有理的な対角的超曲面の割合

$\mathbb{Q}$ 上の代数多様体 X が $\mathbb{Q}$-有理的であるとは, ある n が存在して X が射影空間 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ と双有理同値であるときにいう．有理点の場合と同様に $\mathbb{Q}$-有理的な $\mathbb{P}^n$ の対角的超曲面の割合を

$$\delta(n,k) := \lim_{H\to\infty} \frac{\#\left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^{\oplus n+1} \mid |\boldsymbol{a}| < H \text{ かつ } X_{\boldsymbol{a}}^k \text{ は } \mathbb{Q}\text{-有理的}\right\}}{\#\left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^{\oplus n+1} \mid |\boldsymbol{a}| < H\right\}}.$$

として定める．$k = 2$ のとき, 以下が成り立つ.

命題 3.3.

$$\delta(n,2) = \rho(n,2) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 2, \\ 0.8268\ldots & \text{if } n = 3, \\ 1 & \text{if } n \geq 4. \end{cases}$$

更に $k = 3$ のとき, $\mathbb{Q}$-有理的の代わりに $\mathbb{Q}$-単有理的[b]と条件を変えると命題 3.3 と同様の主張が成り立つ．これらの結果は, $k = 2$（resp. $k = 3$）の場合に $X_{\boldsymbol{a}}^k$ が非特異な $\mathbb{Q}$-有理点を持っていれば $\mathbb{Q}$-有理的（resp. $\mathbb{Q}$-単有理的）であることから従う（$k = 2$ のときは [14, Proposition 4.4], $k = 3$ のときは [15, Theorem 1.2] や [9, Remark 2.3.1] を参照）.

4 今後の課題

最後に, 本研究に関して今後の課題を 2 つ述べる．まず, 予想 2.1 について, 最近 $\mathbb{P}^n$ の超曲面の場合は Browning-Le Boudec-Sawin[6] によって解決された．この先行

[b]$\mathbb{Q}$ 上の代数多様体 X が $\mathbb{Q}$ 単有理的であるとは, ある n が存在して射影空間 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ から X への支配的な有理写像が存在するときにいう。

研究の手法を用いて, 予想 2.1 も解決できないだろうか. また, 定理 3.1 によると, 特に 3 次対角的超曲面において, 3 次元と 4 次元の場合「殆どの」超曲面で有理点を持つことが分かる. 最初の導入でも述べたとおり, これらの場合では局所点を持つことが $\mathbb{Q}$-有理点を持つ十分条件になると予想されているが, この予想を介さずに $\mathbb{Q}$-有理点を持たないものを全て特定出来るだろうか.

他にも本研究に関連する問題が [14] にあるので, 興味があればご覧いただきたい.

謝辞

本稿は 2020 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論の展望と諸問題」での筆者の講演を元に作成されたものです. 講演の機会を与えていただいた研究代表者の中村隆先生及び研究副代表者の赤塚広隆先生に感謝申し上げます. また, オンライン開催となりました本研究集会において, zoom の環境整備を行っていただいた ZETA の鈴木雄太さんと松坂俊輝さんに感謝申し上げます.

本稿の執筆を行うに辺り, 坂内健一先生と平川義之輔さんには原稿に目を通していただき, 多くのコメントをいただきました. 感謝申し上げます.

本研究発表には, 2020 年度潮田記念基金による慶應義塾博士課程学生研究支援プログラム及び 2020 年度 KLL 後期博士課程研究助成金の支援を受けました. また, 本研究を行うにあたり, JSPS 科研費 18H05233 の支援を受けました.

参考文献

[1] R. C. Baker, *Diagonal cubic equations. II*, Acta Arith. **53** (1989), no. 3, 217–250, DOI 10.4064/aa-53-3-217-250. MR1032826

[2] B. J. Birch, *Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables*, Mathematika **4** (1957), 102–105, DOI 10.1112/S0025579300001145. MR97359

[3] M. J. Bright, T. D. Browning, and D. Loughran, *Failures of weak approximation in families*, Compos. Math. **152** (2016), no. 7, 1435–1475, DOI 10.1112/S0010437X16007405. MR3530447

[4] T. D. Browning, *Many cubic surfaces contain rational points*, Mathematika **63** (2017), no. 3, 818–839, DOI 10.1112/S0025579317000195. MR3731306

[5] T. D. Browning and R. Dietmann, *Solubility of Fermat equations*, Quadratic forms—algebra, arithmetic, and geometry, Contemp. Math., vol. 493, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 99–106, DOI 10.1090/conm/493/09666. MR2537095

[6] T. D. Browning, Pierre Le Boudec, and Will Sawin, *The Hasse principle for random Fano hypersurfaces* (2020), available at `arXiv:2006.02356`.

[7] Jörg Brüdern and Rainer Dietmann, *Random Diophantine equations, I*, Adv. Math. **256** (2014), 18–45, DOI 10.1016/j.aim.2014.01.017. MR3177289

[8] J. W. S. Cassels and M. J. T. Guy, *On the Hasse principle for cubic surfaces*, Mathematika **13** (1966), 111–120, DOI 10.1112/S0025579300003879. MR211966

[9] Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc, and Peter Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces. I*, J. Reine Angew. Math. **373** (1987), 37–107. MR870307

[10] Jean-Louis Colliot-Thélène and Peter Swinnerton-Dyer, *Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties*, J. Reine Angew. Math. **453** (1994), 49–112, DOI 10.1515/crll.1994.453.49. MR1285781

[11] H. Davenport, *On Waring's problem for cubes*, Acta Math. **71** (1939), 123–143, DOI 10.1007/BF02547752. MR000026

[12] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'Partitio numerorum' (VI): Further researches in Waring's Problem*, Math. Z. **23** (1925), no. 1, 1–37, DOI 10.1007/BF01506218. MR1544728

[13] D. R. Heath-Brown, *The solubility of diagonal cubic Diophantine equations*, Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), no. 2, 241–259, DOI 10.1112/S0024611599011946. MR1702242

[14] Yoshinosuke Hirakawa and Yoshinori Kanamura, *How to calculate the proportion of everywhere locally soluble diagonal hypersurfaces* (2020), to appear in International Journal of Number Theory, available at `arXiv:2003.11426`.

[15] János Kollár, *Unirationality of cubic hypersurfaces*, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), no. 3, 467–476, DOI 10.1017/S1474748002000117. MR1956057

[16] D. J. Lewis, *Cubic congruences*, Michigan Math. J. **4** (1957), 85–95. MR84013

[17] Bjorn Poonen and José Felipe Voloch, *Random Diophantine equations*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), Progr. Math., vol. 226, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, pp. 175–184, DOI 10.1007/978-0-8176-8170-8_11. With appendices by Jean-Louis Colliot-Thélène and Nicholas M. Katz. MR2029869

[18] Ernst S. Selmer, *The diophantine equation $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$. Completion of the tables*, Acta Math. **92** (1954), 191–197, DOI 10.1007/BF02392703. MR67131

[19] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Translated from the French; Graduate Texts in Mathematics, No. 7. MR0344216

[20] Peter Swinnerton-Dyer, *The solubility of diagonal cubic surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **34** (2001), no. 6, 891–912, DOI 10.1016/S0012-9593(01)01080-1 (English, with English and French summaries). MR1872424