Canonical systems arising from L-functions [1]

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. 序文

研究集会で発表した結果は, 解析学関連分野で正準系 (canonical system) と呼ばれる一階常微分方程式系を, ゼータ関数・L 関数（以下, 両者あわせて「ゼータ関数」とよぶ）の零点分布の研究に応用しようという試みの中で得られたものの一つである. 筆者はこれに関する試行錯誤を重ねて 10 年ぐらいになる. それだけやっても当初の目的は達成されていないが, 筆者の拙文もそれなりにたまってきた. そこで本稿では, 主にそれらの相互関係や, 筆者の動機の中での位置付けなどを述べることによって, 集会中に発表した結果に関する間接的な解説を行う. 発表内容の詳細に興味がある方は [27] を見て頂きたい. また, ゼータ関数と正準系というテーマへの入門的解説として [24] を挙げておく. なお, 本稿の文献表にある筆者の記事などは, 筆者のホームページ内にファイルがあるかリンクが貼ってあるので, 参考にして頂きたい.

2. 背景と動機

筆者が正準系を用いたゼータ関数の研究に興味を持ったきっかけは Lagarias [10] であった. ここで彼は, ゼータ関数論における懸案である Riemann 予想を正準系を通じて研究することを提案している.

Riemann 予想の解決への有力な方針の候補として, 例えば Weil 分布の正値性を示すことが挙げられる. 2000 年前後に Deninger [5], Haran [7], Connes [4], Meyer [12] などが出版されたことで, 当時はこの方向で何か進展が得られるのではないかという期待が持たれていたように思う. 実際, これらの人々がやろうとしていたことは, ゼータ関数論で明示公式と呼ばれている等式を, Selberg 跡公式の類似と見なすことによって, Weil 分布の正値性を得ようとするもので, 成功するならば最も王道的な解決方針と言えた. しかしながら, 物事はそう上手くは進まず, 次第に明らかになった本質的な問題点を解決するために, Connes は $\mathbb{F}_1$ 上の幾何学に, Deninger は 3 次元の葉層空間上の力学系の跡公式に進むなど, 事態は混迷していったように思う. そのような訳で, 筆者は当時これらの研究に興味を持ってはいたものの, 自分でも何かやってみようとまでは思えなかった. なお, Bombieri–Lagarias [2], Lagarias [11] による X.-J. Li の規準についての仕事や, Berry–Keating [1] による物理的解釈を元にした Berry–Keating ハミルトニアンの提案なども同時期の出来事で, いろいろな人々が明に暗に刺激し合って, Riemann 予想関連の研究が盛り上がっていたように思う.

そんな中, 当時院生であった筆者は, 2004 年に Lagarias と共著を書いていて, その縁で [9, 10] を知った. そこで Lagarias は, Riemann ゼータ関数や Dirichlet L 関数と正準系の関係を論じており, (一般) Riemann 予想は正準系のハミルトニアンの正値性に対応している, という見解を述べていた. 明示公式を用いて具体的に書き下せる Weil 分布の正値性とは異なり, de Branges の逆定理 (後述）によってゼータ関数に対応させられる正準系のハミルトニアンの正値性というものは, どういう類のものなのかは全く分からなかったのだが, この「よく分からないものの正値性が Riemann 予想に対応する (のではないか)」という示唆に筆者はとても興味を覚えた. その理由は, もし Lagarias

[1] この研究は基盤研究 (C)（研究代表者 : 鈴木正俊, 研究課題番号 : 17K05163）の助成を受けています.

が論じたハミルトニアンと Weil 分布に直接的な関係があるなら, ハミルトニアンに関する研究が Weil 分布に新しい見方を与えるであろうし, ハミルトニアンと Weil 分布に直接的な関係がないなら, 「ハミルトニアンの正値性を示す」という Riemann 予想への全く新しい方針が得られるからである. このどちらが正しいのかは, ゼータ関数に対応するハミルトニアンについて, 何か具体的なことが分からない限り不明だが, どちらに転ぶにせよ面白いのではないかと当時の自分には思われた. もちろん, Weil 分布とゼータ関数に対応する正準系のハミルトニアンは「お互いに何の関係もない」という可能性も考えられるのだが, どちらも Hilbert–Pólya 予想の実現として, ゼータ関数の零点 (の虚部) の固有値解釈を与えるという点で共通しているので, 何の関係もないということは無いだろうという楽観的見方をしていた.

とはいえ, ゼータ関数に対応する正準系のハミルトニアンについて知るために, 参考にできそうな先行研究は見つからず, 何をすればいいのか見当もつかなかった. そのような状況から, その後どのように研究が進展していったのかを以下で述べるが, そのために, 次節で正準系に関する基本用語などを, 必要最小限の範囲でまとめておく.

3. 基本用語など

3.1. 正準系. 有限または無限の半開区間 $I=[t_0,t_1)$ $(-\infty<t_0<t_1\leqslant\infty)$ 上で定義された 2 次の実対称行列に値をもつ関数 $H:I\to\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ に対して, $z\in\mathbb{C}$ でパラメータ付けられた I 上の 1 階線形常微分方程式系

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}A(t,z)\\B(t,z)\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}H(t)\begin{bmatrix}A(t,z)\\B(t,z)\end{bmatrix}=0 \tag{3.1}$$

を擬正準系（quasi canonical system）と呼ぶ. さらに

- $H(t)$ は I 上の Lebesgue 測度 0 の部分集合を除いて半正定値であり,
- $H(t)$ は I の任意の Lebesgue 測度が正の部分集合上で恒等的に 0 でなく,
- $H(t)$ は I の任意のコンパクト部分集合上で各成分が可積分

であるとき, (3.1) を正準系（canonical system）と呼び, 行列値関数 $H(t)$ を正準系のハミルトニアンと呼ぶ. また, パラメータ z の範囲を $\mathbb{C}$ の部分集合に限定した擬正準系を空隙正準系 (lacunary canonical system) と呼ぶ. ただし, canonical system という用語は既存のものだが, quasi canonical system や lacunary canonical system という用語は, 筆者の論文や記事だけで使用されている用語なので, 文献を調べるときには注意して頂きたい. また, 本稿や本稿に関連した拙文では, 擬正準系や空隙正準系に対しても, $H(t)$ をハミルトニアンと呼んでいるが, そのような言葉の乱用も一般的ではないことも注意しておく. 正準系に関する基本的文献としては, 例えば [10, 26] の文献表などを御覧頂きたい.

正準系のハミルトニアンは古典力学または量子力学におけるハミルトニアンを (ある意味で) 一般化したものになっている. [24] の 1 ページ目などは端的で見やすいと思う.

3.2. Hermite–Biehler クラス. 整関数 E で, 任意の $z\in\mathbb{C}_+=\{z\,|\,\Im z>0\}$ について $|E^\sharp(z)|<|E(z)|$ が成り立ち, 実軸上に零点を持たないもの全体を Hermite–Biehler クラスと呼び, 以下, $\mathbb{HB}$ と表す. ここで, $F^\sharp(z):=\overline{F(\bar{z})}$ とした. この記号は以降でも頻繁に用いる[2]. E が $\mathbb{HB}$ に属すとき, これに付随する

$$A(z):=\frac{1}{2}(E(z)+E^\sharp(z)),\qquad B(z):=\frac{i}{2}(E(z)-E^\sharp(z))$$

[2]文献によっては $E^\sharp(z)$ を $\overline{E}(z)$ と表すこともある.

は共に実整関数（実軸上で実数値をとる整関数）であり, 零点はすべて実軸上の単純零点である. また, E が対称 ($E^\sharp(z)=E(-z)$ を満たすということ) ならば, $A(z)$ は偶関数であり, $B(z)$ は奇関数である.

3.3. **正準系の解.** $[t_0,t_1)\times\mathbb{C}$ 上の関数の組 $(A(t,z),B(t,z))$ で, 正準系 (3.1) を満たし, ある $\alpha\in[0,\pi)$ により定まる右端点での条件 $\lim_{t\to t_1}A(t,z)=\cos\alpha$, $\lim_{t\to t_1}B(t,z)=\sin\alpha$ を満たすものが与えられたとする. このとき, 任意の $t_0\leqslant t<t_1$ について, $E(t,z):=A(t,z)-iB(t,z)$ は $\mathbb{HB}$ に属す整関数である. de Branges はこの逆を示した.

3.4. **De Branges の逆定理.** $E\in\mathbb{HB}$ ならば, ある区間 $I=[t_0,t_1)$ 上で定義されたハミルトニアン $H(t)$ が存在して, これに付随する正準系 (3.1) の解 $(A(t,z),\,B(t,z))$ で

$$A(t_0,z)=A(z),\quad B(t_0,z)=B(z) \tag{3.2}$$

と

$$J(t;z,w)\left(:=\frac{\overline{A(t,z)}B(t,w)-A(t,w)\overline{B(t,z)}}{\pi(w-\bar{z})}\right)\to 0\quad (t\to t_1) \tag{3.3}$$

を満たすものが存在する. ここで $z,w\in\mathbb{C}$ は任意に固定されているものとする. しかも $H(t)$ は, $E(0)=1$ という正規化のもと, t の変数変換の差を除いて一意である.

ここで区間の右端点での条件 (3.3) は重要で, これが “自明な” $H(t)$ を排除している. 例えば, $\tau>0$ と対称な整関数 E が与えられたとき, $0\leqslant t<\tau$ に対して $A(t,z)=A(z)\cos(tz)+B(z)\sin(tz)$, $B(t,z)=-A(z)\sin(tz)+B(z)\cos(tz)$ と定義する. するとこれらは, $I=[0,\tau)$ 上で $H(t)\equiv\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ に対して正準系 (3.1) を満たし, しかも初期条件 (3.2) も満たす. しかし, この $H(t)$ が与えられた E について何の情報ももたらさないのは明かである. この意味で, このような $A(t,z)$, $B(t,z)$, $H(t)$ は自明なものと言える. このとき, $J(t;z,z)=(|E(z)|^2e^{-t\Im z}-|E^\sharp(z)|^2e^{t\Im z})/(4\pi\Im z)$ となるから, 与えられた E が指数関数でなければ, どんな $\tau>0$ に対しても (3.3) は満たされない.

ところで, §3.3 で右端点での条件を (3.3) としても良かったのだが, その場合, $E(t,z)$ が実軸上に零点を持つ可能性があるので, 煩雑さを避けるためにあのようにした.

4. 初期の結果

Lagarias が [10] で示したのは, $\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とし, Riemann ξ-関数

$$\xi(s)=(1/2)s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

を用いて

$$E_{\mathrm{La}}(z):=\xi(1/2-iz)+\xi'(1/2-iz) \tag{4.1}$$

と定めると, $\xi(s)$ の零点がすべて臨界線 $\Re(s)=1/2$ 上にあり (Riemann 予想), しかも単純であること (simplicity conjecture) と, E_{La} が $\mathbb{HB}$ に属すことは同値性だということだった. したがって, Riemann 予想と simplicity conjecture が正しいとすれば, de Branges の逆定理により, 適当な区間上で定義された, E_{La} に対応するハミルトニアンが存在する. 先に述べた Lagarias の見解というのは, このハミルトニアンの正値性が Riemann 予想の表現になっているという見方である. しかしながら, de Branges の逆定理は, そのようなハミルトニアンの存在を保証するだけで, 具体的な形状などについては何も語ってくれない.

このゼータ関数に対応するハミルトニアンに関する情報を得るという懸案について，解決のきっかけとなったのが Burnol [3] であった．彼は Hankel 変換

$$f(x) \ \mapsto \ (\mathsf{H}f)(x) = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xy}) f(y)\, dy$$

に対して，

$$(\mathsf{I} \pm \mathsf{HP}_a)\phi_a^\pm = J_0^a \quad (J_0^a(x) = J_0(2\sqrt{xa})) \tag{4.2}$$

という $\mathbb{R}$ 上の関数 $\phi_a^\pm(x)$ に関する積分方程式を考察し，この解を用いてある正準系とその解を構成した．ここで $J_0(t)$ は第 1 種ベッセル関数，I は恒等作用素，P_a は $L^2(0,\infty)$ から $L^2(0,a)$ への射影を表す．Burnol がこのような研究を行った動機は，Poisson の和公式からゼータ関数の関数等式が従うことを踏まえ，彼が co-Poisson formula と名付けた Fourier 余弦変換による Poisson の和公式の類似物によって，ゼータ関数の関数等式や零点分布などを研究することにあった (cf. [3] の序文，およびその文献表にある Burnol の論文)．その中で，彼は Gauss 数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の Dedekind ゼータ関数の関数等式

$$4^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(s) = 4^{(1-s)/2}(2\pi)^{-(1-s)}\Gamma(1-s)\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}(1-s)$$

に現れるガンマ関数の比が

$$\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} = \int_0^\infty J_0(2\sqrt{x})\, x^{1-s}\frac{dx}{x}$$

($3/4 < \Re(s) < 1$ で絶対収束，$1/4 < \Re(s) \leqslant 3/4$ で条件収束) というように $J_0(t)$ の Mellin 変換として得られることに着目して，Hankel 変換 H を考察したのであった．

筆者は [3] が arXiv に投稿された頃，Riemann ξ-関数を実数 $\omega > 0$ で左右にシフトしたものの比

$$\frac{\xi(s-\omega)}{\xi(s+\omega)} \tag{4.3}$$

を Mellin 変換を用いて研究していたので ([13, 14])，Burnol のゼータ関数のガンマ因子の比から正準系を構成する方法を，この場合にも適用できるのではないかと考えた．そうして得られたのが [15] の結果である．なお，上記のような比は，

$$E_\omega(z) := \xi(1/2 - iz + \omega) \tag{4.4}$$

が $\mathbb{HB}$ に属すか否かを考える際に自然に現れるものだが，(4.1) の E_{La} と直接の関係はない．とはいえ，任意の $\omega_0 \leqslant \omega \leqslant 1/2$ に対して E_ω が $\mathbb{HB}$ に属することと，$\xi(s)$ が $\Re(s) \geqslant 1/2 + \omega_0$ に零点を持たないことは同値なので，$\xi(s)$ の零点分布の観点からは興味ある対象である．

以下，[15] の結果を，それの拡張である [26] の記号にあわせて述べる．まず，$\omega > 1$ を固定する．このとき $E_\omega \in \mathbb{HB}$ なので，de Branges の逆定理により，これに対応するハミルトニアンが存在する．これを表示する方法の一つを与えたのが [15] の結果である．

Fourier 変換により

$$\frac{\xi(1/2 - iz - \omega)}{\xi(1/2 - iz + \omega)} = \int_{-\infty}^\infty K_\omega(x)\, e^{izx}\, dx \tag{4.5}$$

となるような $\mathbb{R}$ 上の関数 $K_\omega(x)$ を定める．Dirichlet 級数表示

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^s}$$

$(\Re(s) > 1)$ と積分表示

$$\frac{\Gamma(s+\alpha)}{\Gamma(s+\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-\alpha-1} \cdot x^{s-1}\, dx$$

$(\Re(s) > -\Re(\alpha),\ \Re(\beta-\alpha) > 0)$ などによって, $K_\omega(x)$ を既存の関数の (x の値に応じた) 有限和で表すことができる. さらに, $\omega > 1$ という仮定により, $K_\omega(x)$ は $(-\infty, 0)$ 上では 0 に等しい $\mathbb{R}$ 上の連続関数になる, このとき, 積分作用素

$$f(x) \ \mapsto \ (\mathsf{K}f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\omega(x+y) f(y)\, dy \tag{4.6}$$

により定まる, $\mathbb{R}$ 上の関数 $x \mapsto \phi_t^{\pm}(x) = \phi^{\pm}(t,x)$ に関する積分方程式

$$(\mathsf{I} \pm \mathsf{KP}_t)\phi_t^{\pm} = K_\omega^t \quad (K_\omega^t(x) = K_\omega(x+t)) \tag{4.7}$$

を考える. ここで, P_t は $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(-\infty, t)$ への直交射影を表す. 積分方程式 (4.2) と (4.7) の類似性は明かであろう. 仮定 $\omega > 1$ のもと, (4.7) の解は存在し, かつ一意なので, それらを用いて,

$$m(t) = \exp\left(\int_0^t (\phi^{+}(\tau,\tau) + \phi^{-}(\tau,\tau))\, d\tau \right),$$

$$H_\omega(t) = \begin{bmatrix} m(t)^{-2} & 0 \\ 0 & m(t)^2 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} A_\omega(t,z) &= m(t) \cdot E_\omega(z) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{izt} + \int_t^{\infty} \phi^{+}(t,x)\, e^{izx}\, dx \right), \\ -iB_\omega(t,z) &= \frac{1}{m(t)} \cdot E_\omega(z) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{izt} - \int_t^{\infty} \phi^{-}(t,x)\, e^{izx}\, dx \right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

などと定める. すると $(A_\omega(t,z), B_\omega(t,z))$ は, $I = [0, \infty)$ 上で定義された $H = H_\omega$ に対して正準系 (3.1) を満たし, $E = E_\omega$ について初期条件 (3.2) も満たす. しかも $m(t)$ は積分作用素の Fredholm 行列式を用いて

$$m(t) = \frac{\det(1 + \mathsf{P}_t\mathsf{KP}_t)}{\det(1 - \mathsf{P}_t\mathsf{KP}_t)}$$

と表される. これらが [15] の主結果である.

Burnol [3] の方法ではハミルトニアンの成分を積分作用素の Fredholm 行列式として表示するので, 特に積分核の連続性が必要になる. そのため [15] では, 積分核の連続性を担保するため, $\omega > 1$ という条件を課した. いっぽう, 先に触れたように, $\xi(s)$ の零点分布に対して非自明な結論が得られるのは $0 < \omega \leqslant 1/2$ の場合なので, $\omega > 1$ という条件下でしかハミルトニアンの構成がうまくいかないというのは残念な状況である. しかし, これまで何の手がかりもない状況で得られた結果であったので, 個人的にはそれなりに満足していた.

とはいえ, [15] の結果ではいろいろと不十分であることも明かである. 実際, 解決すべき問題として, $H(t)$ の構成法を $0 < \omega \leqslant 1$, 特に $0 < \omega \leqslant 1/2$ へ適用可能にすること, さらにそれを E_{La} へ適用可能なものに改良すること, および, 構成した $H(t)$ が §3.4 の意味で "自明なもの" でないことを示すこと, などが挙げられる. これらの問題点は, 以下で述べるように, その後の研究で解決されていく.

5. 回り道での結果

さて, [15] の方法を $0<\omega\leqslant 1$ へ拡張するために, 関数解析や (偏) 微分方程式の理論などで使えそうなものがないかと色々調べていたのだが, 適当なものを見つけられない. そこで, 計算機による実験で状況を観察することにした. 方針は, よく知られた積分表示

$$\xi(s)=\int_1^\infty \sqrt{x}\,\phi(x)\,(x^{s-1/2}+x^{-(s-1/2)})\,\frac{dx}{x}$$

を Riemann 和で近似して, $\xi(s)$ を指数多項式の極限と見なし, 指数多項式に対応する正準系のハミルトニアンを計算することによって, [15] の方法が $0<\omega\leqslant 1$ に対しても有効か否かを見定めるというものだった. 被積分関数 $\sqrt{x}\,\phi(x)$ は $x\to\infty$ で急減少しているので, 荒い近似でも様子を観察するのには十分だろうと思ったのである.

この方針のもと, 指数多項式程度なら正準系のハミルトニアンを計算する方法は知られているだろう, と楽観して文献を調べはじめたのだが, そのようなものは見つからない. しかし, この方針を捨ててしまうと, 他に何の手だてもない状況だったので, 自分で何とかしようと思い直して計算方法を考えはじめた.

それから紆余曲折あって, 実数を係数とする自己相反多項式の不定元に指数関数を代入して得られる指数多項式について, しかるべく対応する擬正準系のハミルトニアンを具体的に計算する方法を見つけられた. ちゃんとした論文は [22] だが, そこでは上記で述べたような [15] との関連は序文で数行書いただけである. いっぽう, [16, 17] では [15] から [22] に至るまでの経緯を, 上でふれた紆余曲折も込めて書いている.

ここで [22] の結果の一部を述べておこう. 与えられた $2g$ 次の実係数の指数多項式

$$E(z)=\sum_{m=-g}^{g} C_m\,e^{imz},\quad C_gC_{-g}\neq 0,\quad C_m\in\mathbb{R} \tag{5.1}$$

に対して, $2g+1$ 次行列 E^+, E^- を

$$E^{\pm}:=\begin{bmatrix} C_{\mp g} & & & & & & \\ C_{\mp(g-1)} & C_{\mp g} & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ C_0 & C_{\mp 1} & \ddots & C_{\mp g} & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ C_{\pm(g-1)} & C_{\pm(g-2)} & \ddots & \ddots & \ddots & C_{\mp g} & \\ C_{\pm g} & C_{\pm(g-1)} & \cdots & C_0 & \cdots & C_{\mp(g-1)} & C_{\mp g} \end{bmatrix}.$$

で定め, 各 $1\leqslant n\leqslant 2g$ に対して, $2g+1$ 次行列 J_n を

$$J_n:=\left[\begin{array}{c|c} J^{(n)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],\quad J^{(n)}:=\begin{bmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

で定める. ここで $J^{(n)}$ は n 次の反対角行列である. これらを用いて,

$$\Delta_n:=\frac{\det(E^++E^-J_n)}{\det(E^+-E^-J_n)},\quad 1\leqslant n\leqslant 2g,\quad \Delta_0:=1 \tag{5.2}$$

と定義する．このとき，指数多項式 E が $\mathbb{HB}$ に属するためには，すべての $1 \leqslant n \leqslant 2g$ について Δ_n が定義され，かつ正値であることが必要かつ十分である．さらに，E が $\mathbb{HB}$ に属すとき，$(n-1)/2 \leqslant t < n/2$ であるとき

$$H(t) := \begin{bmatrix} (\Delta_{n-1}\Delta_n)^{-1} & 0 \\ 0 & \Delta_{n-1}\Delta_n \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

と定義すれば，$H(t)$ は $[0,g)$ 上のハミルトニアンで，これが E に de Branges の逆定理で対応するものとなる．これはなかなか綺麗な結果だと思われるし，(4.8) との類似性も見やすいだろう．

この後の進展であるが，最近 [28] を行ったことで，これの離散化，もしくは有限次元化として，[22] の結果を，複素数を係数とする自己相反多項式の不定元に指数関数を代入して得られる指数多項式に一般化する研究が現在進行中である．そして，それを進める中で，多項式の根の分布を正準系を用いて述べる上記のような理論と，[18] に書いたような，多項式の根の分布を二次形式を用いて述べる理論 ([29, §75] など) との関係性がおおよそ明らかになった．これについてはもう少し整理してから発表したい．

他方，[21] に書いたような，より一般の指数多項式に対して擬正準系を構成する方法については，現時点では何の進展もない．

6. 中期の結果 – その壱

さて，[22] の計算法を使って (4.4) の E_ω に対応するであろうハミルトニアン $H_\omega(t)$ を数値実験で観察してみると，積分核 $K_\omega(x)$ の連続性が失われる $\omega = 1$ を境にして，$H_\omega(t)$ も連続性を失い，$\omega > 0$ が小さくなるにつれ，$H_\omega(t)$ の成分の可積分性も悪化しているのが観察された．したがって，[15] を $0 < \omega \leqslant 1$ へ拡張するには，何らかのアイディアが必要だったのだが，それは (4.3) をべき乗した

$$\left(\frac{\xi(s-\omega)}{\xi(s+\omega)}\right)^{\nu} \tag{6.1}$$

を考えるだけで足りた．$K_\omega(x)$ の可積分性などが $\omega > 0$ の減少と共に悪化する原因は，

$$\frac{\xi(\sigma-\omega+it)}{\xi(\sigma+\omega+it)} \ll (1+|t|)^{-\omega}$$

という評価にある．ならば全体をべき乗してしまえば，それは $|t| \to \infty$ で十分早く減少し，その Fourier 逆変換の滑らかさは増すからである．このアイディアは安直だが，[15] の方法を $0 < \omega \leqslant 1$ に拡張するには十分であった．

ここで [26, 27] の結果を述べよう．Fourier 変換 (4.5) の左辺を ν 乗することで得られる関数を $K_{\omega,\nu}(x)$ とすると，これは $\nu > 1/\omega$ という条件のもとで $\mathbb{R}$ 上で連続になる．そこで，この条件の下で (4.6) で $K_\omega(x)$ の代わりに $K_{\omega,\nu}(x)$ を用いた積分作用素 $\mathsf{K}_{\omega,\nu}$ を考えると，[15] の議論がすべてうまくいき，同様の結果が得られる．ただし，$0 < \omega \leqslant 1/2$ の場合には，ハミルトニアン $H_{\omega,\nu}(t)$ が $0 \leqslant t \leqslant t_1$ に対して定義されるためには，各 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ に対して，

(6.2) 「$L^2(-\infty,t)$ 上で $\mathsf{P}_t\mathsf{K}_{\omega,\nu}\mathsf{P}_t$ が ± 1 を固有値に持たない」

という条件が満たされていなければならない．この条件は $t_1 > 0$ が ω, ν に依存した十分小さい数なら無条件に満たされ，Riemann 予想を仮定すれば $t_1 = \infty$ に対して満たされることが証明される．

そこで，Riemann 予想を仮定すると，指数関数 $x \mapsto \exp(izx)$, $\Im(z) > 0$, の

$$L^2(t,\infty) \cap \mathsf{K}_{\omega,\nu}(L^2(t,\infty))$$

への射影を $Y_z^t(x)$ としたとき, [3, (108)] の類似である

$$\overline{E_{\omega,\nu}(z)}E_{\omega,\nu}(w)\int_{-\infty}^{\infty} Y_w^t(x)\overline{Y_z^t(x)}\,dx = \frac{\overline{A_{\omega,\nu}(t,z)}B_{\omega,\nu}(t,w) - A_{\omega,\nu}(t,w)\overline{B_{\omega,\nu}(t,z)}}{\pi(w-\bar{z})}$$

という等式が成り立つことが分かる. この等式により, [15] で欠けていた極限での挙動 (3.3) が $t_1=\infty$ に対して証明され, 構成したハミルトニアン $H_{\omega,\nu}(t)$ が de Branges の逆定理に現れる正しいものであることが証明される. 初期の頃 ([27] の ver.2 以前) は, これを Burnol の [3, §5] の議論を真似ることで行ったのだが, [23] の執筆中, それを別の議論で単純化する方法に気づいたので, [26] ではその様に単純化した証明を述べた.

本稿ではここまで, ゼータ関数と言えば Riemann ゼータ関数しか出て来なかったが, [27] では Selberg クラスとよばれる大きなゼータ関数のクラスに対して, 上記のような結果が成り立つことを述べている. ただし, どんなゼータ関数でも良いという訳ではなく, 適用範囲は Riemann ゼータ関数のような自己双対的 (self-dual) なものに限られ, 得られるハミルトニアン $H_{\omega,\nu}(t)$ は (4.8) のような対角型 (Krein's string) である.

上記の事柄は, Riemann 予想の必要条件を述べたものと言えるが, [27] ではこれが十分条件であることも述べている.

Riemann 予想を仮定しなくても, $t_1=\infty$ に対して (6.2) を仮定すれば, (4.8), (4.9) と同様にして $H_{\omega,\nu}(t)$ と $A_{\omega,\nu}(t,z)$, $B_{\omega,\nu}(t,z)$ が $(t,z)\in[0,\infty)\times\mathbb{C}$ 上で定義される. したがって, (3.3) の条件が満たされているか否かを考えることができる. これにより, 次のような Riemann 予想の必要十分条件が得られる: Riemann 予想が成り立つためには, $\nu_n > 1/\omega_n$ を満たすような $\omega_n>0$, $\nu_n\in\mathbb{Z}_{>0}$ の列が存在し, 各 (ω_n,ν_n) に対して, (6.2) が $t_1=\infty$ についてが成り立ち, しかも (3.3) も成り立つことが必要かつ十分である. このような同値条件は, 自己双対的な Selberg クラスのゼータ関数の Riemann 予想 (Grand Riemann Hypothesis, GRH) についても同様に成り立つ.

7. 中期の結果 – その弐

前節の結果は, 正準系の文脈で Riemann 予想の同値条件が得られたという点で筆者にとって好ましいものであったが, [10] がスタート地点だったのもあって, 同値条件に ω_n,ν_n という無限個のパラメータが含まれているという点には不満があった. 何とかならないものかとぼんやり思っていたとき, 学部 1 年生の微積の講義の準備中に

$$\lim_{n\to+\infty}(1+n^{-1})^n = e$$

というよく知られた公式が目に止まった. これによれば,

$$\frac{\xi(s-\omega)}{\xi(s+\omega)} = 1 - 2\,\frac{\xi'}{\xi}(s)\,\omega + O_s(\omega^2)$$

なので,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\xi(s-\eta/n)}{\xi(s+\eta/n)}\right)^n = \exp\left(-2\eta\frac{\xi'}{\xi}(s)\right)$$

であり, $\eta>1$ とすれば, すべての n について [26] の方法が適用できる. いっぽう, Riemann 予想を仮定すれば, すべての $\omega>0$ について $\xi(1/2-iz+\omega)\in\mathbb{HB}$ だから,

$$\left|\exp\left(-2\eta\frac{\xi'}{\xi}(s)\right)\right| < 1, \quad \Re(s) > \frac{1}{2}$$

が導かれる. この条件は Lagarias [8] や Garunkštis [6] により研究された Riemann 予想の同値条件

$$\Re\left(\frac{\xi'}{\xi}(s)\right) > 0, \quad \Re(s) > \frac{1}{2}$$

の単純な言いかえに他ならない. この 2 つの理由から, $\exp\left(-2\eta\frac{\xi'}{\xi}(s)\right)$ の逆 Mellin 変換を積分核とする積分作用素について, [26] の議論を展開することに興味が持たれる. それを実行したのが [25, 23] だが, 少なくとも結果の見た目は先に述べた [15, 26] のものとほぼ同じなので, ここでは詳細を述べない.

ひとつ注意しておくと, $\exp\left(-2\eta\frac{\xi'}{\xi}(s)\right)$ は $\xi(s)$ の零点で真正特異点を持つので, Hermite–Biehler クラスの整関数や正準系の理論を用いることができない. そこで少し枠を広げようという意図で導入したのが, 第 3 節でふれた lacunary canonical system や lacunary canonical system などの概念であった. また, 考察する積分方程式が (4.7) から次節の (8.1) のような, より単純なものへ移行していったのも, これに関する試行錯誤の過程で得られた結果であった.

8. 最近の結果

さて, [26, 27] によって [15] を $0 < \omega \leqslant 1$ の範囲まで拡張し, 右端点での挙動 (3.3) も証明することができた. さらに, GRH の同値条件を記述することもできた. これで一旦ひと区切りついたように見えるが, 一つ大きな問題が残っていた. それは一般の Dirichlet L 関数のような, 自己双対的でないゼータ関数にまで理論を拡張することである. 実際, もともとの動機であった [10] で論じられていたのは, 一般の Dirichlet L 関数と正準系の対応である.

先に進む前に, 少し記号を準備する. χ を導手 q の原始的 Dirichlet 指標, $L(s,\chi)$ を χ の Dirichlet L 関数,

$$\xi_\chi(s) := e^{-i\theta}\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi), \quad \delta = \begin{cases} 0, & \chi(-1) = 1, \\ 1, & \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

と定める. ここで $\theta \in \mathbb{R}$ は $\xi_\chi(s) = \overline{\xi_\chi(1-\bar{s})}$ が成り立つように選ぶ. このとき, $L(s,\chi)$ に対する一般 Riemann 予想は,

$$E_\chi^{\omega,\nu}(z) := \xi_\chi(1/2 - iz + \omega)^\nu$$

が任意の $\omega > 0$, $\nu \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathbb{HB}$ に属すことと同値である. そこで, 一般 Riemann 予想を仮定したときに, de Branges の逆定理により $E_\chi^{\omega,\nu}$ に対応するハミルトニアン $H_\chi^{\omega,\nu}(t)$ を求めたいのだが, χ が 2 次指標でなければ $L(s,\chi)$ は自己双対的でないので, [26, 27] の方法では $H_\chi^{\omega,\nu}(t)$ を構成できない.

この問題を解決したのが講演で述べた [28] の結果である. これを成すにあたり, [26, 27] から大きく変更された点が 2 つあった. 一つ目は, 考える積分方程式の組を (4.7) から

$$(\mathsf{I} + \mathsf{KP}_t)\Phi_t = 1, \qquad (\mathsf{I} - \mathsf{KP}_t)\Psi_t = 1 \tag{8.1}$$

($\Phi_t(x) = \Phi(t,x)$, $\Psi_t(x) = \Psi(t,x)$) へ変更したことである. この (8.1) は出版前の古い版の [26] の議論を全体的に単純化するために [25] で導入され, [23] でより整備されて, 結局その成果の一部が出版された [26] に移される事となった. 当初は (8.1) へ移行する利点は, 右辺にある非同次項が "1" という単純なものであることと, 積分作用素の積分核が不連続性を持っていたり, 超関数であったりしても扱いやすいこと程度に思われ

た. しかしながら, $E_\chi^{\omega,\nu}$ が対称でない場合 (2 次指標でない場合) に望ましい結果を得るには, (8.1) の解を用いて

$$\begin{aligned} A_\chi^{\omega,\nu}(t,z) &= -\frac{iz}{2}E_\chi^{\omega,\nu}(z)\int_t^\infty \Psi(t,x)\,e^{izx}\,dx, \\ -iB_\chi^{\omega,\nu}(t,z) &= -\frac{iz}{2}E_\chi^{\omega,\nu}(z)\int_t^\infty \Phi(t,x)\,e^{izx}\,dx. \end{aligned} \tag{8.2}$$

と定義すべきで, (4.9) と類似の定義ではうまくいかない (とはいえ, これらは $E_\chi^{\omega,\nu}$ が対称な場合は同値である). この意味で, (4.7) から (8.1) への移行は本質的である.

二つ目の変更点は, 考える積分作用素を (4.6) のような線形なものから

$$f(x) \ \mapsto\ (\mathsf{K}_\chi^{\omega,\nu}f)(x) = \int_{-\infty}^\infty K_\chi^{\omega,\nu}(x+y)\overline{f(y)}\,dy \tag{8.3}$$

という反線形 (共役線形) なものに置き換えることであった. ここで $K_\chi^{\omega,\nu}(x)$ は

$$\left(\frac{\xi_\chi(1/2-iz-\omega)}{\xi_\chi(1/2-iz+\omega)}\right)^\nu = \int_{-\infty}^\infty K_\chi^{\omega,\nu}(x)\,e^{izx}\,dx$$

を満たすものとして定義され, $\xi(s)$ の場合と同様, $\nu > 1/\omega$ ならば $(-\infty,0)$ 上で 0 の値をとる $\mathbb{R}$ 上の連続関数である. $E_\chi^{\omega,\nu}$ が対称でない場合, (8.1) はこの反線形な作用素に対して考える. 筆者の力不足で端的に説明できないのだが, この二つの変更によって [23, 26] の枠組みが $E_\chi^{\omega,\nu}$ が対称でない場合にも, いろいろな箇所で“うまく”働くようになる. 結果として,

$$H_\chi^{\omega,\nu}(t) := \frac{1}{\Re(\Phi(t,t)\overline{\Psi(t,t)})}\begin{bmatrix} |\Phi(t,t)|^2 & \Im(\Phi(t,t)\overline{\Psi(t,t)}) \\ \Im(\Phi(t,t)\overline{\Psi(t,t)}) & |\Psi(t,t)|^2 \end{bmatrix} \tag{8.4}$$

と定義すれば, (8.2) が (3.2) と (3.3) を満たすような, この $H_\chi^{\omega,\nu}(t)$ に関する $I=[0,\infty)$ 上の正準系の解を与える. そして, これらは $E_\chi^{\omega,\nu}$ が対称な場合, [26] の結果に一致する.

9. 零点の間隔分布

講演の際に質問された, 零点の間隔分布について少し述べておこう. 正準系の理論においては, $A(z)$, $B(z)$ の零点はある L^2 空間上の微分作用素の自己共役拡張の固有値として解釈される. しかしながら, そのような固有値の間隔分布などについて述べた一般論を少なくとも筆者は知らない. したがって, 正準系の理論を用いたゼータ関数の零点の研究では, 零点の間隔分布についての情報は期待できないと思われる. とはいえ, [19, 20] のように, 正準系の理論よりも踏み込んだ所では少し結果がある.

10. コーシー問題

最後に, 本稿の設定での de Branges の逆定理の解釈を述べておく. 我々の手法では, $A(t,z)$, $B(t,z)$ は (8.1) の解 $\Phi(t,x)$, $\Psi(t,x)$ の Fourier 変換で定義されるので, $A(t,z)$,

$B(t,z)$ が満たす正準系は, $\Phi(t,x)$, $\Psi(t,x)$ が満たす偏微分方程式系

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\Psi(t,t)}+\frac{1}{\overline{\Psi(t,t)}}\right)\frac{d}{dt}\Psi(t,x)+\left(\frac{1}{\Phi(t,t)}+\frac{1}{\overline{\Phi(t,t)}}\right)\frac{d}{dx}\Phi(t,x)\\
&\quad=\left(\frac{1}{\Phi(t,t)}-\frac{1}{\overline{\Phi(t,t)}}\right)\frac{d}{dt}\Phi(t,x)+\left(\frac{1}{\Psi(t,t)}-\frac{1}{\overline{\Psi(t,t)}}\right)\frac{d}{dx}\Psi(t,x),\\
&\left(\frac{1}{\Phi(t,t)}+\frac{1}{\overline{\Phi(t,t)}}\right)\frac{d}{dt}\Phi(t,x)+\left(\frac{1}{\Psi(t,t)}+\frac{1}{\overline{\Psi(t,t)}}\right)\frac{d}{dx}\Psi(t,x)\\
&\quad=\left(\frac{1}{\Psi(t,t)}-\frac{1}{\overline{\Psi(t,t)}}\right)\frac{d}{dt}\Psi(t,x)+\left(\frac{1}{\Phi(t,t)}-\frac{1}{\overline{\Phi(t,t)}}\right)\frac{d}{dx}\Phi(t,x)
\end{aligned}
\right.
\tag{10.1}
$$

の言い換えにすぎない. このとき, 初期条件 (3.2) は適当な $\Phi_0(x)$, $\Psi_0(x)$ (といっても $A(z)$, $B(z)$ から具体的に定まるもの) から定まる初期条件

$$\Phi(t_0,x)=\Phi_0(x),\quad \Psi(t_0,x)=\Psi_0(x) \tag{10.2}$$

に言い換えられる. したがって, ゼータ関数に対応するハミルトニアン $H(t)$ と, その $H(t)$ で定まる正準系の解で (3.2) を満たすようなものを求める問題は, 初期条件 (10.2) の下で $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上の偏微分方程式系 (10.1) を解く, というコーシー問題として捉えられる. いったんこの見方に立ってしまえば, 正準系などの話は忘れて, 純粋な偏微分方程式の問題として考えることができる.

このコーシー問題で特徴的なのは, どんなゼータ関数でも偏微分方程式系 (10.1) は同じで, ゼータ関数ごとの個性は初期値だけに現れる点である. 一般に, コーシー問題は $t=0$ の十分小さな近傍での解の存在を示すのは難しくないが, 大域的な解の存在を示すのは難しいことが多く, ゼータ関数に関連したコーシー問題 (10.1), (10.2) の場合もその様になっている. 偏微分方程式系 (10.1) は非線形なので, 一般論で解けることは全く期待できないが, もし大域的に解が存在するための初期値の条件などが (少しでも?) 分かれば, ゼータ関数論に応用できて面白いかもしれない.

References

[1] M. V. Berry, J. P. Keating, The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics, *SIAM Rev.* **41** (1999), no. 2, 236–266.

[2] E. Bombieri, J. C. Lagarias, Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis, *J. Number Theory* **77** (1999), no. 2, 274–287.

[3] J.-F. Burnol, Scattering, determinants, hyperfunctions in relation to $\Gamma(1-s)/\Gamma(s)$, `http://arxiv.org/abs/math/0602425`

[4] A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, *Selecta Math. (N.S.)* **5** (1999), no.1, 29–106.

[5] Ch. Deninger, Motivic L-functions and regularized determinants, *Motives (Seattle, WA, 1991)*, 707–743, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 1994.

[6] R. Garunkštis, On a positivity property of the Riemann ξ-function, *translated from Liet. Mat. Rink.* **42** (2002), no. 2, 179–184 *Lithuanian Math. J.* **42** (2002), no. 2, 140–145.

[7] M. J. Shai Haran, The mysteries of the real prime, London Mathematical Society Monographs. New Series, 25. *The Clarendon Press, Oxford University Press, New York*, 2001.

[8] J. C. Lagarias, On a positivity property of the Riemann ξ-function, *Acta Arith.* **89** (1999), no. 3, 217–234.

[9] ———, Zero spacing distributions for differenced L-functions, *Acta Arith.* **120** (2005), no. 2, 159–184.

[10] ———, Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions, *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, 365–377, *Springer, Berlin*, 2006.
[11] ———, Li coefficients for automorphic L-functions, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **57** (2007), no. 5, 1689–1740.
[12] R. Meyer, On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L-functions, *Duke Math. J.* **127** (2005), no. 3, 519–595.
[13] M. Suzuki, On subspaces of the Hardy space related to zeros of zeta functions, RIMS 研究集会 解析数論–複素関数の値の分布と性質を通して (2010):
`http://www.math.titech.ac.jp/~msuzuki/rims_2010_10.pdf`
[14] ———, On monotonicity of certain weighted summatory functions associated with L-functions, Comment. Math. Univ. St. Pauli **60** (2011), no. 1-2, 211–225.
[15] ———, A canonical system of differential equations arising from the Riemann zeta-function, Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects, 397-436, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B34**, RIMS, Kyoto, 2012,
出版時の誤植などを若干修正したもの：`https://arxiv.org/abs/1204.1827`
[16] ———, 自己相反多項式と微分方程式の標準系, 数理研講究録 No.1806 解析数論–数論的関数の多重性に関連して (2012), 176-185.
[17] ———, 自己相反多項式の零点と微分方程式, 数理研講究録 No.1874 解析数論–近似と漸近的手法を通して見た数論 (2014), 125–134.
[18] ———, An inverse problem for a class of canonical systems, 解析的整数論–超越関数の数論的性質とその応用, No.1898 (2014), 140–145.
[19] ———, Nearest neighbor spacing distributions for the zeros of the real or imaginary part of the Riemann xi-function on vertical lines, Acta Arith. **170** (2015), no. 1, 47–65.
[20] ———, Riemann ξ-関数の実部の零点の垂直線上の最隣接間隔分布, 解析的整数論–数論的対象の分布と近似, No.2013 (2016), 25–32.
[21] ———, Canonical systems arising from Dirichlet polynomials, RIMS 研究集会 解析的整数論の諸問題と展望 (2016):
`http://www.math.titech.ac.jp/~msuzuki/RIMS_2016_11.pdf`
[22] ———, An inverse problem for a class of canonical systems and its applications to self-reciprocal polynomials, J. Anal. Math. **136** (2018), no. 1, 273-340.
[23] ———, An inverse problem for a class of diagonal Hamiltonians,
`https://arxiv.org/abs/1907.07838`.
[24] ———, ゼータ関数と微分方程式, 第 2 回数理新人セミナー報告集, 2019.
[25] ———, Integral operators arising from the Riemann zeta function, Various Aspects of Multiple Zeta Functions, 399–411, Adv. Stud. Pure Math. **84**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2020.
[26] ———, An inverse problem for a class of canonical systems having Hamiltonians of determinant one, J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 12, 108699.
[27] ———, Hamiltonian systems arising from L-functions in the Selberg class,
`https://arxiv.org/abs/1606.05726` の ver.3 以降.
[28] ———, Chains of reproducing kernel Hilbert spaces generated by unimodular functions,
`https://arxiv.org/abs/2012.11121`.
[29] 高木貞治, 代数学講義, 共立出版, 1965.