Rapidly convergent series representations of symmetric Tornheim double zeta functions について *

東京理科大学　理工学部　教養 † 中村 隆
Takashi Nakamura
Department of Liberal Arts, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

概要

この論説は、論文「Rapidly convergent series representations of symmetric Tornheim double zeta functions [8]」を解説したものである．§1 では 2 つのキーワード「desingularization」と「Rapidly convergent series representations」について説明でする．§2.1 では Tornheim 2 重ゼータ関数について簡単にまとめ，§2.2 で主結果について記述し，§2.3 では幾つかの注意を述べる．証明はここでは詳しく述べないので，論文を参照していただきたい．

1 Introduction

1.1 Desingularization

この小節では「Desingularization」をリーマンゼータ関数を用いて説明する．$s = \sigma + it$ を複素数とする．このとき，リーマンゼータ関数は

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \sigma > 1$$

により定義される．$\zeta(s)$ は全複素平面に有理型に解析接続され，$s = 1$ で極を持ち，その留数は 1 である．さらに $\zeta(s)$ は関数等式

$$\zeta(1-s) = \Gamma_{\cos}(s)\zeta(s), \qquad \Gamma_{\cos}(s) := \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big) \tag{1.1}$$

〒278-8510 千葉県野田市山崎 2641

(例えば [13, (2.1.8)] 参照) を持つ．この $s=1$ での極を「消してしまう」というのが，リーマンゼータ関数に対する「Desingularization」である．「Desingularization」には，1「零を掛ける」，2「極同士を引き算する」，3「その混合」という3つの方法があると考えている．「零を掛ける」という方法として，以下のような操作がある．

$$(s-1)\zeta(s), \qquad (1-2^{1-s})\zeta(s).$$

「極同士を引き算する」として，

$$\zeta(s)-(s-1)^{-1}, \qquad \zeta(s)-\zeta(s,a),$$

ただし $\zeta(s,a)$ はフルビッツゼータ関数，などがある．「混合型」として，

$$(s-1)\zeta^2(s)-(s-1)^{-1}, \qquad (s-1)\zeta^2(s)-\zeta(s,a)$$

などがある．上記の6つの例では $s=1$ に極があるように見えるが，「Desingularization」されているので，実際には存在しない．よってこれらの例では「$s=1$ で possible (not true) singularity を持つ」という．一方，$\zeta(s)$ は $s=1$ で極を持ち，その留数は1であるので，この場合「$\zeta(s)$ は $s=1$ で true (not possible) singularity を持つ」という．1変数の場合は，特異点が true なのか possible なのか見極めることは簡単であることが多いが，多変数の（ゼータ）関数となるとそうではない．後者がこの論説の主題の一つである．

1.2 Rapidly convergent series representations

Wikipedia [14] には12ものリーマンゼータ関数の「Rapidly convergent series representations」又は「globally convergent series representations」が記載されている．その一つとして，Hasse による

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k+1)^s}, \qquad s\neq 1+\frac{2\pi i n}{\log 2}$$

がある．この論説の主結果に関連するものとして，

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-\sum_{n=1}^{\infty}b_n(s), \qquad b_n(s):=\binom{s}{n}\frac{\zeta(s+n)-1}{n+1}$$

がある．$a_n(s)=n^{-s}$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)}=1, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}(s)}{b_n(s)}=\frac{1}{2}$$

であるから，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(s)$ はリーマンゼータ関数の定義式 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)$ もよりも速く収束することがわかる．リーマンゼータ関数の定義式 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)$ は $\Re(s)>1$ でしか収束し

ないが，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(s)$ は全ての $s \in \mathbb{C}$ で収束する．$s+n=1$ になるとき $\zeta(s+n)$ から極が発生するように見えるが，二項係数 $\binom{s}{n}$ のおかげで，各 $b_n(s)$ は正則関数である（これもリーマンゼータ関数に対する「Desingularization」である）．これらの事実から，Hasse の表示や $s(s-1)^{-1} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s)$ が「Rapidly convergent series representations」又は「globally convergent series representations」と呼ばれる理由がわかる．これらは収束が速くなりかつ複素数平面上どこでも収束するというメリットがあるが，表記が複雑にならざる得ないというデメリットがある．そのため，「美しくない」，「面白くない」や「意味がない」などの評価をされることがあるが，「見た目」だけでは物事の本質は判断できないという典型例だと考えている．

2 Main results

2.1 Tornheim 2重ゼータ関数

$s,t,u \in \mathbb{C}$ とするとき，Tornheim 2重ゼータ関数を

$$T(s,t,u) := \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{m^s n^t (m+n)^u}$$

により定義する．この級数は $\Re(s+u)>1$, $\Re(t+u)>1$ and $\Re(s+t+u)>2$ であるとき絶対収束する．$s,t,u \in \mathbb{N}$ であるときは古くから研究され，1950 年には Tornheim, 1958 年には Mordell により扱われている．Tornheim 2重ゼータ関数の特殊値の研究については [6, Section 1] などを参照して頂きたい．

関数として大きな進展があったのは最近で，Matsumoto [4, Theorem 1] により Tornheim 2重ゼータ関数 $T(s,t,u)$ は超平面

$$s+u \in \mathbb{Z}_{\le 1}, \qquad t+u \in \mathbb{Z}_{\le 1}, \qquad s+t+u=2. \tag{2.1}$$

に possible singularity を持つことが証明された．これらが true (not possible) singularity であることは Matsumoto, Nakamura, Ochiai and Tsumura [5, Theorem 6.1] において示された．こうなると $T(s,t,u)$ に対する「Desingularization」が気になるが，Furusho, Komori, Matsumoto and Tsumura [3, (58), Definition 2.1, Theorems 2.2 and 2.7] により，関数

$$\begin{aligned}&(s-1)(t-1)T(s,t,u) + u(s-1)T(s,t-1,u+1)\\ &+u(t-1)T(s-1,t,u+1) + u(u+1)T(s-1,t-1,u+2)\end{aligned}$$

は特異点を持たないということが示された．よって $T(s,t,u)$ に対する「Desingularization」は実現されたが，この類似を考えようというのが本論説の目的の一つである．

もう一つの目的は $T(s,t,u)$ の「Rapidly convergent series representations」又は「globally convergent series representations」を与えることである．これには Borwein [2, Proposition 1] が与えた以下のものがある．$\Gamma(u,\theta) := \int_\theta^\infty \omega^{u-1}e^{-\omega}d\omega$ とおく．$0<\theta<2\pi$, $s,t\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $u\in\mathbb{C}$ であるとき

$$\begin{aligned}\Gamma(u)T(s,t,u) &= \sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(u,(m+n)\theta)}{m^s n^t (m+n)^u} + \sum_{k,l=0}^{\infty}(-1)^{k+l}\frac{\zeta(s-k)\zeta(t-l)\theta^{k+l+1}}{k!l!(k+l+u)} \\ &+\Gamma(1-s)\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\zeta(t-r)\theta^{s+u+r-1}}{r!(s+u+r-1)} + \Gamma(1-t)\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\zeta(s-r)\theta^{t+u+r-1}}{r!(t+u+r-1)} \\ &+\Gamma(1-s)\Gamma(1-t)\frac{\theta^{s+t+u-2}}{s+t+u-2}\end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つ．これは興味深い結果であるが，個人的に気になる点が 2 つある．一つ目は，級数に不完全ガンマ関数が含まれていることである．私個人としてはこれは避けたい．二つ目は $\zeta(s-k)$ が現れる，つまりリーマンゼータ関数の負の点での値を必要とすることである．$k\in\mathbb{N}$ が充分大きくとれば，$|\zeta(s+k)|$ は 1 に近い値をとるようにできるが，$|\zeta(s-k)|$ は s によってはどんな $k\in\mathbb{N}$ に対しても大きくなることがある．もちろん $|\zeta(s+k)|/k!$ は小さくなるが，大きい数 $\div$ 大きい数となっているのは数値計算などで不利になる可能性があるかもしれない．

2.2 主結果

主結果は以下の通りである．一言で表せば，「Tornheim 2 重ゼータ関数の Desingularization と Rapidly convergent series representations を与えた」ということになる．論文 [7] も同様のテーマを扱っているが，それの類似かつ改良である．

$$g(s,t,u) := e^{-\pi i(s+t+u)/2}(2\pi)^{s+t+u}, \qquad G(s,t,u) := \frac{g(s,t,u)}{\Gamma(s)\Gamma(t)\Gamma(u)}$$

とし, $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$\eta_k^{\pm}(s) := (\pm 2)^{-k}\binom{k-s}{k}\zeta(k+1-s)$$

とおく．さらに

$$\kappa_{l,m,n} = \begin{cases}1 & l+m+n \text{ is even,}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

と書くことにする．

$$\begin{aligned}S_1(s,t,u) &:= \bigl(1+e^{-\pi i(s+t+u)}\bigr)T(s,t,u) \\ &+\bigl(e^{-\pi i s}+e^{-\pi i(u+t)}\bigr)T(u,s,t) + \bigl(e^{-\pi i t}+e^{-\pi i(u+s)}\bigr)T(t,u,s),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_2(s,t,u) &:= \big(e^{-\pi i u} + e^{-\pi i(s+t)}\big)T(s,t,u) \\
&+ \big(e^{-\pi i t} + e^{-\pi i(u+s)}\big)T(u,s,t) + \big(e^{-\pi i s} + e^{-\pi i(t+u)}\big)T(t,u,s),
\end{aligned}
$$

とするとき，次の定理が成り立つ.

Theorem 2.1. *true singularities* $s+t \in \mathbb{Z}_{\le 1}$ を除いて,

$$
\begin{aligned}
S_1(s,t,u) = G(s,t,u)\Bigg\{ &\sum_{l,m,n=0}^{\infty} \frac{\kappa_{l,m,n}\eta_l^+(s)\eta_m^+(t)\eta_n^-(u)}{l+m+n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{1-s-t}\eta_n^+(u)}{s+t+n-1} \\
&+ \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\eta_m^-(t)\eta_n^+(u)}{2^s(s+m+n)} + \sum_{l,n=0}^{\infty} \frac{\eta_l^-(s)\eta_n^+(u)}{2^t(t+l+n)} + \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{\eta_l^+(s)\eta_m^+(t)}{2^u(u+l+m)} \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

true singularities $s+t \in \mathbb{Z}_{\le 1}$, $t+u \in \mathbb{Z}_{\le 1}$, $u+s \in \mathbb{Z}_{\le 1}$ 又は $s+t+u=2$, を除いて

$$
\begin{aligned}
S_2(s,t,u) = G(s,t,u)\Bigg\{ &\frac{2^{2-s-t-u}}{s+t+u-2} + \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \frac{\kappa_{l,m,n}\eta_l^+(s)\eta_m^+(t)\eta_n^+(u)}{l+m+n+1} \\
&+ \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{\eta_l^-(s)\eta_m^-(t)}{2^u(u+l+m)} + \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\eta_m^-(t)\eta_n^-(u)}{2^s(s+m+n)} + \sum_{n,l=0}^{\infty} \frac{\eta_n^-(u)\eta_l^-(s)}{2^t(t+n+l)} \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{1-t-u}\eta_l^-(s)}{t+u+l-1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{1-u-s}\eta_m^-(t)}{u+s+m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{1-s-t}\eta_n^-(u)}{s+t+n-1} \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
S_3(s,t,u) &:= T(s,t,u) + T(u,s,t) + T(t,u,s), \\
S_4(s,t,u) &:= -T(s,t,u) + T(u,s,t) + T(t,u,s),
\end{aligned}
$$

とし， $\mathbb{Z}_{\le 1}^{od}$ を 1 以下の奇数全体，$\mathbb{Z}_{\le 0}^{ev}$ を正でない偶数全体とし,

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\cos}(s) &:= \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big), & \Gamma_{\sin}(s) &:= \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sin\Big(\frac{\pi s}{2}\Big), \\
G_{ccc}(s,t,u) &:= \frac{4}{\Gamma_{\cos}(s)\Gamma_{\cos}(t)\Gamma_{\cos}(u)}, & G_{ssc}(s,t,u) &:= \frac{4}{\Gamma_{\sin}(s)\Gamma_{\sin}(t)\Gamma_{\cos}(u)}.
\end{aligned}
$$

とおくと，次の定理が成り立つ.

Theorem 2.2. *true singularities* $s+t \in \mathbb{Z}_{\le 1}^{od}$, $t+u \in \mathbb{Z}_{\le 1}^{od}$, $u+s \in \mathbb{Z}_{\le 1}^{od}$ 又は

$s+t+u=2$ を除いて,

$$S_3(s,t,u)=G_{ccc}(s,t,u)\left\{\frac{2^{-s-t-u}}{s+t+u-2}+\sum_{l,m,n=0}^{\infty}\frac{\eta_{2l}^{+}(s)\eta_{2m}^{+}(t)\eta_{2n}^{+}(u)}{2l+2m+2n+1}\right.$$
$$+\sum_{l,m=0}^{\infty}\frac{2^{-u}\eta_{2l}^{+}(s)\eta_{2m}^{+}(t)}{u+2l+2m}+\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{2^{-s}\eta_{2m}^{+}(t)\eta_{2n}^{+}(u)}{s+2m+2n}+\sum_{n,l=0}^{\infty}\frac{2^{-t}\eta_{2n}^{+}(u)\eta_{2l}^{+}(s)}{t+2n+2l} \tag{2.5}$$
$$\left.+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2^{-t-u}\eta_{2l}^{+}(s)}{t+u+2l-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{-u-s}\eta_{2m}^{+}(t)}{u+s+2m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-s-t}\eta_{2n}^{+}(u)}{s+t+2n-1}\right\}.$$

true singularities $s+t\in\mathbb{Z}_{\leq 1}^{od}$, $t+u\in\mathbb{Z}_{\leq 0}^{ev}$, $u+s\in\mathbb{Z}_{\leq 0}^{ev}$ 又は $s+t+u=2$ を除いて,

$$S_4(s,t,u)=G_{ssc}(s,t,u)\left\{\frac{2^{-s-t-u}}{s+t+u-2}+\sum_{l,m,n=0}^{\infty}\frac{\eta_{2l+1}^{+}(s)\eta_{2m+1}^{+}(t)\eta_{2n}^{+}(u)}{2l+2m+2n+3}\right.$$
$$+\sum_{l,m=0}^{\infty}\frac{2^{-u}\eta_{2l+1}^{+}(s)\eta_{2m+1}^{+}(t)}{u+2l+2m+2}-\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{2^{-s}\eta_{2m+1}^{+}(t)\eta_{2n}^{+}(u)}{s+2m+2n+1}-\sum_{n,l=0}^{\infty}\frac{2^{-t}\eta_{2n}^{+}(u)\eta_{2l+1}^{+}(s)}{t+2n+2l+1}$$
$$\left.-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2^{-t-u}\eta_{2l+1}^{+}(s)}{t+u+2l}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{-u-s}\eta_{2m+1}^{+}(t)}{u+s+2m}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-s-t}\eta_{2n}^{+}(u)}{s+t+2n-1}\right\}. \tag{2.6}$$

$\eta_k^{\pm}(s)/\Gamma(s)$ が全ての $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $s\in\mathbb{C}$ に対して極を持たないことから，symmetric Tornheim double zeta functions の極は急速収束級数表示において，和の中身の分母が 0 になっている個所からしか来ないことがわかる．singularities についてまとめると

$S_1(s,t,u)$ の TS (true singularities) は $s+t\in\mathbb{Z}_{\leq 1}$ 上のみ

$S_3(s,t,u)$ の TS は $s+t\in\mathbb{Z}_{\leq 1}^{od}$, $t+u\in\mathbb{Z}_{\leq 1}^{od}$, $u+s\in\mathbb{Z}_{\leq 1}^{od}$ and $s+t+u=2$ 上のみ

$S_4(s,t,u)$ の TS は $s+t\in\mathbb{Z}_{\leq 1}^{od}$, $t+u\in\mathbb{Z}_{\leq 0}^{ev}$, $u+s\in\mathbb{Z}_{\leq 0}^{ev}$ and $s+t+u=2$ 上のみ

しかしながら、

$T(s,t,u)$ の TS は $t+u\in\mathbb{Z}_{\leq 1}$, $u+s\in\mathbb{Z}_{\leq 1}$ and $s+t+u=2$ 上のみ

$S_2(s,t,u)$ の TS は $s+t\in\mathbb{Z}_{\leq 1}$, $t+u\in\mathbb{Z}_{\leq 1}$, $u+s\in\mathbb{Z}_{\leq 1}$ and $s+t+u=2$ 上のみ.

したがって $S_1(s,t,u)$, $S_3(s,t,u)$ と $S_4(s,t,u)$ は $T(s,t,u)$ の「Desingularization」を与えていることが分かる．さらに $|\eta_k^{\pm}(s)/\eta_{k+1}^{\pm}(s)|\to 2$, $k\to\infty$ であるので，上の級数は globally かつ rapidly に収束する.

2.3 系と注意

上の定理は symmetric Tornheim double zeta functions の急速収束級数表示であったが，クラメールの公式などを用いることにより，次の系のように $T(s,t,u)$ 単独を取り出すことができる.

Corollary 2.3. *true singularities* $t+u \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$ 又は $u+s \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$ を除いて,

$$\begin{aligned}&(1-e^{-2\pi is})(1-e^{-2\pi it})(e^{-\pi i(s+t+u)}-1)T(s,t,u)= \\ &(e^{-2\pi i(s+t)}-1)S_1(s,t,u)+e^{-\pi is}(1-e^{-2\pi it})S_1(u,s,t) \\ &\qquad +e^{-\pi it}(1-e^{-2\pi is})S_1(t,u,s).\end{aligned} \tag{i}$$

true singularities $t+u \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$, $u+s \in \mathbb{Z}_{\leq 1}$ 又は $s+t+u=2$ を除いて,

$$\begin{aligned}&(1-e^{-2\pi is})(1-e^{-2\pi it})(e^{-\pi i(s+t)}-e^{-\pi iu})T(s,t,u)= \\ &(e^{-2\pi i(s+t)}-1)S_2(s,t,u)+e^{-\pi it}(1-e^{-2\pi is})S_1(u,s,t) \\ &\qquad +e^{-\pi is}(1-e^{-2\pi it})S_1(t,u,s),\end{aligned} \tag{ii}$$

$$2T(s,t,u)=S_3(s,t,u)-S_4(s,t,u), \tag{iii}$$

$$\begin{aligned}&(1-e^{-\pi is})(1-e^{-\pi it})(1+e^{-\pi iu})T(s,t,u)= \\ &(1+e^{-\pi iu})(1+e^{-\pi i(s+t)})S_3(s,t,u)-S_1(u,s,t)-S_1(t,u,s),\end{aligned} \tag{iv}$$

$$\begin{aligned}&(1+e^{-\pi is})(1+e^{-\pi it})(1+e^{-\pi iu})T(s,t,u)= \\ &-(1+e^{-\pi iu})(1+e^{-\pi i(s+t)})S_3(s,t,u)+S_1(u,s,t)+S_1(t,u,s),\end{aligned} \tag{v}$$

$$\begin{aligned}&(1-e^{-\pi is})(1-e^{-\pi it})(1+e^{-\pi iu})T(s,t,u)= \\ &S_1(s,t,u)+S_2(s,t,u)-(e^{-\pi is}+e^{-\pi it})(1+e^{-\pi iu)})S_3(s,t,u),\end{aligned} \tag{vi}$$

$$\begin{aligned}&(1+e^{-\pi is})(1+e^{-\pi it})(1+e^{-\pi iu})T(s,t,u)= \\ &S_1(s,t,u)+S_2(s,t,u)-(e^{-\pi is}+e^{-\pi it})(1+e^{-\pi iu})S_4(s,t,u).\end{aligned} \tag{vii}$$

$$2T(s,t,u)=S_4(u,s,t)+S_4(t,u,s). \tag{viii}$$

主定理を用いて $T(s,s,s)$ の非正の整数点の値を求めることができる．これは Onodera [10, Theorem 1] の特別な場合である．

Corollary 2.4. k を負の整数とすると,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)=\frac{1}{3}, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} T(k+\varepsilon,k+\varepsilon,k+\varepsilon)=0.$$

更に，Romik [11, Theorem 1.2 (ii)] による以下の主張も証明できる．

Corollary 2.5. $T(s,s,s)$ の極は全て 1 位であり

$$s=2/3 \qquad \text{and} \qquad s=1/2-k, \quad k\in\mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{2.7}$$

のみに存在する．

この事実から以下のことが簡単に証明できる.

Corollary 2.6. $T(s,s,s)$ は

$$\sum_{k=1}^{j} c_k \prod_{r=1}^{q} \zeta^{d_{kr}}(a_{kr}s+b_{kr}), \qquad a_{kr}, b_{kr}, c_k \in \mathbb{C}, \quad d_{kr} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{2.8}$$

という形では表記できない.

Barnes 2重ゼータ関数の特別な場合である $T(0,0,s)$, Euler-Zagier 2重ゼータ関数の特別な場合である $T(0,s,s)$ については

$$T(0,0,s) = \zeta(s-1) - \zeta(s), \qquad 2T(0,s,s) = \zeta^2(s) - \zeta(2s)$$

([12, (15) and (16) in p. 219] などを参照) という式がある. さらに

$$T(a,b,s) + (-1)^b T(b,s,a) + (-1)^a T(s,a,b) = \frac{1}{a!b!} \sum_{k=0}^{j} c_k \zeta(2k)\zeta(a+b+s-2k),$$

ただし $c_k \in \mathbb{N}$, (例えば [6, Theorem 1.2] を参照) という形で書くことができる. したがって, 系 2.6 は価値があると考えている.

昨年度講究録の訂正

昨年度講究録 [9, 最期に] において, c を 0 でない複素数, χ_1 と χ_2 を非同値な Dirichlet 指標とする. このとき充分大きい $T>0$ に対して,

$$\sharp\{s : L(s,\chi_1) = L(s,\chi_2) = c, \ 1/2 < \Re(s) < 1, \ |\Im(s)| < T\} \gg T.$$

が Voronin の同時普遍性から従うと述べたが, この主張は強すぎる（正しいかもしれないが, 冷静になって考えると証明はできなかった）ので, 以下のように訂正する.

$1/2 < \sigma < 1$, c を 0 でない複素数, χ_1 と χ_2 を非同値な Dirichlet 指標とする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathrm{meas}\Big\{\tau \in [0,T] : \max_{l=1,2} \big|L(\sigma+it,\chi_l) - c\big| < \varepsilon\Big\},$$

ただし meas$A$ は集合 A のルベーグ測度, が成り立つ. あるいは, $(0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{C}^2$, χ_1 と χ_2 を非同値な Dirichlet 指標とする. このとき充分大きい $T>0$ に対して,

$$\sharp\{s : L(s,\chi_1) + aL(s,\chi_2) = b, \ 1/2 < \Re(s) < 1, \ |\Im(s)| < T\} \gg T$$

という主張も成り立つ. $a=-1$, $b=0$ とすることにより,

$$\sharp\{s : L(s,\chi_1) = L(s,\chi_2) = c, \ 1/2 < \Re(s) < 1, \ |\Im(s)| < T\} \gg T$$

となる 0 でない複素数 c が存在することがわかる．

いずれにせよ,「$L_1(s), L_2(s)$ を extended Selberg class の元とし, $L_1(\infty) = L_2(\infty) = 1$ であるとき，ある複素数 $c \neq 0$ に対し，$L_1(s) = c$ を充たす s の集合と $L_2(s) = c$ を充たす s の集合が一致する」ことを証明するのは極めて困難であると考えている．

Acknowledgments The author was partially supported by JSPS grant 16K05077.

参考文献

[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1976.

[2] J. M. Borwein, Hilbert's inequality and Witten's zeta-function. *Am. Math. Monthly* **115** (2008), no. 2, 125–137.

[3] H. Furusho, Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, Desingularization of multiple zeta-functions of generalized Hurwitz-Lerch type and evaluation of p-adic multiple L-functions at arbitrary integers. *Various aspects of multiple zeta values*, 27–66, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B68**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2017.

[4] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions* in: Number Theory for the Millennium II, Proc. of the Millennial Conference on Number Theory, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, (2002), 417-440.

[5] K. Matsumoto, and T. Nakamura, H. Ochiai and H. Tsumura, On value-relations, functional relations and singularities of Mordell-Tornheim and related triple zeta-functions. *Acta Arith.* **132** (2008), no. 2, 99–125.

[6] T. Nakamura, A functional relation for the Tornheim double zeta function. *Acta Arithmetica.* **125** (2006), no. 3, 257–263.

[7] T. Nakamura, Symmetric Tornheim double zeta functions, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg.* **91** (2021), no. 1, 5–14.

[8] T. Nakamura, Rapidly convergent series representations of symmetric Tornheim double zeta functions, *Acta Math. Hungar.* **165** (2021), 397–414.

[9] T. Nakamura,「quadrilateral zeta function について」数理解析講究録 No.2196（解析的整数論の展望と諸問題）112–124.

[10] K. Onodera, Mordell-Tornheim multiple zeta values at non-positive integers. *Ramanujan J.* **32** (2013), no. 2, 221–226.

[11] D. Romik, On the number of n-dimensional representations of $SU(3)$, the Bernoulli numbers, and the Witten zeta function, *Acta Arithmetica.* **180** (2017), 111–159.

[12] H. M. Srivastava and J. Choi, *Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals.* Elsevier, Inc., Amsterdam, 2012.

[13] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function,* Second edition. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[14] Wikipedia, *Riemann zeta function.* `https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function`