ある性質をもつ数論的関数の漸近展開の誤差項に対する第二種 Volterra 型積分方程式の解について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 * 岩田　英人
Hideto Iwata
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

§1. 導入と結果

$\varphi(n)$ を Euler の関数とし,

$$E(x)=\sum_{n\le x}\varphi(n)-\frac{3}{\pi^2}x^2 \tag{1.1}$$

を $\varphi(n)$ の和に関する漸近公式の誤差項とする. J.Kaczorowski, K.Wiertelak は誤差項 $E(x)$ に対して次の第二種 Volterra 型積分方程式を考え, 解 $F(x)$ を求めた ([1] を参照).

$$F(x)-\int_0^\infty K(x,t)F(t)dt=E(x)\quad (x\ge 1), \tag{1.2}$$

ただし, $K(x,t)$ は

$$K(x,t)=\begin{cases}1/t & (0<t\le x)\\ 0 & (1\le x<t)\end{cases}$$

である積分核とする. また, 任意の $x\ge 0$ に対して

$$f(x)=-\sum_{n=1}^\infty\frac{\mu(n)}{n}\left\{\frac{x}{n}\right\} \tag{1.3}$$

とする. ただし, $\mu(n)$ は Möbius 関数であり, $\{x\}=x-[x]$ は実数 x の小数部分を表すものとする.

定理 **1.([1], Theorem1.1)** 方程式 (1.2) の解は

$$F(x)=(f(x)+A)x \tag{1.4}$$

となる. ただし, A は任意定数とする.

論文 [1] では積分方程式 (1.2) の一意的な解は $F(x)=xf(x)$ であるとなっているが, 恐らく Ax の項が抜けていると思われる. J.Kaczorowski, K.Wiertelak が行った上記の考察を Euler の関数以外の数論的関数で行ったところ, ある共通の性質をもつ数論的関数の誤差項について, 定理 1 と類似の結果が成立することが分かった. それらの結果の一般化として, 次の定理を講演にて発表した.

定理 **2.** $\{a(n)\}$ を

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{a(n)}{n^2}=k\alpha<\infty \tag{1.5}$$

* Furocho, Chikusa-ku, Nagoya, 464-8602, Japan.

を満たす複素数値数論的関数とする. ただし, k を 2 以上の整数とし, α は任意の複素数とする. また, $\{b(n)\}$ を

$$b(n) = \sum_{d|n} a(d)\frac{n}{d} \tag{1.6}$$

にて定義される数論的関数とする. $x \to \infty$ のとき,

$$\sum_{n \le x} b(n) = M(x) + E_1(x) = \alpha x^k + o(x^k), \tag{1.7}$$

ただし,

$$M(x) := \alpha x^2 \tag{1.8}$$

$$E_1(x) := \sum_{n \le x} b(n) - M(x) \tag{1.9}$$

とする. このとき, $E_1(x)$ に対する次の第二種 Volterra 型積分方程式

$$F(x) - \int_0^x t^{-1}F(t)dt = E_1(x) \quad (x \ge 1) \tag{1.10}$$

の解 $F(x)$ は自然数を除く x に対して, 下記の 3 つの想定の下

$$F(x) = (f(x) + A)x + k\alpha x^2 - \frac{k\alpha}{k-1}x^k \tag{1.11}$$

となる. ただし, A は任意の複素数であり, 任意の $x \ge 0$ に対して

$$f(x) := -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n}\left\{\frac{x}{n}\right\} \tag{1.12}$$

とする.

想定 **1.** 関数 $F(x)$ は有限区間にて整数点を除いて微分可能である.

想定 **2.** 関数 $F(x)$ は区間 $(0, \infty)$ にて Lebesgue 局所可積分である.

想定 **3.** 関数 $F(x)$ は想定 2 を満たす関数とし, さらに各自然数 N に対して

$$\int_0^{e^{-1}} |F(t)||\log t|^N \frac{dt}{t} < \infty$$

を満たすとする.

しかし講演発表後, 立教大学の鈴木雄太先生から条件 (1.5) の仮定の下では, 定理 2 は $k = 2$ の場合のみしか考えられないという指摘を受けた. さらに, 想定 1-3 を外すことも出来るとの指摘を受け, 上記の定理を次の形に改良することが出来た.

定理 **3.** $\{a(n)\}$ を

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^2} = 2\alpha \tag{1.13}$$

を満たす複素数値数論的関数とする. ただし, α は任意の複素数とする. また, $\{b(n)\}$ を

$$b(n) = \sum_{d|n} a(d)\frac{n}{d} \tag{1.14}$$

にて定義される数論的関数とする. $x \to \infty$ のとき,

$$\sum_{n \le x} b(n) = M(x) + E_1(x), \tag{1.15}$$

ただし,

$$M(x) := \alpha x^2 \tag{1.16}$$

$$E_1(x) := \sum_{n \le x} b(n) - M(x) \tag{1.17}$$

とする. この $E_1(x)$ に対して, 次の第二種 Volterra 型積分方程式

$$F(x) - \int_0^x F(t)\frac{dt}{t} = E_1(x) \quad (x \geq 0) \tag{1.18}$$

を考える. このとき, 任意の複素数 A に対して, 関数

$$F(x) = (f(x) + A)x \quad (x \geq 0) \tag{1.19}$$

は積分方程式 (1.18) の解であり, (1.19) により方程式 (1.18) の解は全て尽くされる. ただし, 任意の $x \geq 0$ に対して

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n} \left\{\frac{x}{n}\right\} \tag{1.20}$$

とする.

想定 1 を外すことが出来ることについては, 2 章の定理 3 の証明の部分で述べる. 想定 2 については, $f(x)$ の定義式 (1.20) は条件 (1.13) を考慮すると,

$$f(x) = -2\alpha x + \sum_{n\leq x} \frac{a(n)}{n} \left[\frac{x}{n}\right]$$

と書ける. よって, 想定 2 は外すことが出来る. 想定 3 を外すことが出来ることについては, 関数 $F(x)$ が方程式 (1.18) の解であるとき, (1.18) における積分を極限

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^x F(t)\frac{dt}{t} \tag{1.21}$$

が存在するという意味で解釈することから従う.

また, J.Kaczorowski, K.Wiertelak は論文 [1] において積分方程式 (1.2) の解を (1.3) を用いて表した後, 次の様に誤差項 $E(x)$ を表した.

定理 4.([1], Theorem1.2) $x \geq 0$ に対して,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left\{\frac{x}{n}\right\}^2 \tag{1.22}$$

とする. このとき, $E(x)$ は次のように分解される.

$$E(x) = E^{\mathrm{AR}}(x) + E^{\mathrm{AN}}(x), \tag{1.23}$$

ただし,

$$E^{\mathrm{AR}}(x) = xf(x), \quad E^{\mathrm{AN}}(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2} \tag{1.24}$$

であり, $f(x), g(x)$ はそれぞれ (1.3), (1.22) で与えられるものとする.

$E^{\mathrm{AR}}(x)$ については (1.4) において $A = 0$ としている. $E^{\mathrm{AR}}(x)$ と $E^{\mathrm{AN}}(x)$ をそれぞれ $E(x)$ の *arithmetic part*, *analytic part* と呼ぶ. J.Kaczorowski, K.Wiertelak は $E^{\mathrm{AR}}(x)$ と $E^{\mathrm{AN}}(x)$ のそれぞれについて Ω-評価を得ている ([1], Corollary 1.4., Theorem 1.8.). 証明の詳細については論文 [1], [4] を参照して頂きたい.

さらに 2012 年に J.Kaczorowski, K.Wiertelak は次の結果を得ている ([2] を参照). Non-principal な実 Dirichlet 指標 $\chi \pmod q (q > 2)$ に対して, twisted Euler φ 関数 $\varphi(n,\chi)$ を

$$\varphi(n,\chi) := n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right)$$

とする. J.Kaczorowski, K.Wiertelak はこの $\varphi(n,\chi)$ の和に関する漸近公式の誤差項に対して, 論文 [1] と類似の考察を行った.

$$E(x,\chi) = \sum_{n\leq x} \varphi(n,\chi) - \frac{x^2}{2L(2,\chi)} \tag{1.25}$$

とし,

$$E_1(x,\chi) = \begin{cases} E(x,\chi) & (x \notin \mathbb{N}) \\ \frac{1}{2}(E(x-0,\chi) + E(x+0,\chi)) & (\text{その他}) \end{cases} \tag{1.26}$$

とする. ここで, $L(s,\chi)$ は χ に付随する Dirichlet L-関数とする. さらに,

$$s(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Z}) \\ \frac{1}{2} - \{x\} & (\text{その他}) \end{cases} \tag{1.27}$$

とし, $x \geq 0$ に対して

$$f(x,\chi) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)\chi(d)}{d} s\left(\frac{x}{d}\right) \tag{1.28}$$

$$g(x,\chi) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)\chi(d) \left\{\frac{x}{d}\right\}\left(\left\{\frac{x}{d}\right\} - 1\right). \tag{1.29}$$

このとき, $E_1(x,\chi)$ に対して次の第二種 Volterra 型積分方程式

$$F(x,\chi) - \int_0^{\infty} K(x,t)F(t,\chi)dt = E_1(x,\chi) \quad (x \geq 0) \tag{1.30}$$

を考える. ただし,

$$K(x,t) = \begin{cases} 1/t & (0 < t \leq x) \\ 0 & (0 \leq x < t) \end{cases}$$

である積分核とする. このとき, 積分方程式 (1.30) の解は次のようになる.

定理 5.([2], Theorem1.1) 方程式 (1.30) の解は A を任意定数として

$$F(x,\chi) = (f(x,\chi) + A)x \tag{1.31}$$

となる.

論文 [2] では一意的な解は $F(x,\chi) = xf(x,\chi)$ と書かれているが, やはり (1.4) における注意が同様になされると思われる. さらに, (1.31) において $A = 0$ とし, 論文 [2] では次の $E_1(x,\chi)$ の分解を得ている.

定理 6.([2], Theorem1.2) $x \geq 0$ に対して

$$E_1(x,\chi) = E^{\mathrm{AR}}(x,\chi) + E^{\mathrm{AN}}(x,\chi) \tag{1.32}$$

となる. ただし,

$$E^{\mathrm{AR}}(x,\chi) = xf(x,\chi), \quad E^{\mathrm{AN}}(x,\chi) = \frac{1}{2}g(x,\chi) \tag{1.33}$$

であり, $f(x,\chi), g(x,\chi)$ はそれぞれ (1.28), (1.29) により与えられるものとする.

§2. 定理 3 の証明

以下, 定理 3 の証明を行う. まず, $x \geq 0$ に対して関数

$$R(x) = E_1(x) - (f(x) + A)x \tag{2.1}$$

を定義する. まず定理 3 を証明するにあたり, 次の 2 つの補題を準備する.

補題 1. 任意の正の数 x と複素数 A に対し,

$$R(x) = -\int_0^x f(t)dt - Ax \tag{2.2}$$

が成立する.

証明. まず, 関数 $R(x)$ は任意の $x \geq 0$ に対して連続である. このことは $x = 0$ と x が自然数を除く実数に対しては自明である. N を自然数とし, 級数 (1.20) を 2 つの和に分けることで, $f(x)$ の $x = N$ における右極限と左極限がそれぞれ

$$f(N+0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n} \left\{ \frac{N+0}{n} \right\}$$
$$f(N-0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n} \left\{ \frac{N-0}{n} \right\}$$

となることが従う. 関係式

$$\left\{ \frac{N+0}{n} \right\} - \left\{ \frac{N-0}{n} \right\} = \begin{cases} 0 & (n \nmid N) \\ -1 & (n \mid N) \end{cases}$$

([1], P2691 を参照) を用いると,

$$f(N+0) - f(N-0) = \sum_{n \mid N} \frac{a(n)}{n} = \frac{b(N)}{N}.$$

従って,

$$\begin{aligned} R(N+0) - R(N-0) &= (E_1(N+0) - E_1(N-0)) - N(f(N+0) - f(N-0)) \\ &= b(N) - N \cdot \frac{b(N)}{N} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, $R(N-0) = R(N+0) = R(N)$ が従う. よって, 関数 $R(x)$ は任意の $x \geq 0$ に対して連続である.

次に, x を自然数でない正の実数とする. この条件の下, 定義式 (2.1) の両辺を微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} R(x) &= \frac{d}{dx}(E_1(x) - (f(x) + A)x) \\ &= \frac{d}{dx} E_1(x) - x f'(x) - (f(x) + A) \\ &= -M'(x) - x f'(x) - (f(x) + A) \\ &= -2\alpha x - x f'(x) - (f(x) + A) \end{aligned}$$

となる. 自然数でない正の実数 x に対して, $\{x/n\}' = 1/n$ ([1], p2691 を参照), 及び (1.13) を考慮し, (1.20) の両辺を微分すると

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n} \cdot \frac{1}{n} = -2\alpha$$

となる. $R(0) = 0$ と $R(x)$ の連続性を考慮することで, 全ての $x \geq 0$ に対して (2.2) が成立する. □

補題 2. $G(x)$ を $[0, \infty)$ 上で定義された複素数値関数とし, 任意の $x \geq 0$ に対して

$$\int_0^x |G(t)| \frac{dt}{t} < \infty \tag{2.3}$$

$$G(x) - \int_0^x G(t) \frac{dt}{t} = 0 \tag{2.4}$$

を満たすとする. このとき, 適当な複素数 $A = A(G)$ が存在し,

$$G(x) = Ax \tag{2.5}$$

となる.

証明. 任意の $x \geq 0$ に対して (2.5) が (2.3) と (2.4) を満たすことは明らかである. 逆に, 任意の $x \geq 0$ に対して (2.3) と (2.4) を満たす関数 $G(x)$ を任意に採る. (2.3) と (2.4) により, 関数

$$G(x) = \int_0^x G(t) \frac{dt}{t}$$

は区間 $[0,\infty)$ にて連続であることが従う. 従って, 再度 (2.4) を使うことで, 関数 $G(x)$ は区間 $[0,\infty)$ にて C^1-級となる. (2.4) の両辺を微分することで, $x>0$ に対して

$$G'(x)=\frac{G(x)}{x}$$

となる. よって, 任意の $x>0$ に対して $G(x)=Ax$ となり, $G(x)$ の連続性から任意の $x\geq 0$ に対して (2.5) が成立する. □

定理 3 の証明. まず, $F(x)$ を条件 (1.21) を満たす Volterra 型積分方程式 (1.18) の解とする. (2.1) と (1.18), (2.2) を用いることで, $x\geq 0$ に対して

$$\int_0^x t^{-1}(F(t)-tf(t))dt=F(x)-xf(x) \tag{2.6}$$

が得られる.

$$G(x)=F(x)-xf(x) \tag{2.7}$$

とおくと, 方程式 (2.6) は

$$\int_0^x t^{-1}G(t)dt=G(x)\quad (x\geq 0) \tag{2.8}$$

と変形される. 補題 2 を用いることで (2.5) が得られ, (2.7) に代入することにより解 (1.19) が得られる. なお, 1 章で述べた定理 2 の想定 1 は (2.6) から (2.8) を導くために課した条件であるが, 補題 2 を用いることで想定 1 を外せることが従う.

逆に, $F(x)$ が (1.19) の形の関数とする. このとき, 方程式 (1.18) の左辺は

$$\begin{aligned}F(x)-\int_0^x F(t)\frac{dt}{t}&=(f(x)+A)x-\int_0^x(f(t)+A)dt\\&=(f(x)+A)x-\int_0^x f(t)dt-Ax\\&=xf(x)-\int_0^x f(t)dt\end{aligned}$$

となる. 定義式 (2.1) と補題 1 を用いることで,

$$\begin{aligned}xf(x)-\int_0^x f(t)dt&=xf(x)+R(x)+Ax\\&=xf(x)+(E_1(x)-(f(x)+A)x)+Ax\\&=E_1(x).\end{aligned}$$

従って, (1.19) の形の関数 $F(x)$ は全ての $x\geq 0$ に対して積分方程式 (1.18) の解となる. 関数 $f(x)$ は有限和であることを考慮すると, 解 $F(x)$ が条件 (1.21) を満たすことも分かる.

§3. 補足

文献 [5] の項目 2.1.50 において, $A:=-1,\lambda:=0,\mu:=-1,f(x):=E_1(x)$ とすれば, Volterra 型積分方程式 (1.18) の解は (1.19) に一致することが確かめられる. その際, 次の事柄を用いる.

E_2 を区間 $[0,\infty)$ にて定義される複素数値関数とし, 任意の $x\geq 0$ に対して

$$\int_0^x |E_2(t)|\frac{dt}{t^2}<\infty$$

を満たすとする. このとき, 区間 $[0,\infty)$ にて定義される関数

$$F(x):=E_2(x)+x\int_0^x E_2(t)\frac{dt}{t^2} \tag{3.1}$$

は Volterra 型積分方程式

$$F(x) - \int_0^x F(t)\frac{dt}{t} = E_2(x) \tag{3.2}$$

を満たし, 全ての $x \geq 0$ に対して

$$\int_0^x |F(t)|\frac{dt}{t} < \infty$$

となる.

積分方程式 (1.18) の特殊解が (1.20) を用いて表されることも, (3.1) を使うことで直ちに従う. しかし本稿では定理 3 の証明として, 文献 [5] の項目 2.1.50 に記載の公式を使わず, 具体的に解をどの様に構成するかが明確な手法を採った.

§4. 今後の研究課題

J.Kaczorowski は 2013 年に, 次の定理を証明した ([3] を参照). 複素変数 $s = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ に対して, 絶対収束する無限積により定義された Euler 積多項式 $F(s)$ を

$$F(s) = \prod_p F_p(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1} \tag{4.1}$$

とする. ただし, 全ての素数 p と $1 \leq j \leq d$ に対して $|\alpha_j(p)| \leq 1$ とする. ここで, d は適当な素数 p_0 が少なくとも 1 つ存在し,

$$\prod_{j=1}^{d} \alpha_j(p_0) \neq 0$$

が成立するように採る. このとき, d を $F(s)$ の *Euler degree* という. (4.1) の形で表される Euler 積多項式 $F(s)$ に対して, Euler の関数の一般化である

$$\varphi(n, F) = n \prod_{p|n} F_p(1)^{-1} \tag{4.2}$$

を考える. ただし, n は自然数とする.

なお, $F(s) = \zeta(s)$(Riemann zeta 関数) とすると (4.2) は Euler の関数 $\varphi(n)$ となり, $F(s) = L(s, \chi)$(Dirichlet-L 関数) とすると (4.2) は twisted Euler φ 関数 $\varphi(n, \chi)$ に一致する. いずれの場合も Euler degree が 1 の場合に相当する. このとき, 次が成立する.

定理 7 ([3], Theorem1.1) Euler degree が d である Euler 積多項式 $F(s)$ に対して, $x \geq 1$ のとき

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n, F) = C(F)x^2 + O(x(\log 2x)^d) \tag{4.3}$$

が成立する. ただし, $C(F)$ は Euler 積多項式 $F(s)$ に依存する定数である.

今後の研究課題として, Euler degree が 1 の場合における漸近公式 (4.3) の誤差項に対して, J.Kaczorowski, K.Wiertelak が論文 [1], [2] で行った積分方程式を考え, 今回得た定理 3 と同様の結果を得たいと考えている.

謝辞

2020 年度 RIMS 共同研究「解析的整数論の展望と諸問題」において講演の機会を与えて下さいました研究代表者の中村隆先生, 研究副代表者の赤塚広隆先生, 及び発表内容の誤りを指摘して頂き数々の助言を下さった鈴木雄太先生にこの場をお借りして厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] J. Kaczorowski, K. Wiertelak, Oscillations of the remainder term related to the Euler totient function, J. Number Theory **130** (2010) 2683-2700.

[2] J. Kaczorowski, K. Wiertelak, On the sum of the twisted Euler function, Int. J. Number Theory **8** (7) (2012) 1741-1761.

[3] Jerzy. Kaczorowski, On a generalization of the Euler totient function, Monatsh Math **170** (2013) : 27-48.

[4] H. L. Montgomery, Fluctuations in the mean of Euler's phi function, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **97** (1-3) (1987) 239-245.

[5] A. D. Polyanin and A. V. Manzhirov, Handbook of Integral Equations, (CRC press, 1998)