階乗の積が階乗と等しくなるペアについて

名古屋大学多元数理科学研究科　武田　渉

Wataru Takeda
Graduated school of Mathematics,
Nagoya University

概要

本稿は 2020 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「解析的整数論の展望と諸問題」における筆者の講演に基づくものである．本研究では階乗の積に関する方程式 $l_1!\cdots l_{m-1}! = l_m!$ を代数体に一般化し, ある性質を満たす解の有限性を与えた.

1　Surányi-Hickerson 予想

本研究では階乗の積が一つの階乗と等しくなるような組, つまり, 方程式

$$l_1!\cdots l_{m-1}! = l_m! \tag{1.1}$$

を満たすような m 個の整数 $1 < l_1 \leq \cdots \leq l_{m-1} < l_m$ の組 $(l_1,\ldots,l_m)$ を考える．この方程式 (1.1) の解に関する有名な予想として Surányi-Hickerson 予想と呼ばれるものがある．この予想について述べる前に簡単に方程式 (1.1) の解について考える．まず, $m-2$ 個の任意の正の整数 $a_1,\cdots,a_{m-2}$ に対して，$A = a_1!\cdots a_{m-2}!$ とすると $(l_1,\ldots,l_{m-2},l_{m-1},l_m) = (a_1,\ldots,a_{m-2},A-1,A)$ は方程式 (1.1) の解となることがわかる．このように最後の l_{m-1}, l_m の差が $l_{m-1} - l_m = 1$ を満たす解 $(l_1,\ldots,l_{m-1},l_m)$ を自明解と呼ぶ．構成の方法から, 自明解が無限個あることは直ちにわかるが, その一方で非自明解については以下の予想が存在する.

Conjecture 1.2 (Surányi-Hickerson 予想)**.** 方程式 (1.1) の非自明解は $(6,7,10)$, $(3,5,7,10)$, $(2,5,14,16)$, $(2,3,3,7,9)$ のみである.

この予想は未だに示されていないが, Hickerson により $l_m \leq 410$ までで現在見つかっている非自明解が $(6,7,10)$, $(3,5,7,10)$, $(2,5,14,16)$, $(2,3,3,7,9)$ のみである

ことが分かっている [Er75]. 一般の m についての研究は多くはないが, $m=3$ の場合は近年も活発に研究されており, 現在のところ, 2019 年に Habsieger によって $l_m < 10^{3000}$ までは非自明解が $(6,7,10)$ のみであることが示されている [Ha19].

また Luca により Oesterlé-Masser 予想 (ABC 予想) の仮定のもとで $l_{m-2}, l_m - l_{m-1}, l_m$ の間の評価式が与えられた. その評価式を満たす 3 つ組 (l_{m-2}, l_{m-1}, l_m) は有限個であるため, それにより非自明解の有限性が Oesterlé-Masser 予想のもとで示されている [Lu07].

本研究では方程式 (1.1) を一般の代数体に一般化したときの解について考察した. まず, 代数体上に一般化した階乗関数 $\Pi_K(l)$ を定める. 以下, K を代数体, $\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする. このとき, $\Pi_K(l)$ を以下のように定める:

$$\Pi_K(x) = \prod_{\mathfrak{N}\mathfrak{a} \le x} \mathfrak{N}\mathfrak{a} = \prod_{n \le x} n^{a_K(n)}.$$

ここで $a_K(n)$ は $\mathcal{O}_K$ のイデアル $\mathfrak{a}$ でそのイデアルノルムが $\mathfrak{N}\mathfrak{a} = n$ となるものの数である. よく知られた事実ではあるが, このイデアル個数関数 $a_K(n)$ は以下の乗法的性質を満たす: $\gcd(m,n)=1$ のとき,

$$a_K(mn) = a_K(m)a_K(n).$$

このように階乗関数を定めて, 方程式 (1.1) の一般化として考える方程式を以下のように定める. m 個の整数 $1 < l_1 \le \cdots \le l_{m-1} < l_m$ に対して

$$\Pi_K(l_1)\cdots\Pi_K(l_{m-1}) = \Pi_K(l_m). \tag{1.3}$$

方程式 (1.3) は $K = \mathbf{Q}$ のとき, 方程式 (1.1) に一致する. また, 方程式 (1.3) の解 $(l_1, \ldots, l_m)$ が自明解であるとは, $l_{m-1} < \mathfrak{N}\mathfrak{a} < l_m$ となるイデアル $\mathfrak{a}$ が存在しないことと定める. 例えば $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3}), m=3$ のとき, $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$ における素数の分解について以下のことが分かる:

素数 p	$\mathcal{O}_K$での振る舞い	$k \ge 1$ に対して $a_K(p^k)$ の値
$p \equiv 1 \mod 3$	(p) は完全分解	$a_K(p^k) = k+1$
$p \equiv 2 \mod 3$	(p) は $\mathcal{O}_K$ 上の素イデアル	$a_K(p^{2k-1}) = 0, a_K(p^{2k}) = 1$
$p = 3$	(3) は完全分岐	$a_K(p^k) = 1$

これと先に指摘した $a_K(n)$ の乗法性から, $a_K(n)$ の値をすべて求めることができ, (1.3) の解として $(4,9,12), (12,247,252), (16,111,117)$ が見つかる. ここで, $a_K(10) = a_K(11) = a_K(248) = a_K(249) = a_K(250) = a_K(251) = 0$ であることから $(4,9,12), (12,247,252)$ は自明解であり, $a_K(112) = 2$ であることから $(16,111,117)$ は非自明解となる.

この設定の下, 私は自明解の有限性を示した.

Theorem 1.4 (T. [Ta19]). 任意の代数体 $K \neq \mathbf{Q}$ に対して, 方程式 (1.3) の自明解は有限個である.

冒頭で指摘したように $\mathbf{Q}$ のときは自明解の無限性が知られていたが, Theorem 1.4 は $\mathbf{Q}$ 以外の代数体では Diophantine 方程式 (1.3) の自明解は有限個であることを主張している. つまり, $\mathbf{Q}$ のときとそれ以外では逆の結果が表れたということになる. これは $K \neq \mathbf{Q}$ のとき, 無限個の整数 n で $a_K(n) > 1$ となることが理由である.

2 完全分解する素数の Bertrand 型評価

この章では Theorem 1.4 の証明のために完全分解する素数の Bertrand 型の結果を証明する. Bertrand は 1845 年に任意の正の整数 n に対して, $n < p \leq 2n$ を満たす素数 p が存在するということを予想した. この予想は 1852 年に Chebyshev によって完全に証明され, その一般化は様々な形で行われている. その中でも代数体の整数環のイデアルに対する一般化として, Hulse と Murty によって, 以下のような結果が証明された:

Theorem 2.1 (Hulse-Murty. 2017. [HM17]). $K \neq \mathbf{Q}$ を代数体とする. 任意の $A > 1$ に対して, 二つの正の定数 $c(A) > 0$ と $c(K) > 0$ が存在して, 任意の $x > \exp(c(A)c(K))$ に対して, $\mathcal{O}_K$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ でイデアルノルムの大きさが $\mathfrak{N}\mathfrak{p} \in [x, Ax]$ となるものが存在する.

簡単のため, 上の Theorem 2.1 では明示的に書いてはいないが, 正の定数 $c(K)$ は同じ論文 [HM17] 内で明示的に与えられている. その定数 $c(K)$ は代数体 K が $\mathbf{Q}$ 上 Galois 拡大であるかどうかなどで計算される. ここで, Hulse と Murty は Theorem 2.1 の証明のために Lagarias と Odlyzko [LO77] によって示された Chebotarev 密度定理の誤差項に関する結果を用いているため, より詳しく Galois 群の共役類に対応した Bertrand 型の評価を得ることが期待される. 本研究では, 完全分解する素数の分布が重要であるため, [HM17] の証明に倣って, 自明な共役類 $\{\mathrm{id}\}$ に対応する Bertrand 型評価を与えた.

ここで, Lagarias と Odlyzko の結果を説明するためにいくつか記号を定義する. まず, L/K を Galois 拡大とし, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とする. G の各共役類 C に対して, 対応

する素イデアルの個数関数 $\pi_C(x)$ を以下のように定める:

$$\pi_C(x) = \#\{\mathfrak{p} : \mathcal{O}_K\text{の素イデアル} \mid \mathfrak{p}\text{ は } L \text{ で不分岐}, [(\mathfrak{p}, L/K)] = C, \mathfrak{N}\mathfrak{p} \leq x\}.$$

ここで $[(\mathfrak{p}, L/K)]$ は $\mathfrak{p}$ に対応する Frobenius 写像の共役類である. このとき, Lagarias と Odlyzko は以下の結果を証明した:

Theorem 2.2 (Lagarias-Odlyzko. 1977. [LO77])**.** L/K を Galois 拡大とし, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, $[L : \mathbf{Q}] = n_L$ とする. また L の判別式の絶対値を D_L とする. このとき, 計算可能な正の定数 c_1, c_2 が存在して以下を満たす: 任意の $x > \exp\left(10n_L(\log D_L)^2\right)$ に対して,

$$\left|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x) + \frac{|C|}{|G|}(-1)^{\varepsilon}\mathrm{Li}(x^{\beta})\right| \leq c_1 x \exp\left(-c_2\sqrt{\frac{\log x}{n_L}}\right).$$

ここで $\mathrm{Li}(x^{\beta})$ の項は Dedekind ゼータ関数 $\zeta_L(s)$ の例外零点 $s = \beta$ が存在する場合のみ現れる. また, ε は 0 または 1 で L, K, C に依存して決まる.

ここで, もし $\mathfrak{p}$ が L で完全分解するならば Frobenius 写像 $(\mathfrak{p}, L/K)$ は恒等写像であり, $|[(\mathfrak{p}, L/K)]| = 1$ となる. また, ε の [LO77] における定義から, 完全分解するものを考える場合, $\varepsilon = 0$ ということも分かる. この Lagarias と Odlyzko の結果を用いて, 以下のような完全分解する素数についての Bertrand 型の結果を与えた. 以下, $\pi_{s.c.}(x)$ を $p \leq x$ かつ K 内で完全分解する素数の個数とする.

Lemma 2.3. 代数体 $K \neq \mathbf{Q}$ に対して K^{gal} を拡大 $K/\mathbf{Q}$ の Galois 閉包とし, その拡大次数を $[K^{gal} : \mathbf{Q}] = k$ とする. さらに D を K^{gal} の判別式の絶対値とする. このとき, 任意の $A > 1$ に対して, 計算可能定数 $c(A) > 0$ で次を満たすようなものが存在する: 任意の $x > \exp(c(A)k(\log D)^2)$ に対して, $x < p \leq Ax$ となるような完全分解する素数 p が存在.

Proof. まず, 素数 p が K で完全分解することと Galois 閉包 K^{gal} で完全分解することは同値であるため, 一般性を失わずに $K/\mathbf{Q}$ が Galois 拡大と仮定できる. まず, Theorem 2.2 と先の注意から以下の不等式を得る.

$$\begin{aligned}&\pi_{s.c.}(Ax) - \pi_{s.c.}(x)\\ &> \frac{1}{k}\left(\mathrm{Li}(Ax) - \mathrm{Li}(x)\right) - \frac{1}{k}\left(\mathrm{Li}\left((Ax)^{\beta}\right) - \mathrm{Li}(x^{\beta})\right) - 2Ac_1 x \exp\left(-c_2\sqrt{\frac{\log x}{k}}\right).\end{aligned}$$

この不等式の右辺が $x > \exp(c(A)k(\log D)^2)$ で正であることを示せば良い.

ここで Stark [St74] によって $K/\mathbf{Q}$ が Galois 拡大で例外零点 β_0 が存在するとき, 以下を満たすことが知られている: ある正の定数 c_3 が存在して,

$$1-\frac{1}{4\log D}<\beta_0<1-\frac{c_3}{D^{\frac{1}{k}}}.$$

また, 固定した $x>\exp\left(10k(\log D)^2\right)$ と $A>1$ に対して $\mathrm{Li}\left((Ax)^{\beta}\right)-\mathrm{Li}(x^{\beta})$ が β に関する単調増加関数であることから, $\beta_0=1-c_3D^{-\frac{1}{k}}$ として, β を β_0 に置き換えた式

$$\frac{1}{k}\left(\mathrm{Li}(Ax)-\mathrm{Li}(x)\right)-\frac{1}{k}\left(\mathrm{Li}\left((Ax)^{\beta_0}\right)-\mathrm{Li}(x^{\beta_0})\right)-2Ac_1x\exp\left(-c_2\sqrt{\frac{\log x}{k}}\right)>0$$

を示す. この不等式の $\mathrm{Li}(x)$ に部分積分を用いることでこの不等式は以下の形に書きかえることができる:

$$\begin{aligned}&\frac{Ax}{\log Ax}-\frac{(Ax)^{\beta_0}}{\beta_0\log Ax}+\int_{(Ax)^{\beta_0}}^{Ax}\frac{dt}{(\log t)^2}\\&>\frac{x}{\log x}-\frac{x^{\beta_0}}{\beta_0\log x}+\int_{x^{\beta_0}}^{x}\frac{dt}{(\log t)^2}+2Akc_1x\exp\left(-c_2\sqrt{\frac{\log x}{k}}\right).\end{aligned}$$

そして, $\int_{x^{\beta_0}}^{x}\frac{dt}{(\log t)^2}$ も $x>\exp(10k(\log D)^2)$ の範囲で x に関する単調増加関数であるため,

$$\frac{Ax\beta_0-(Ax)^{\beta_0}}{\beta_0\log Ax}>\frac{x\beta_0-x^{\beta_0}}{\beta_0\log x}+2Akc_1x\exp\left(-c_2\sqrt{\frac{\log x}{k}}\right)$$

と積分をなくしたものを得ることができれば十分である. さらに $x>10$ で $\frac{x\beta_0-x^{\beta_0}}{\beta_0\log x}>0$ であることに注意して, 両辺を $\frac{x\beta_0-x^{\beta_0}}{\beta_0\log x}$ で割ることで以下の式に変わる:

$$A\frac{\beta_0-(Ax)^{\beta_0-1}}{\beta_0-x^{\beta_0-1}}\frac{\log x}{\log Ax}>1+\frac{2A\beta_0kc_1\log x}{\beta_0-x^{\beta_0-1}}\exp\left(-c_2\sqrt{\frac{\log x}{k}}\right).$$

これを十分大きな x で示すことが目標である. $x=\exp\left(c(A)k(\log D)^2\right)$ とするとき, 右辺は

$$\frac{2\beta_0Ak^2c_1c(A)(\log D)^2D^{\frac{1}{k}-c_2\sqrt{c(A)}}}{D^{\frac{1}{k}}-c_3-D^{\frac{1}{k}}\exp(-c_3c(A)k(\log D)^2D^{-\frac{1}{k}})}\tag{2.4}$$

となる. まず, (2.4) の分子について考える. Minkowski bound と Stirling の公式により得られる評価

$$k\leq\frac{2}{\log 3}\log D\tag{2.5}$$

を用いると, (2.4) の分子は

$$\frac{8Ac_1}{(\log 3)^2}c(A)(\log D)^4 D^{\frac{1}{2}-c_2\sqrt{c(A)}}$$

以下となる. 特に $c(A) > 4c_2^{-2}$ とすると

$$8Ac_1 c(A)(\log 3)^2 3^{\frac{1}{2}-c_2\sqrt{c(A)}}$$

により (2.4) の分子は上から抑えられる. 続いて, (2.4) の分母について考える. まず, Stark の結果より $1-\frac{1}{4\log D} < 1-c_3 D^{-\frac{1}{k}}$ であり, 判別式の絶対値の下限が $3 \le D$ であることから, $c_3 < \frac{1}{4}D^{\frac{1}{k}}$ ということがわかる. ここで, $c_3 c(A)k(\log D)^2 D^{-\frac{1}{k}} \ge \log 3$ と仮定すると, (2.4) の分母は

$$D^{\frac{1}{k}} - c_3 - D^{\frac{1}{k}} \exp\left(-c_3 c(A)k(\log D)^2 D^{-\frac{1}{k}}\right) \ge \frac{2}{3}D^{\frac{1}{k}} - c_3 > \frac{5}{12}D^{\frac{1}{k}}$$

となる. さらに評価 (2.5) より, $D^{\frac{1}{k}} \ge \sqrt{3}$ となるため,

$$D^{\frac{1}{k}} - c_3 - D^{\frac{1}{k}} \exp\left(-c_3 c(A)k(\log D)^2 D^{-\frac{1}{k}}\right) > \frac{5\sqrt{3}}{12} > \frac{2}{3}$$

が従う. また, $0 < x \le \log 3$ に対して $e^{-x} \le 1 - \frac{2}{3\log 3}x$ が成立するため, $c_3 c(A)k(\log D)^2 D^{-\frac{1}{k}} \le \log 3$ のときも

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{k}} - c_3 - D^{\frac{1}{k}} \exp\left(-c_3 c(A)k(\log D)^2 D^{-\frac{1}{k}}\right) &\ge \frac{2}{3\log 3}c_3 c(A)k(\log D)^2 - c_3 \\ &\ge \left(\frac{4}{3}c(A)\log 3 - 1\right)c_3 \end{aligned}$$

が成立する. よって, $c(A) > \frac{2+3c_3}{4c_3\log 3}$ と仮定すると

$$D^{\frac{1}{k}} - c_3 - D^{\frac{1}{k}} \exp\left(-c_3 c(A)k(\log D)^2 D^{-\frac{1}{k}}\right) > \frac{2}{3}$$

が常に成立することがわかる. また, 左辺は $k \ge 2, D \ge 3$ に対して,

$$A\frac{\beta_0 - (2x)^{\beta_0 - 1}}{\beta_0 - x^{\beta_0 - 1}}\frac{\log x}{\log Ax} > \frac{2Ac(A)(\log 3)^2}{\log A + 2c(A)(\log 3)^2}$$

が成立するため, 最終的に

$$\frac{2Ac(A)(\log 3)^2}{\log A + 2c(A)(\log 3)^2} > 12Ac_1 c(A)(\log 3)^2 3^{\frac{1}{2}-c_2\sqrt{c(A)}} \tag{2.6}$$

が十分大きな $c(A)$ で成立することを示すことになるが, 左辺は A に収束し, 右辺は 0 に収束することから, K に依らない十分大きな $c(A)$ に対して, (2.6) が成立する. つまり, $\pi_{s.c.}(Ax) - \pi_{s.c.}(x) > 0$ となることが分かる. □

3　主定理の証明

この章では本稿の主定理の証明をする. その前に, m 個の組 $(l_1, \ldots, l_m)$ が自明解であることの必要十分条件を与える.

Lemma 3.1. 以下の 2 つの主張は同値である.

1. m 個の組 $(l_1, \ldots, l_m)$ が自明解である.
2. $l_m = \prod_p p^{r_p}$ としたとき,

$$\Pi_K(l_1) \cdots \Pi_K(l_{m-2}) = l_m^{a_K(l_m)} = \left(\prod_p p^{r_p}\right)^{\prod_p a_K(p^{r_p})}$$

が成立.

Proof. まず, $(l_1, \ldots, l_m)$ が自明解であると仮定する. このとき, $\Pi_K(l_1) \cdots \Pi_K(l_{m-1}) = \Pi_K(l_m)$ は両辺を $\Pi_K(l_{m-1})$ で割ることで

$$\Pi_K(l_1) \cdots \Pi_K(l_{m-2}) = \prod_{l_{m-1} < \mathfrak{N}\mathfrak{a} \leq l_m} \mathfrak{N}\mathfrak{a}$$

と変形できる. ここで自明解であることから,

$$\prod_{l_{m-1} < \mathfrak{N}\mathfrak{a} \leq l_m} \mathfrak{N}\mathfrak{a} = l_m^{a_K(l_m)}$$

がわかるため, 2 の主張を得る. 2 つ目の等号はイデアル個数関数の乗法性から $a_K(l_m) = \prod_p a_K(p^{r_p})$ が得られることから従う.

逆に $\Pi_K(l_1) \cdots \Pi_K(l_{m-2}) = l_m^{a_K(l_m)}$ であるとき, $l_{m-1} = \max\{\mathfrak{N}\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} : \mathcal{O}_K$ のイデアル $\} \cap [l_{m-2}, l_m)$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} \Pi_K(l_m) &= l_m^{a_K(l_m)} \Pi_K(l_{m-1}) \\ &= \Pi_K(l_1) \cdots \Pi_K(l_{m-1}) \end{aligned}$$

が成り立つため, m 個の組 $(l_1, \ldots, l_m)$ は解である. さらに l_{m-1} の定義から $\mathfrak{N}\mathfrak{a} \in (l_{m-1}, l_m)$ となるようなイデアル $\mathfrak{a}$ は存在しないため, $(l_1, \ldots, l_m)$ は自明解である. 以上で同値性が証明された. □

この補題を用いて, 主定理の証明を行う.

Theorem 1.4 の証明. 代数体 $K \neq \mathbf{Q}$ に対して拡大次数を $n = [K : \mathbf{Q}]$ とする. また K^{gal} を拡大 $K/\mathbf{Q}$ の Galois 閉包とし, その拡大次数を $k = [K^{gal} : \mathbf{Q}]$ とする. さらに D を K^{gal} の判別式の絶対値とする. まず, $p_1 = \min\{\mathfrak{N}\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} : \mathcal{O}_K \text{ のイデアル }\} \cap \mathbf{Z}_{>1}$ とする. つまり, 2 番目に小さなイデアルのノルムである. Lemma 2.3 より, ある定数 $c(p_1)$ が存在して, 任意の $x \geq \exp(c(p_1)k(\log D)^2)$ に対して $x < p \leq p_1 x$ なる完全分解する素数 p が存在することがわかる. いま, q を K において完全分解する素数で $q \geq \exp(c(p_1)k(\log D)^2)$ と $n^{\pi_{s.c.}(q)} > n(m-2)$ を満たすものとする.

ここで, $q \leq l_{m-2} < p_1 q$ に対して m 個の整数の組 $(l_1, \ldots, l_m)$ が自明解ならば, Lemma 3.1 から

$$\Pi_K(l_1) \cdots \Pi_K(l_{m-2}) = \left(q^{r_q} \prod_{p \neq q} p^{r_p} \right)^{\prod_p a_K(p^{r_p})} \tag{3.2}$$

が成り立つ. ただし, q の選び方から $r_p \geq 0$ であり $r_q \geq 1$ である. このとき, $r_q \geq 1$ かつ完全分解する素数 p に対して $a_K(p^{r_p}) \geq n$ であるため, (3.2) の右辺は $q^{n^{\pi_{s.c.}(q)}}$ で割れる. $\Pi_K(l)$ に q の要素が q の次に現れるのは $p_1 q$ であるため, $q \leq l_{m-2} < p_1 q$ という仮定から $\Pi_K(l_i)$ $(1 \leq i \leq m-2)$ は最大で q^n でしか割れない. つまり, (3.2) の左辺 $\Pi_K(l_1) \cdots \Pi_K(l_{m-2})$ は最大で $q^{n(m-2)}$ でしか割れない. q は $n(m-2) < n^{\pi_{s.c.}(q)}$ を満たすものとして取っているため, これは矛盾. よって, $q \leq l_{m-2} < p_1 q$ に対して m 個の整数の組 $(l_1, \ldots, l_m)$ は自明解になり得ない.

その一方, Lemma 2.3 から完全分解するより大きな素数 q_1 で $q < q_1 \leq p_1 q$ を満たすものが存在する. ここで $q_1 \geq \exp(c_{p_1} k(\log D)^2)$ かつ $n^{\pi_{s.c.}(q_1)} > n(m-2)$ であるため, 先と同じ議論ができ, $q_1 \leq l_{m-2} < p_1 q_1$ に対して m 個の整数の組 $(l_1, \ldots, l_m)$ は自明解でなく, 完全分解する素数 q_2 で $q_1 < q_2 \leq p_1 q_1$ を満たすものが存在する.

以下, 帰納法を用いることで $q \leq l_{m-2}$ に対して m 個の整数の組 $(l_1, \ldots, l_m)$ は自明解でないことがわかり, 自明解の有限性が得られる. □

4 自明解の上限

Theorem 1.4 の証明を見ると現れる定数はすべて計算可能であることがわかる. そこで, この章では具体的に解の存在しない範囲を求める. まず, Lagarias と Odlyzko によって与えられた Chebotarev 密度定理の誤差項に関する結果 (Theorem 2.2) における正の定数 c_1 と c_2 を計算する必要がある. この定数について考えた論文として, Winckler の結果が挙げられる [Wi13]. Theorem 2.2 と同じ記法の下, Winckler は以

下の結果を証明した.

Theorem 4.1 (Winckler. 2013. [Wi13]). 任意の $x > \exp\left(8n_L(\log D_L)^2\right)$ に対して,

$$\left|\pi_C(x) - \frac{|C|}{|G|}\mathrm{Li}(x) + \frac{|C|}{|G|}(-1)^{\varepsilon}\mathrm{Li}(x^{\beta})\right| \leq 7.84 \times 10^{14} x \exp\left(-\frac{1}{99}\sqrt{\frac{\log x}{n_L}}\right)$$

が成立する.

この結果を方程式 (1.3) の有限性の証明に適応すると, 解の存在しない範囲として, $C = \max\{2.46 \times 10^7, \frac{2+3c_3}{4c_3 \log 3}\}$ としたとき, $l_{m-2} > \exp(Ck(\log D)^2)$ を得る. ただし, c_3 は Lemma 2.3 の証明において使用した Stark によって与えられた定数である. これにより, 具体的な計算が行われたが Theorem 1.4 の証明は Lagarias と Odlyzko の Theorem 2.2 の $K = \mathbf{Q}, C = \{\mathrm{id}\}$ のときのみを考えることで達成されていたため, $C = \{\mathrm{id}\}$ として再計算を行い, 以下のような Lagarias と Odlyzko, Winckler の結果の特殊版を証明した.

Lemma 4.2. $K/\mathbf{Q}$ を Galois 拡大とし, 拡大次数を $[K : \mathbf{Q}] = n$, D を K の判別式の絶対値とする. このとき, 任意の $x > \exp\left(400n(\log D)^2\right)$ に対して,

$$\left|\pi_{s.c.}(x) - \frac{1}{n}\mathrm{Li}(x) + \frac{1}{n}\mathrm{Li}(x^{\beta})\right| < 9x \exp\left(-\frac{1}{29}\sqrt{\frac{\log x}{n}}\right)$$

が成立する. ここで, $\mathrm{Li}(x^{\beta})$ は $\zeta_K(s)$ の $1 - (4\log D)^{-1} < \beta < 1$ なる例外零点 β が存在するときのみ現れる.

この評価を Theorem 1.4 の証明に適応すると, 解の存在しない範囲として, 以下を得る:

Theorem 4.3 (cf. T. [Ta20]). $K \neq \mathbf{Q}$ を有理数体でない代数体とし, K^{gal} を $K/\mathbf{Q}$ の Galois 閉包とする. また, $K^{\mathrm{gal}}/\mathbf{Q}$ の拡大次数を $[K^{\mathrm{gal}} : \mathbf{Q}] = k$, K^{gal} の判別式の絶対値を D とする. このとき, $C = \max\{2.31 \times 10^5, \frac{2+3c_3}{4c_3 \log 3}\}$ とすると, $l_{m-2} > \exp(Ck(\log D)^2)$ において, 方程式 (1.3) は解を持たない.

定数 c_3 についてであるが, $c_3 = \frac{\pi}{6}$ で十分であることが推測されているため [BG62, St74], 上の Theorem 4.3 も $C = 2.31 \times 10^5$ であることが期待できる. Lemma 4.2 の証明は Lagarias と Odlyzko [LO77] における証明の定数部分を丁寧に計算することで達成されるため, 紙面の都合上省略する.

Lemma 4.2 を用いて, Theorem 4.3 の証明を行う. まず, 例外零点 β が存在する場合を考察する. Theorem 1.4 の証明における p_1 の最小値は 2 であるため, $A = 2$ で証明すれば十分である. 以下では不等式 (2.6) について考える. Lemma 2.3 の証明に注意すると右辺の $2A$ は $A + 1$ と置き換えることができることがわかるため, 置き換えたものを扱う. すると示すべきことはある正の定数 $c(2) > \max\{400, 3364, \frac{2+3c_3}{4c_3 \log 3}\}$ が存在し, 任意の $c > c(2)$ に対して

$$\frac{4c(\log 3)^2}{\log 2 + 2c(\log 3)^2} > 1 + 162c(\log 3)^2 3^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{c}}{29}} \tag{4.4}$$

ということである. 計算を行うと $c(2) = \max\{2.31 \times 10^5, \frac{2+3c_3}{4c_3 \log 3}\}$ とすれば十分であることがわかる. 一方, 例外零点 β が存在しない場合は, 不等式

$$\frac{2\log x}{\log 2x} > 1 + 27ck^2(\log D)^2 D^{-\frac{\sqrt{c}}{29}}$$

を考えることになるが, 不等式 (4.4) がこの不等式を与えるため, $c(2) = \max\{2.31 \times 10^5, \frac{2+3c_3}{4c_3 \log 3}\}$ となる. よって, Lemma 2.3 の定数を明示的にした以下の補題が従う.

Lemma 4.5. 代数体 K に対して K^{gal} を拡大 $K/\mathbf{Q}$ の Galois 閉包とし, その拡大次数を $[K^{gal} : \mathbf{Q}] = k$ とする. さらに D を K^{gal} の判別式の絶対値とする. このとき, $C = \max\{2.31 \times 10^5, \frac{2+3c_3}{4c_3 \log 3}\}$ とすると, 任意の $x > \exp(Ck(\log D)^2)$ に対して $x < p \leq 2x$ となるような K で完全分解する素数 p が存在する.

これにより, Theorem 4.3 が従う.

謝辞

2020 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「解析的整数論の展望と諸問題」における講演の機会を与えてくださった中村隆先生, 赤塚広隆先生にこの場をお借りして感謝いたします. 本研究は JSPS 科研費 JP19J10705 の助成を受けたものです.

参考文献

[BG62] Paul T. Bateman and E. Grosswald. Imaginary quadratic fields with unique factorization, Illinois Journal of Mathematics **6**(1) (1962), 187–192.

[Er75] P. Erdős. Problems and results on number theoretic properties of consecutive integers and related questions, in: Congressus Numerantium XVI, Proceedings of the Fifth Manitoba Conference on Numerical Mathematics, (1975), 25–44.

[Ha19] L. Habsieger. Explicit Bounds For The Diophantine Equation $A!B! = C!$. The Fibonacci Quarterly, **57** (2019), 21–28.

[HM17] T. A. Hulse and M. Ram Murty. Bertrand's postulate for number fields. Colloquium Mathematicum **147** (2017), 165–180.

[LO77] J. C. Lagarias and A. M. Odlyzko, Effective versions of the Chebotarev density theorem, Algebraic Number Fields, Academic Press, London, (1977), 409–464.

[Lu07] F. Luca. On factorials which are products of factorials. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. **143** (2007), 533–542.

[St74] H. M. Stark. Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem, Inventiones Mathematicae. **23** (1974), 135–152.

[Ta19] W. Takeda. Finiteness of trivial solutions of factorial products yielding a factorial over number fields, Acta Arithmetica **190** (2019), 395–401.

[Ta20] W. Takeda. The distribution of prime ideals over number fields and Diophantine equations involving factorial functions, Ph.D dissertation, Nagoya University, (2020), doi:http://hdl.handle.net/2237/00031564

[Wi13] B. Winckler. Théorème de Chebotarev effectif, arXiv preprint arXiv:1311.5715, (2013).