Cyclic relation for multiple zeta function

九州大学　小野塚　友一
Tomokazu Onozuka
Kyushu University

1 Introduction

Euler-Zagier 型多重ゼータ関数は次の級数で定義される多変数複素関数である。

$$\zeta(s_1,\ldots,s_r) := \sum_{1\le n_1<\cdots<n_r} \frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}}$$

この級数は次の領域で絶対収束することが知られている [9]。

$$\{(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r \mid \Re(s_j+\cdots+s_r) > r-j+1\ (1\le j\le r)\}$$

さらに全空間 $\mathbb{C}^r$ に有理型に接続されることも知られている [1][13]。上の級数の和を取る範囲 $1\le n_1<\cdots<n_r$ を $1\le n_1\le\cdots\le n_r$ に置き換えた関数を等号付き多重ゼータ関数といい $\zeta^\star(s_1,\ldots,s_r)$ で表す。

また Mordell-Tornheim 型ダブルゼータ関数は次の級数で定義される。

$$\zeta_{MT}(s_1,s_2;s_3) := \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}n^{s_2}(m+n)^{s_3}}$$

この級数は

$$\{(s_1,s_2,s_3)\in\mathbb{C}^3 \mid \Re(s_1+s_3)>1,\ \Re(s_2+s_3)>1,\ \Re(s_1+s_2+s_3)>2\}$$

において絶対収束し、$\mathbb{C}^3$ に有理型に接続されることが知られている。

これらの関数はリーマンゼータ関数の多変数への拡張とみなすことができ、一般に多重ゼータ関数と呼ばれるものの代表的な例となっている。これらの関数の特殊値については代数的な構造が非常によく調べられており、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の特殊値（多重ゼータ値）の間の関係式は数多く知られている。例えば有名な関係式として次のようなものが挙げられる。

Theorem 1.1 (和公式; Granville [2], Zagier)**.** $k>r$ を満たす自然数 k,r に対して

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ k_r\geq 2, k_i\geq 1 (1\leq i\leq r-1)}} \zeta(k_1,\ldots,k_r)=\zeta(k)$$

が成り立つ。

このような特殊値の間の関係式が多く見つかる中で、松本 [8] は次のような問題を提唱した。

Question
多重ゼータ関数の特殊値の間の関係式はより広い範囲で成り立つ関係式の特別な場合か？

次の式のような調和積と呼ばれる関係式が知られている。

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2)=\zeta(s_1,s_2)+\zeta(s_2,s_1)+\zeta(s_1+s_2)$$

これは和の範囲をうまく分割することによって得られる関係式であるが、この式は特殊値のみではなく複素数の範囲で成り立つ式である。このように特殊値の範囲を超えて成り立つ関係式が他にあるのだろうか？池田-松岡 [7] によると、Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の特殊値の間の関係式はある条件の下では調和積の他にないということが証明されている。

では Euler-Zagier 型に限定しない場合はどうか?このときには複素の範囲で成り立つ関係式が存在することが知られている。例えば [11] では Mordell-Tornheim 型ダブルゼータ関数とリーマンゼータ関数の間の次のような関係式が証明されている。

$$\zeta_{MT}(1,s;3)-\zeta_{MT}(1,3;s)+\zeta_{MT}(3,s;1)=4\zeta(s+4)-2\zeta(2)\zeta(s+2)$$

今回、巡回関係式という関係式の複素関数補間について紹介する。似た名前の関係式として巡回和公式というものがある。多重ゼータ値の巡回和公式は Hoffman-大野 [4, eq.(1)] により証明され、等号付き多重ゼータ値の巡回和公式は大野-若林 [10] により証明された。 この２つの関係式の一般化となっているのが巡回関係式である。これは広瀬-村原-村上 [3, Theorem 2] により証明され、また巡回和公式のみでなく導分関係式（井原-金子-Zagier[6, Theorem 3]）の一般化にもなっている。

Remark 1.2. 実際に示したのは巡回関係式が等号付き多重ゼータ値の巡回和公式の一般化であるという事実である。多重ゼータ値と等号付き多重ゼー

タ値それぞれの巡回和公式は同値であることが知られている（*[5, Section 4]* と *[12, Proposition 3.3]* を参照）ため、巡回関係式は多重ゼータ値の巡回和公式の一般化とも見ることができる。

2 主結果

主結果を紹介するための記号を導入する。まず正整数 d と $r_1,\dots,r_d$、複素数 $s_{i,1},\dots,s_{i,r}$ に対して

$$\boldsymbol{s}_i := (s_{i,1},\dots,s_{i,r_i}),$$
$$\boldsymbol{n}_i^{\boldsymbol{s}_i} := n_{i,1}^{s_{i,1}}\cdots n_{i,r_i}^{s_{i,r_i}},$$
$$r := r_1+\cdots+r_d$$

とし、さらに

$$\boldsymbol{s} := (\boldsymbol{s}_1,\dots,\boldsymbol{s}_d),$$
$$\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}} := \boldsymbol{n}_1^{\boldsymbol{s}_1}\cdots\boldsymbol{n}_d^{\boldsymbol{s}_d}$$

と定める。また W を、$(r_1,\dots,r_d)\neq(1,\dots,1)$ のときには

$$\begin{aligned}
W &= W(r_1,\dots,r_d)\\
&:= \{\boldsymbol{s}\in\mathbb{C}^r \mid \Re(s_{i,r_i})>1, \Re(s_{i,r_i-1})+\Re(s_{i,r_i})>2,\dots,\Re(s_{i,1})+\cdots+\Re(s_{i,r_i})>r_i,\\
&\qquad\qquad (r_i\neq 1 \text{ を満たす } i=1,\dots,d)\\
&\qquad \Re(s_{i,r_i})\geq 1 \qquad\qquad (r_i=1 \text{ を満たす } i=1,\dots,d)\}
\end{aligned}$$

で定め、$(r_1,\dots,r_d)=(1,\dots,1)$ のときには

$$\begin{aligned}
W &= W(\underbrace{1,\dots,1}_{d})\\
&:= \{\boldsymbol{s}\in\mathbb{C}^r \mid \Re(s(1,d))>d,\ \Re(s(l,l+i))>i\ \ (1\leq l\leq d,\ 0\leq i\leq d-2)\},
\end{aligned}$$

で定める。ただし $s_{d+i,1}=s_{i,1}$、$s(l,l+i)=s_{l,1}+\cdots+s_{l+i,1}$ とする。これらの記号の下、今回扱う多重ゼータ関数を定義する。

Definition 2.1. d と $r_1,\dots,r_d$ を正整数とする。整数 i,j は $1\leq i\leq d$ かつ $1\leq j\leq r_i$ の範囲にあるものとするとき、$\boldsymbol{s}\in W$ に対して

$$\widetilde{\zeta}_{i,j}(\boldsymbol{s}) := \sum_{S_{i,j}}\left(\frac{n_{i,r_i}^{\delta_{j,r_i}}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n^{\delta_{j,r_i}}(n-n_{i,j})}-\frac{n_{i,j}^{s_{i,j}}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n^{s_{i,j}}(n-n_{i,j})}\right),$$
$$\zeta_i^C(\boldsymbol{s}) := \sum_{S_i}\frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n}$$

と定める。ただし和は

$$
\begin{aligned}
S_{i,j} := \{(n_{1,1},\ldots,n_{d,r_d},n)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^{r+1} \mid n_{1,1}<\cdots<n_{1,r_1},\ldots,n_{d,1}<\cdots<n_{d,r_d},\\
n_{1,1}\leq n_{2,r_2},\ldots,n_{i-2,1}\leq n_{i-1,r_{i-1}},n_{i-1,1}\leq \mathrm{Max}\{n_{i,r_i},n\},\\
n_{i,1}\leq n_{i+1,r_{i+1}},\ldots,n_{d-1,1}\leq n_{d,r_d},n_{d,1}\leq n_{1,r_1},n_{i,j}<n<n_{i,j+1}\},\\
S_i := \{(n_{1,1},\ldots,n_{d,r_d},n)\in\mathbb{Z}_{\geq 1}^{r+1} \mid n_{1,1}<\cdots<n_{1,r_1},\ldots,n_{d,1}<\cdots<n_{d,r_d},\\
n_{1,1}\leq n_{2,r_2},\ldots,n_{d-1,1}\leq n_{d,r_d},n_{d,1}\leq n_{1,r_1},n_{i,1}\leq n\leq n_{i+1,r_{i+1}}\}
\end{aligned}
$$

を走るものとする。ここで $n_{i,r_i+1}=\infty$（$i=1,\ldots,d$）、$n_{0,j}=n_{d,j}$（$j=1,\ldots,r_d$）、$n_{d+1,r_{d+1}}=n_{1,r_1}$ とし、δ_{j,r_i} はクロネッカーのデルタとする。

この定義の下、主結果は次のようになる。

Theorem 2.2 (村原-小野塚)**.** $\boldsymbol{s}\in W$ に対して

$$
\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{r_i}\widetilde{\zeta}_{i,j}(\boldsymbol{s})=\sum_{i=1}^{d}\zeta_i^{C}(\boldsymbol{s})
$$

が成り立つ。

Remark 2.3. 上の定理は実際に広瀬-村原-村上 *[3, Theorem 2]* の巡回関係式の複素関数補間となっている。この事実は次の章で確かめることとする。

定義の和が複雑なため、簡単な場合の例を見ることとする。

Example 2.4. $d=1$ で $r_1=r\geq 2$ のときには

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{r}\sum_{\substack{1\leq n_1<\cdots<n_j<n\\ n<n_{j+1}<\cdots<n_r}}\left(\frac{n_j^{\delta_{j,r}}}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}n^{\delta_{j,r}}(n-n_j)}-\frac{n_j^{s_j}}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}n^{s_j}(n-n_j)}\right)\\
&=\sum_{\substack{1\leq n_1<\cdots<n_r\\ n_1\leq n\leq n_r}}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}n}
\end{aligned}
$$

が $\Re(s_r)>1,\Re(s_{r-1})+\Re(s_r)>2,\ldots,\Re(s_1)+\cdots+\Re(s_r)>r$ において成り立つ。

Example 2.5. $d=1$ で $r_1=r=1$ のときには

$$
\sum_{1\leq n_1<n}\left(\frac{n_1}{n_1^{s}n(n-n_1)}-\frac{1}{n^{s}(n-n_1)}\right)=\sum_{1\leq n}\frac{1}{n^{s+1}}
$$

が $\Re(s)>1$ で成り立つ。これは

$$
\zeta_{MT}(s-1,1;1)-\zeta(1,s)=\zeta(s+1)
$$

と表せる。

$r_1 = \cdots = r_d = 1$ のときには次を得る。

Corollary 2.6 (巡回和公式の複素関数補間)**.** $\boldsymbol{s} \in W$ に対して

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{\substack{1 \le n_i \le \cdots \le n_1 \le \cdots \le n_{i-1} \le n \\ n \ne n_i}} \left(\frac{n_i}{n_1^{s_1} \cdots n_d^{s_d} n(n-n_i)} - \frac{n_i^{s_i}}{n_1^{s_1} \cdots n_d^{s_d} n^{s_i}(n-n_i)} \right)$$
$$= d\zeta(s_1 + \cdots + s_d + 1)$$

が成り立つ。

Remark 2.7. 上の式で $s_1 \ldots, s_d \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ とした場合、簡単な式変形により大野-若林 *[10]* の等号付き多重ゼータ値の巡回和公式を得ることができる。

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{m=1}^{s_i - 1} \zeta^{\star}(s_i - m, s_{i+1}, \ldots, s_d, s_1, \ldots, s_{i-1}, m+1)$$
$$= (s_1 + \cdots + s_d)\zeta(s_1 + \cdots + s_d + 1) \tag{2.1}$$

このことは次章で確かめる。

Remark 2.8. $\boldsymbol{s} \in W \cap \mathbb{Z}^{r}_{\ge 1}$ のとき、*Theorem 2.2* の式は次章で登場する式 (3.1) と書き換えられる。この (3.1) は $\boldsymbol{s}_1 \in \mathbb{Z}^{r_1}_{\ge 1}, \boldsymbol{s}_2 = (1), \ldots, \boldsymbol{s}_d = (1)$ のときに導分関係式を与えることが知られている *[3, Section 5]*。

今回の主結果はどれだけ多くの Euler-Zagier 型多重ゼータ値の間の関係式を与えるのだろうか？計算機により線形独立な関係式の個数を Weight ($\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ に対して $k := k_1 + \cdots + k_r$ の値のことを Weight という) ごとに計算してみた。

表 1: Number of Independent Relations for MZVs

Weight	3	4	5	6	7	8	9	10	11
巡回和公式	1	2	4	6	12	18	34	58	106
導分関係式	1	2	5	10	22	44	90	181	363
巡回関係式	1	2	5	10	25	52	110	228	466
全関係式	1	3	6	14	29	60	123	249	503

表にあるように、巡回関係式は全関係式には届かないもののそれに近い個数の関係式を与えているように思える。これにより、主結果は広い範囲の関係式を複素関数補間したとみることができる。

3　Remark の確認

まず Remark 2.3 を確かめよう。$\boldsymbol{s} \in W \cap \mathbb{Z}^r_{\geq 1}$, としたとき、主結果の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{r_i}\widetilde{\zeta}_{i,j}(\boldsymbol{s}) &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{S_{i,j}}\left(\frac{n_{i,r_i}^{\delta_{j,r_i}}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n^{\delta_{j,r_i}}(n-n_{i,j})} - \frac{n_{i,j}^{s_{i,j}}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n^{s_{i,j}}(n-n_{i,j})}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{S_{i,j}}\left(\sum_{m\geq 0}\frac{n_{i,j}^{m+\delta_{j,r_i}}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n^{m+1+\delta_{j,r_i}}} - \sum_{m\geq 0}\frac{n_{i,j}^{s_{i,j}+m}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n^{s_{i,j}+m+1}}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{m=\delta_{j,r_i}}^{s_{i,j}-1}\sum_{S_{i,j}}\frac{n_{i,j}^{m}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n^{m+1}}\end{aligned}$$

のように変形できるが、これは [3, Theorem 2] の左辺となっている。 一方、右辺の級数

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{S_i}\frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n}$$

はそのまま [3, Theorem 2] の右辺である。そのため主結果から巡回関係式

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{m=\delta_{j,r_i}}^{s_{i,j}-1}\sum_{S_{i,j}}\frac{n_{i,j}^{m}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n^{m+1}} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{S_i}\frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n} \tag{3.1}$$

が得られる。

次に Remark 2.7 を確かめよう。（これは [3, Section 5.1] にある議論と同様であることを注意しておく。）$r_1 = \cdots = r_d = 1$、$\boldsymbol{s} \in W \cap \mathbb{Z}^r_{\geq 1}$ としたとき、上と同様の議論により

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{m=1}^{s_i-1}\sum_{\substack{n_i\leq\cdots\leq n_d\leq n_1\leq\cdots\leq n_{i-1}\leq n\\ n\neq n_i}}\frac{n_i^m}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n^{m+1}} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{n_1\leq\cdots\leq n_i\leq n\leq n_{i+1}\leq\cdots\leq n_d\leq n_1}\frac{1}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}n}$$

が得られる。このとき左辺は

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{m=1}^{s_i-1}\left(\zeta^{\star}(s_i-m, s_{i+1},\ldots,s_d,s_1,\ldots,s_{i-1},m+1) - \zeta(s_1+\cdots+s_d+1)\right)$$

と書き換えられ、右辺はリーマンゼータ値 d 個の和

$$d\zeta(s_1+\cdots+s_d+1)$$

となっているため (2.1) が得られる。

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami, and Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arithmetica **98** (2001), 107–116.

[2] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, Analytic number theory (Kyoto, 1996), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997), 95–101.

[3] M. Hirose, H. Murahara, and T. Murakami, *A cyclic analogue of multiple zeta values*, Comment. Univ. St. Pauli **67** (2019), 147–166.

[4] M. E. Hoffman and Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra, **262** (2003), 332–347.

[5] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno, and J. Okuda, *Multiple zeta values vs. multiple zeta-star values*, J. Algebra **332** (2011), 187–208.

[6] K. Ihara, M. Kaneko, and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142** (2006), 307–338.

[7] S. Ikeda and K. Matsuoka, *On the functional relations for the Euler-Zagier multiple zeta-functions*, Tokyo J. Math. **41** (2018), 477–485.

[8] K. Matsumoto, *Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables*, in Number Theory: Tradition and Modernization, by W. Zhang and Y. Tanigawa, Springer (2006), 153–173.

[9] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in Number Theory for the Millennium (Urbana, 2000), Vol. II, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, Natick, MA, (2002), 417–440.

[10] Y. Ohno and N. Wakabayashi, *Cyclic sum of multiple zeta values*, Acta Arith. **123** (2006), 289–295.

[11] H. Tsumura, *On functional relations between the Mordell–Tornheim double zeta functions and the Riemann zeta function*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **142** (2007), 395–405.

[12] T. Tanaka and N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*,' J. Algebra **323** (2010), 766–778.

[13] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1275–1283.

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University
Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395, Japan
E-mail: t-onozuka@imi.kyushu-u.ac.jp