

多重 Bernoulli 数の組合せ的解釈と Stephan の観察について

On the combinatorics of poly-Bernoulli numbers and Stephan's observation

松坂俊輝 (Toshiki Matsusaka)

序

多重 Bernoulli 数 $B_n^{(k)} \in \mathbb{Q}$ ($n \geq 0, k \in \mathbb{Z}$) は, 多重対数関数 $\text{Li}_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m/m^k$ を用いた母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} = \frac{\text{Li}_k(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}}$$

によって定義される. 多重対数関数の $k = 1$ の場合が通常対数関数であること, つまり $\text{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ であることから, 古典的な Bernoulli 数 $B_n = B_n^{(1)}$ が得られる. 故に「多重」「Bernoulli 数」というわけである. この対象が最初に導入されたのは金子の論文 [24] において, 1997 年のことである. 金子自身は [26] において「半ば戯れに定義した」対象であると語っているが, 次第に明らかとなる多重 Bernoulli 数の多様な側面——多重ゼータ値との関係 (荒川–金子のゼータ関数) や Clausen–von Staudt 型の定理, 負の指数をもつ場合の組合せ的解釈, 有限多重ゼータ値との関係など——は多くの研究者の興味を強く惹きつけ, 2022 年 3 月現在では, MathSciNet で論文 [24] を調べてみると 98 Citations が確認できるほどである.

本稿の目的は「負の指数をもつ多重 Bernoulli 数の組合せ的解釈」に焦点を絞り, 最近 Bényi らと行った一連の研究 [5–7, 22, 33] を紹介することである. 本題に移る前に, まずは本研究に着手するに至った経緯について簡単に振り返りたいと思う.

私と本研究テーマとの出会いは, 2016 年 2 月に提出された修士論文「多重ベルヌーイ数および多重ベルヌーイ多項式のある和について」においてであった. これは研究室の先輩である櫻井ふみさんによって執筆されたもので, 後に金子–櫻井–津村による共著論文 [27] として出版されている. 簡単に内容を説明すると, 対称化多重 Bernoulli 数 (と私が呼び始めた数列) $\mathcal{B}_n^{(-k)}(m)$ を導入し, その基本的な性質を調べるといものである. これは負の指数をもつ多重 Bernoulli 数を, それが備える対称性 $B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}$ を保持するように一般化したものであり, 特に整数値の数列を与えている. また論文 [27] の最後のセクションでは, 荒川–金子 [2] の Proposition の類似として, C 版の多重 Bernoulli 数 $\mathcal{B}_n^{(-k)}(1) = C_n^{(-k-1)}$ のある和を考えており, それが Genocchi 数という, ある組合せの対象の数え上げに現れる数列に一致することが示されている.

では C 版の多重 Bernoulli 数と Genocchi 数の間の関係は, 一般の対称化多重 Bernoulli 数に対してはどのように拡張されるだろうか. この素朴な疑問は櫻井の修士論文においても問いかけてられている. 2016 年の修論発表を聞いて興味を持った私は, すぐにこの問題に取り組み, 幸いにして一つの回答らしきものに辿り着くことができた. 早速 2017 年 2 月に開催された第 10 回ゼータ若手研究集会において発表を行ったのであるが, その後, 論文執筆をせずだらだらと時間が経ってしまい, 研究成果を短いノート [33] として arXiv に発表したのは 2020 年 3 月末のこととなってしまった. しかし, こうして短くともしっかり論文として発表することは重要なようで, 間も無くして 2020 年 5 月末ごろに, ハンガリーの Beáta Bényi さんから突然のメールを頂いた. そこには論文に興味を持った旨と, “Would you be interested to work together on this?” とのお誘いがあり, こうして唐突に始まったのが本共同研究である.

本稿は 2021 年度 RIMS 共同研究「解析的整数論とその周辺」において著者が行った講演「中央二項級数に関する Stephan の観察について」の報告記事である。しかし良い機会なので講演内容のみならず、一連の共同研究をまとめて紹介したいと思立ち、タイトルを「多重 Bernoulli 数の組合せ的解釈と Stephan の観察について」と変更することにした。

1. 対称化多重 Bernoulli 数と問題設定

1.1. 定義. 対称化多重 Bernoulli 数の導入に至った動機を説明するために、まずは多重 Bernoulli 多項式の定義を与える。

Definition 1.1. 整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し、**多重 Bernoulli 多項式** $B_n^{(k)}(x)$ を母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = e^{-xt} \frac{\text{Li}_k(1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}}$$

によって定義する。ここで、

$$\text{Li}_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^k} \quad (|z| < 1)$$

は**多重対数関数**である。

定義から直ちに分かることとして、 $x = 0$ における値は多重 Bernoulli 数 $B_n^{(k)}(0) = B_n^{(k)}$ である。また $x = 1$ での値 $B_n^{(k)}(1) = C_n^{(k)}$ は C 版の多重 Bernoulli 数と呼ばれることがある。さらに多重対数関数の定義に注意すれば、 $k \leq 0$ のとき、 $B_n^{(k)}(x) \in \mathbb{Z}[x]$ であることも分かる。以下、上指数が負の場合に $B_n^{(k)}, C_n^{(k)}$ の数表を示すが、注意深く見れば、これらが対称性 $B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}, C_n^{(-k-1)} = C_k^{(-n-1)}$ を有することに気が付くだろう。

$k \setminus n$	0	1	2	3	4
0	1	1	1	1	1
1	1	2	4	8	16
2	1	4	14	46	146
3	1	8	46	230	1066
4	1	16	146	1066	6902

$k \setminus n$	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	1	3	7	15	31
3	1	7	31	115	391
4	1	15	115	675	3451

TABLE 1. $B_n^{(-k)}(0) = B_n^{(-k)}$ (左図) および、 $B_n^{(-k)}(1) = C_n^{(-k)}$ (右図)

一方で m を 2 以上の整数とすると、 $B_n^{(-k)}(m)$ が同様の対称性を有しているかどうかは、一見して分からない。

$k \setminus n$	0	1	2	3	4
0	1	-1	1	-1	1
1	1	0	0	0	0
2	1	2	2	2	2
3	1	6	18	42	90
4	1	14	86	374	1382
5	1	30	330	2370	13650

$k \setminus n$	0	1	2	3	4
0	1	-2	4	-8	16
1	1	-1	1	-1	1
2	1	1	-1	1	-1
3	1	5	7	5	7
4	1	13	59	157	347
5	1	29	271	1469	6031

TABLE 2. $B_n^{(-k)}(2)$ (左図) および、 $B_n^{(-k)}(3)$ (右図)

金子-櫻井-津村 [27] による対称化多重 Bernoulli 数は、 $m \geq 2$ の場合にも適切に $B_n^{(-j)}(m)$ の線形和を取ることによって対称性を付与したい、という動機で導入されたものである。これは、やや発見的ではあるが、次のように定義される。

Definition 1.2 (対称化多重 Bernoulli 数). **第 1 種 Stirling 数** $[\cdot]$ を $[\cdot]_0 = 1, [\cdot]_m = [\cdot]_m^0 = 0$ ($m, n \neq 0$), および

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \quad (n \geq 0, m \geq 1)$$

によって定める. 非負整数 $n, k, m \geq 0$ に対し, **対称化多重 Bernoulli 数** $\mathcal{B}_n^{(-k)}(m)$ を

$$\mathcal{B}_n^{(-k)}(m) = \sum_{j=0}^m \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} B_n^{(-k-j)}(m) \in \mathbb{Z}$$

で定義する.

まず定義より, $\mathcal{B}_n^{(-k)}(0) = B_n^{(-k)}(0) = B_n^{(-k)}, \mathcal{B}_n^{(-k)}(1) = B_n^{(-k-1)}(1) = C_n^{(-k-1)}$ となる. また $m = 2, 3$ の場合, 最初の数項は次のように与えられる.

$k \setminus n$	0	1	2	3	4
0	2	2	2	2	2
1	2	8	20	44	92
2	2	20	104	416	1472
3	2	44	416	2744	15032
4	2	92	1472	15032	120632

$k \setminus n$	0	1	2	3	4
0	6	6	6	6	6
1	6	30	78	174	366
2	6	78	462	1950	7086
3	6	174	1950	14142	81726
4	6	366	7086	81726	708366

TABLE 3. $\mathcal{B}_n^{(-k)}(2)$ (左図) および, $\mathcal{B}_n^{(-k)}(3)$ (右図)

上の表から期待されるように, 一般の非負整数 $n, k, m \geq 0$ に対して, $\mathcal{B}_n^{(-k)}(m) = \mathcal{B}_k^{(-n)}(m)$ が成り立つ. これは次の主張から直ちに従う.

Theorem 1.3. [27, Theorem 2.1] 任意の非負整数 $m \geq 0$ に対し,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(-k)}(m) \frac{x^n y^k}{n! k!} = \frac{m! e^{x+y}}{(e^x + e^y - e^{x+y})^{m+1}}$$

が成り立つ.

一旦, 上記の定理を認めてしまえば, この母関数を対称化多重 Bernoulli 数の定義だと思ってしまっても差し支えないであろう. (ただし母関数の形から明らかに対称性が成り立つので, もはや「対称化」という意味合いはほとんどなくなってしまふ). 以後, 簡単のために次のように記号を修正したものを, 本稿の主役として扱うことにする.

Definition 1.4. 非負整数 $n, k, m \geq 0$ に対し, $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(m) = \frac{1}{m!} \mathcal{B}_n^{(-k)}(m)$ と定義する.

また次の明示公式も知られているので, ここに記しておく.

Theorem 1.5. [27, (2.9)] **第 2 種 Stirling 数** $\{ \cdot \}$ を $\{ \cdot \}_0 = 1, \{ \cdot \}_m = \{ \cdot \}_m^0 = 0$ ($m, n \neq 0$), および

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ m-1 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} \quad (n \geq 0, m \geq 1)$$

によって定める. このとき, 任意の非負整数 $n, k, m \geq 0$ に対して, 次が成り立つ.

$$\widehat{\mathcal{B}}_n^k(m) = \sum_{j=0}^{\min(n,k)} j!(m+1)_j \begin{Bmatrix} n+1 \\ j+1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k+1 \\ j+1 \end{Bmatrix}.$$

ここで, $(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ は **Pochhammer 記号** である.

1.2. 問題設定. 本稿の構成について、問題設定と合わせてまとめておく。まず櫻井の修士論文において、次の等式が示されている。

$$(1.1) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(1) = (-1)^{n/2} G_n.$$

ここで G_n は Genocchi 数であり、Section 2 で説明するように、ある組合せ的对象の数え上げで与えられる数列である。(金子-櫻井-津村 [27] の G_n とは定義が若干異なることに注意しておく)。最初の数項は $(G_n)_{n \geq 0} = (1, 0, 1, 0, 3, 0, 17, 0, 155, \dots)$ で与えられ、特に n が奇数のとき $G_n = 0$ となる。これは荒川-金子 [2] が与えた等式

$$(1.2) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(0) = \delta_{n,0}, \quad (\widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(0) = B_{n-k}^{(-k)} \text{ に注意})$$

(ここで $\delta_{n,0}$ は Kronecker のデルタ) の類似である。それならば、左辺の $\widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(1)$ を一般の $\widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(m)$ に取り替えるとどうなるであろうか？これが櫻井の問いの一つであり、論文 [33] で取り扱った問題である。

Section 3 では、対称化多重 Bernoulli 数を多項式化した**対称化多重 Bernoulli 多項式**

$$(1.3) \quad \widehat{\mathcal{B}}_n^k(x) = \sum_{j=0}^{\min(n,k)} j!(x+1)_j \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k+1 \\ j+1 \end{matrix} \right\}$$

の組合せ的解釈について説明する。負の指数をもつ多重 Bernoulli 数 $B_n^{(-k)}$ は非負整数であり、Brewbaker [12] や Launois [31], Bényi-Hajnal [3] によって、 $B_n^{(-k)}$ の様々な組合せ的解釈が明らかになっている。例えば Brewbaker は、 n 行 k 列のロンサム行列の総数が $B_n^{(-k)}$ に等しいことを示している。それでは一般の $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(m)$ についても、同様に何かを数え上げることで実現できるだろうか？これが金子-櫻井-津村 [27, p.204] の一つの問いかけであった。この問題については、Bényi-松坂 [7] および広瀬-松坂-関川-吉崎 [22] において研究を行い、 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の組合せ的解釈を複数与えることに成功している。

また本稿では扱わないが、Bényi-松坂 [5] において「対称化する前の多重 Bernoulli 多項式 $B_n^{(-k)}(x)$ や、多重 Bernoulli 数の亜種である多重 Euler 数、その他類似の対象についても、組合せ的解釈を与えることができるか？」という問題にも着手している。この問題についても様々な可能性が考えられるが、手始めに最も基本的となる Callan 列 (の変種) を考えることで、組合せ的解釈の一つを与えている。

最後に Section 4 では、多重 Bernoulli 数に関する Stephan の観察を紹介する。式 (1.2) の類似として、次の和を考えることができる。

$$b_n = \sum_{k=0}^n B_{n-k}^{(-k)}.$$

最初の数項を計算すると、 $(b_n)_{n \geq 0} = (1, 2, 4, 10, 32, 126, \dots)$ であるが、2004 年 Stephan [42, A098830] は、この値が中央二項級数の負の整数点での値 $\zeta_{\text{CB}}(-n)$ の有理数部分の 3 倍と等しくなる、ということを観察した。ここで、**中央二項級数**とは、

$$(1.4) \quad \zeta_{\text{CB}}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s \binom{2m}{m}} \quad (s \in \mathbb{C})$$

で定義される Dirichlet 級数であるが、実際、最初の数項を計算してみると、

$$\zeta_{\text{CB}}(0) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad \zeta_{\text{CB}}(-1) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad \zeta_{\text{CB}}(-2) = \frac{4}{3} + \frac{10}{27} \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad \zeta_{\text{CB}}(-3) = \frac{10}{3} + \frac{74}{81} \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

となり、確かに数列 1, 2, 4, 10 が現れていることが見て取れる。この観察は [25] や [26], [4] において予想として提出されていた。Bényi-松坂 [6] では、この観察に証明を与え、さらに $\pi/\sqrt{3}$ の係数が Foata-Schützenberger [19] によって導入された二変数 Eulerian 多項式と関係することを明らかにしている。

1.3. 多項式の組合せ的解釈とは. 必ずしも厳密な定義ではないが、多項式が「組合せ的解釈を持つ」ことを次のように定めておく.

Definition 1.6. “組合せ的対象”からなる (有限) 集合 \mathcal{C} に対し, 写像 $w : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のことを (\mathcal{C} 上の) **statistic** と呼ぶ. 多項式 $p(x)$ に対し, ある組合せ的対象からなる集合 \mathcal{C} と statistic w が存在し,

$$p(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} x^{w(c)}$$

が成り立つとき, $p(x)$ は**組合せ的解釈** (\mathcal{C}, w) を持つという.

Example 1.7. n 元集合 $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ に対し, その冪集合 $\mathfrak{P}([n])$ 上の statistic として例えば $\text{car}(S) = |S|$ (cardinality) が挙げられる. このとき,

$$\sum_{S \in \mathfrak{P}([n])} x^{\text{car}(S)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$$

が成り立つ.

Example 1.8. 正の整数 n に対し, $[n]$ の全ての順列 $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$ からなる集合を \mathfrak{S}_n とおく. 特に \mathfrak{S}_n 上の statistics は **permutation statistics** と呼ばれる. 例えば,

- $\text{des}(\pi) = \#\{i \in [n-1] \mid \pi_i > \pi_{i+1}\}$ (descents)
- $\text{cyc}(\pi) =$ 順列 π をサイクルに分割したときのサイクルの個数 (cycles)
- $\text{lrm}(\pi) = \#\{i \in [n] \mid j < i \text{ ならば } \pi_j > \pi_i\}$ (left-to-right minima)

は permutation statistics の有名な例であり, それぞれ,

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{des}(\pi)} = A_n(x) \quad (\text{Eulerian 多項式}),$$

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{cyc}(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{lrm}(\pi)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = x(x+1) \dots (x+n-1)$$

となることが知られている.

2. 対称化多重 Bernoulli 多項式と Gandhi 多項式

2.1. Dumont–Foata の仕事. まずは, 本稿で扱う Genocchi 数の定義を与える.

Definition 2.1 (shifted version). 整数 $n \geq 0$ に対し, **Genocchi 数** G_n を $G_n = 2(2^{n+2} - 1)|B_{n+2}|$ で定める. ここで $B_n = B_n^{(1)}$ は古典的な Bernoulli 数である. すなわち, 次の母関数表示を満たす.

$$t \tan \frac{t}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{t^{n+2}}{(n+2)!}.$$

最初の数項を思い出しておくと, $(G_n)_{n \geq 0} = (1, 0, 1, 0, 3, 0, 17, 0, 155, \dots)$ となっている. ここで Genocchi とは, Angelo Genocchi (1817–1889) のことである. さて時は経ち 1970 年, Gandhi [20] は Genocchi 数について観察を行い, 次の予想に辿り着いた (実際には異なる書き方をしているが, 同値な言い換えとなっている): 多項式 $G_n(x)$ を $G_0(x) = 1, G_1(x) = 0$, および

$$(2.1) \quad G_{n+2}(x) = x(x+1)G_n(x+1) - x^2G_n(x)$$

で定義するとき, $G_n(1) = G_n$ を満たすだろう. この予想はすぐに Carlitz [13] および Riordan–Stein [40] によって証明を与えられている. 以降この多項式 $G_n(x)$ は **Gandhi 多項式** と呼ばれ, 様々な研究が行われているようである. ここでは研究の一つとして, Dumont [16] および Dumont–Foata [17] による Gandhi 多項式の拡張と, 彼らを与えた組合せ的解釈について紹介したい.

Definition 2.2. 正の偶数 n に対し, 集合 \mathcal{P}_n を全射写像 $p : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow \{2, 4, 6, \dots, n\}$ であって, 任意の $x \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ に対し, $p(x) \geq x$ が成り立つもの全体と定義する. (各写像 $p \in \mathcal{P}_n$ をサイズ n の**全射ピストル**と呼ぶこともある [38]). また奇数 n に対しては $\mathcal{P}_n = \emptyset$ と定義しておく.

Example 2.3. $|\mathcal{P}_6| = 17$ である. 実際, \mathcal{P}_6 の元 p を $p = p(1)p(2)p(3)p(4)p(5)p(6)$ の表示を用いて列挙すると,

$$p = 224466, 224666, 226466, 244466, 244666, 246466, 246666, 264466, 264666, \\ 266466, 424466, 424666, 426466, 426666, 624466, 624666, 626466$$

である.

全射ピストル $p \in \mathcal{P}_n$ を次のような図で理解することもできる.

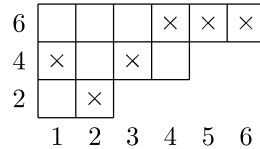


FIGURE 1. $p = 424666 \in \mathcal{P}_6$ (おそらくこの形状から「ピストル」の名前がついたものと思われる)

このとき, Dumont と Foata は次の 3 つの \mathcal{P}_n 上の statistics を考えることで, Gandhi 多項式に組合せ的解釈を与えている.

- $\text{sai} : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (saillant, または left-to-right maxima と呼ばれる) : $\text{sai}(p) = \#\{i \in [n] \mid j < i \text{ ならば } p(j) < p(i)\}$. Fig. 1 の例だと, $\text{sai}(p) = \#\{1, 4\} = 2$ となる. 下の図のように, \times 印を覆いながら左下から右上に進むときの階段の段数と理解することもできる.

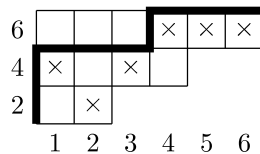


FIGURE 2. $\text{sai}(p)$ の図による表示

- $\text{fix}(p) = \#\{i \in [n] \mid p(i) = i\}$ (fixe). Fig. 1 の例だと, $\text{fix}(p) = \#\{2, 6\} = 2$.
- $\text{max}(p) = \#\{i \in [n-1] \mid p(i) = 2n\}$ (maximal). Fig. 1 の例だと, $\text{max}(p) = \#\{4, 5\} = 2$.

Theorem 2.4. [17, Dumont–Foata 多項式] 非負整数 $n \geq 0$ に対し, 3 変数多項式 $F_n(x, y, z)$ を, $F_0(x, y, z) = 1$ および

$$F_n(x, y, z) = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} x^{\text{sai}(p)} y^{\text{fix}(p)} z^{\text{max}(p)}$$

で定義する. このとき, $F_n(x, y, z)$ は対称多項式であり,

$$G_n(x) = F_n(x, 1, 1) = F_n(1, x, 1) = F_n(1, 1, x)$$

が成り立つ. 特に, $|\mathcal{P}_n| = G_n$ が成り立つ.

Definition 1.6 で準備した言葉遣いをするならば, Dumont–Foata の結果は, Gandhi 多項式 $G_n(x)$ が 3 つの組合せ的解釈 $(\mathcal{P}_n, \text{sai}), (\mathcal{P}_n, \text{fix}), (\mathcal{P}_n, \text{max})$ を持つことを示している.

Example 2.5. $n = 4$ のとき, $\mathcal{P}_4 = \{2244, 2444, 4244\}$ のそれぞれに対し, $(\text{sai}, \text{fix}, \text{max}) = (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)$ が成り立つので, $F_4(x, y, z) = xyz(xy + xz + yz)$ となる. 特に, $F_4(x, 1, 1) = x(2x + 1)$ は Gandhi 多項式 $G_4(x)$ と一致する.

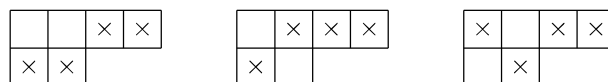


FIGURE 3. \mathcal{P}_4 に属する 3 つの全射ピストル

2.2. 対称化多重 Bernoulli 多項式との関係. 対称化多重 Bernoulli 多項式を (1.3) のように定めるとき, (1.1) および (1.2) の拡張として, 次が成り立つ.

Theorem 2.6. [33] 任意の非負整数 $n \geq 0$ に対し,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(x) = (-1)^{n/2} G_n(x)$$

が成り立つ. 特に n が奇数のとき, 両辺は 0 に等しい.

証明の概略. 論文 [33] では, 非負整数点 $x = m$ に限定して等式を示しているが, 両辺が $n/2$ 次多項式であることから, 直ちに本定理が得られることに注意しておく. 整数 $0 \leq j \leq n$ に対して,

$$a_{n,j} = \sum_{k=j}^{n-j} (-1)^k \begin{Bmatrix} n-k+1 \\ j+1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k+1 \\ j+1 \end{Bmatrix}$$

とおく. 第 2 種 Stirling 数の母関数表示 [1, Proposition 2.6 (8)] から, 数列 $a_{n,j}$ が (i) n が奇数または $2j > n$ のとき $a_{n,j} = 0$, (ii) n が偶数のとき $a_{n,0} = 1$, (iii) 任意の $j \geq 0$ に対し $a_{2j,j} = (-1)^j$, および漸化式

$$(2.2) \quad a_{n+2,j} = (j+1)^2 a_{n,j} - a_{n,j-1}$$

で特徴付けられることが分かる. まず $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x) = \widehat{\mathcal{B}}_k^n(x)$ であることから, n が奇数の場合に主張の左辺が 0 と等しくなることは明らかであるので, 以降 n は偶数としても良い. 対称化多重 Bernoulli 多項式の定義より,

$$\widetilde{G}_n(x) := (-1)^{n/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(x) = (-1)^{n/2} \sum_{j=0}^{n/2} j!(x+1)_j a_{n,j}$$

であるので, 漸化式 (2.2) を用いると, $\widetilde{G}_0(x) = 1$ および $\widetilde{G}_{n+2}(x) = x(x+1)\widetilde{G}_n(x+1) - x^2\widetilde{G}_n(x)$ を確認できる. よって $\widetilde{G}_n(x) = G_n(x)$ である. \square

2.3. 補足および気になること. 上記の証明は, Gandhi 多項式の満たす漸化式 (2.1) に基づくものであった. 一方で, Dumont–Foata が示したように Gandhi 多項式は組合せ的解釈を持ち, また次の章で紹介するように, 対称化多重 Bernoulli 多項式 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ も複数の組合せ的解釈を持つ. それならば, 組合せ的解釈の間に対応を作ることによって (交代和を考えるので, inclusion-exclusion 原理を用いるか? cf. Stanley [43, Theorem 2.1.1]), Theorem 2.6 を示すことはできるだろうか? 関連する話題として, 最近 Bényi–Josuat-Vergès [8] は組合せ的解釈の観点から, Theorem 2.6 とは異なる櫻井の等式 (1.1) の一般化を与えている.

一方で Carlitz [14] は Dumont–Foata 多項式の満たす母関数表示を明示的に与えており, 例えば Gandhi 多項式の場合に適用すると,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n/2} G_n(x) \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!(x+1)_k}{(2k+2)!} 2^{2k+2} \sinh(t/2)^{2k+2}$$

が成り立つ. 右辺について, 例えば $x = 0$ のとき $t^2/2$ と等しく, また $x = 1$ のとき $t \tanh(t/2)$ と等しくなる. Theorem 2.6 の成立を認めれば, 交代和 $\sum_{k=0}^n (-1)^k \widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(x)$ もまたこの母関数を満たすことが分かるが, 逆に $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の定義・性質からこの母関数表示を示すことによって, Theorem 2.6 を証明することはできるだろうか?

3. 対称化多重 Bernoulli 多項式の組合せ的解釈

Section 2 では, 対称化多重 Bernoulli 多項式 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ のある交代和が組合せ的解釈を持つことを示した. このセクションでは, [7] および [22] で与えた個々の $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ に対する複数の組合せ的解釈をオムニバスの紹介したい.

$k \setminus n$	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	$x + 2$	$3x + 4$	$7x + 8$
2	1	$3x + 4$	$2x^2 + 15x + 14$	$12x^2 + 57x + 46$
3	1	$7x + 8$	$12x^2 + 57x + 46$	$6x^3 + 108x^2 + 331x + 230$

TABLE 4. 対称化多重 Bernoulli 多項式 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$

3.1. 二重 Callan 列. 最初に Callan 列の変種によって $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ に組合せ的解释を与える. Callan 列の原型は OEIS [42, A099594] にて, David Callan によって与えられている.

Definition 3.1. [22] 整数 $n, k \geq 0$ に対し, 集合 $N = \{1_R, 2_R, \dots, n_R\}$, $K = \{1_B, 2_B, \dots, k_B\}$ を考える. ここで, 添字 R, B を持つ元をそれぞれ赤元, 青元と呼ぶ. $N \cup K$ の元を並べ替えることで2つの列 $S_1 = a_1 \cdots a_r, S_2 = b_1 \cdots b_s$ ($r, s \geq 0, r + s = n + k$) を作る. これが次の条件を満たすとき, 対 (S_1, S_2) をサイズ $n \times k$ の二重 Callan 列という.

- $r \geq 1$ ならば a_1 は青元. $s \geq 1$ ならば b_1 は赤元.
- 同じ色の元が連続するときは, 減少する順に並んでいる.

サイズ $n \times k$ の二重 Callan 列全体の集合を \mathcal{C}_n^k とおく.

Example 3.2. $(n, k) = (7, 6)$ のとき, $(S_1, S_2) = (6_B 7_R 6_R 5_B 1_B 3_R 1_R 3_B 2_R, 4_R 4_B 5_R 2_B)$ は二重 Callan 列である. 一方で $(S_1, S_2) = (6_B 7_R 6_R 5_B 1_B 3_R 1_R 3_B 2_R, 4_B 4_R 5_R 2_B)$ は, S_2 が青元で始まっており, 他にも $4_R 5_R$ が増加する順に並んでいるため, 二重 Callan 列ではない.

このとき, \mathcal{C}_n^k 上の statistics を1つだけ紹介する. (論文 [22] では他にも $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ を与えるような \mathcal{C}_n^k 上の2つの statistics $w_C^{\text{RL}}, w_C^{\text{br}}$ を構成している).

Definition 3.3. [7, left-to-right minima] 各 $(S_1, S_2) \in \mathcal{C}_n^k$ に対し, 文字列 S_1 を $S_1 = B_1 R_1 \cdots B_\ell R_\ell B_{\ell+1}$ のように同色のブロック毎に見る. ここで $B_{\ell+1} = \emptyset$ の可能性もある. 各青ブロック B_i ($1 \leq i \leq \ell$) 内の最小元を π_i と書き, 青元からなる長さ ℓ の文字列 $\pi = \pi_1 \cdots \pi_\ell$ を作る. もし S_1 が赤元を含まない場合は, $\pi = \emptyset$ である. このとき $\text{lrm}(\pi)$ を Example 1.8 と同様に,

$$\text{lrm}(\pi) = \#\{i \in [\ell] \mid j < i \text{ ならば } \pi_j > \pi_i\}, \quad \text{lrm}(\emptyset) = 0$$

で定義するとき, (記号の濫用ではあるが) \mathcal{C}_n^k 上の statistic $\text{lrm} : \mathcal{C}_n^k \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $\text{lrm}((S_1, S_2)) = \text{lrm}(\pi)$ で定義する.

Example 3.4. Example 3.2 における $(S_1, S_2) \in \mathcal{C}_7^6$ に対し, $B_1 = 6_B, B_2 = 5_B 1_B, B_3 = 3_B, B_4 = \emptyset$ である. よって $\pi = \pi_1 \pi_2 \pi_3 = 6_B 1_B 3_B$ となり, $\text{lrm}((S_1, S_2)) = \text{lrm}(613) = \#\{1, 2\} = 2$ が分かる.

Example 3.5. サイズ 1×2 の二重 Callan 列は以下の7つである. この個数は $\widehat{\mathcal{B}}_1^2(1) = C_1^{(-3)} = 7$ と一致している.

(S_1, S_2)	$(2_B 1_B 1_R, \emptyset)$	$(2_B 1_R 1_B, \emptyset)$	$(1_B 1_R 2_B, \emptyset)$	$(2_B 1_B, 1_R)$	$(1_B, 1_R 2_B)$	$(2_B, 1_R 1_B)$	$(\emptyset, 1_R 2_B 1_B)$
π	1_B	2_B	1_B	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
lrm	1	1	1	0	0	0	0

TABLE 5. \mathcal{C}_1^2 のリスト

上の例から, 多項式 $\sum_{(S_1, S_2) \in \mathcal{C}_1^2} x^{\text{lrm}((S_1, S_2))} = 3x + 4$ が対称化多重 Bernoulli 多項式 $\widehat{\mathcal{B}}_1^2(x) = 3x + 4$ と一致していることに気が付く. 一般のサイズに対しても, 次が成り立つことが示される.

Theorem 3.6. [7] 任意の整数 $n, k \geq 0$ に対し,

$$\sum_{(S_1, S_2) \in \mathcal{C}_n^k} x^{\text{lrm}((S_1, S_2))} = \widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$$

が成り立つ. 特に, $|\mathcal{C}_n^k| = \widehat{\mathcal{B}}_n^k(1) = C_n^{(-k-1)}$, および, $\#\{(S_1, S_2) \in \mathcal{C}_n^k \mid S_1 \text{が赤元を含まない}\} = \mathcal{B}_n^k(0) = B_n^{(-k)}$ である.

証明の概略. 二重 Callan 列 $(S_1, S_2) \in \mathcal{C}_n^k$ が与えられたとき, 次の操作によって, 論文 [7] において “barred Callan sequence” と呼んでいる対象と対応させることができる: 赤元, 青元からなるブロックを R_i, B_i とかき, $S_1 = B_1 R_1 \cdots B_\ell R_\ell B_{\ell+1}, S_2 = R'_1 B'_1 \cdots R'_m B'_m R'_{m+1}$ と表示するとき (ただし, $B_{\ell+1}$ と R'_{m+1} は \emptyset の可能性もある), 青ブロックと赤ブロックの対と 1 本の縦棒からなる順列

$$(B_1; R_1) \cdots (B_\ell; R_\ell) \mid (B'_1; R'_1) \cdots (B'_m; R'_m) (B_{\ell+1}, *B; R'_{m+1}, *R)$$

を作る. ここで $*B, *R$ はそれぞれ青, 赤の色を持つダミー元である.

一方で, $n+1$ 個の赤元 $N \cup \{*_R\}$ と $k+1$ 個の青元 $K \cup \{*_B\}$ を $j+1$ 個の空でないブロック ($j = \ell+m$) に分割する方法は $\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} k+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right\}$ 通りである. 次にダミー元 $*_R, *_B$ を含むブロックの対を最後に配置し, 残りの j 個の赤ブロックを $j!$ 通りの方法で並べる. 最後に, j 個の青ブロックと 1 本の縦棒を並べる方法が $(j+1)!$ 通りあるが, statistic lrm を考慮すると, $(x+1)_j$ 通りであることが分かる. したがって barred Callan sequences の個数を数えることができ, それが $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の明示式 (1.3) と一致することが分かる. \square

3.2. Alternative tableaux. 二つ目に紹介したい組合せの対象は, Viennot [45] によって導入された alternative tableau と呼ばれる対象である. (関連する研究については Nadeau [34] を見ると良い). ここでは, 対称化多重 Bernoulli 多項式に関する長方形型に限定して, また [22, 34] で考察されているような “packed alternative tableaux” の定義を与えたい.

Definition 3.7. 整数 $n, k \geq 0$ に対し, サイズ $(n+1) \times (k+1)$ の長方形を考え, 幾つかのマスを選び \leftarrow または \downarrow を書き込む. こうして得られる図が次の条件を満たすとき, サイズ $n \times k$ の **packed alternative tableau** であるという.

- 矢印の先にあるマスは全て空マスである.
- 最下行を除く各行は丁度一つの \leftarrow を含み, 最下行は \leftarrow を含まない.
- 最左列を除く各列は丁度一つの \downarrow を含み, 最左列は \downarrow を含まない.

これら全体の集合を \mathcal{T}_n^k とおく.

Example 3.8. $(n, k) = (7, 6)$ のとき, 左下の図は packed alternative tableau の例を与えている. 一方で, 右下の例は網掛けマスにある \downarrow が \leftarrow の先にあり, 他にも最右列に \downarrow が含まれてないため, packed alternative tableau ではない.

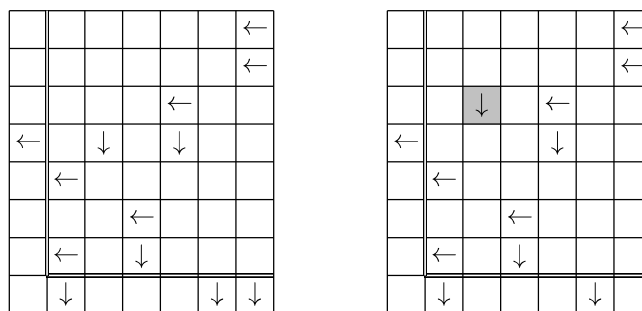


FIGURE 4. サイズ 7×6 の packed alternative tableau

論文 [7] および [22] では, \mathcal{T}_n^k 上の statistics を 2 つ与えている.

Definition 3.9. [7, 階段の段数] 各 $\lambda \in \mathcal{T}_n^k$ に対し, $\text{sta}(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次の条件を満たす \leftarrow の個数と定義する.

- 自身よりも上の行に配置されている \leftarrow が全て, 自身より右の列に配置されている.
- 最左列に含まれない.

Definition 3.10. [22] 各 $\lambda \in \mathcal{T}_n^k$ に対し, $\text{col}(\lambda) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を次の条件を満たす列の個数と定義する. \leftarrow を含み, 最下行に \downarrow を含む.

Example 3.11. Fig. 4 で与えた $\lambda \in \mathcal{T}_7^6$ について $\text{sta}(\lambda)$ を計算しよう. 一つ目の条件を満たす \leftarrow は, Fig. 5 において網掛けマスに配置されている 3 つの矢印である. ただし二つ目の条件から, 最左列に含まれる \leftarrow は数えないため, $\text{sta}(\lambda) = 2$ である. $\text{sta}(\lambda)$ の他の解釈として, Fig. 3 と同様に, (\downarrow は無視して) \leftarrow を覆いながら左下から右上に進むときの階段の段数マイナス 1 と考えることもできる.

一方で同じ $\lambda \in \mathcal{T}_7^6$ に対し, \leftarrow を含み, 最下行に \downarrow を含むような列は 2 列目, 7 列目であるので, $\text{col}(\lambda) = 2$ である. 一般には $\text{sta}(\lambda) \neq \text{col}(\lambda)$ である.

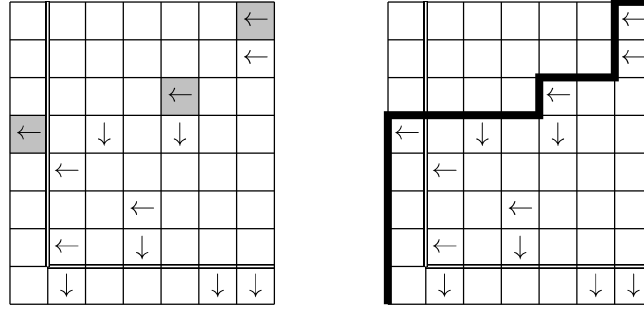


FIGURE 5. $\text{sta}(\lambda) = 2$ の説明

Example 3.12. サイズ 1×2 の packed alternative tableaux は以下の 7 つである. このとき, $\text{sta}(\lambda)$ および $\text{col}(\lambda)$ は順に $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$ で与えられ (この場合には $\text{sta}(\lambda) = \text{col}(\lambda)$ が成り立つ), 多項式 $\sum_{\lambda \in \mathcal{T}_1^2} x^{\text{sta}(\lambda)} = \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_1^2} x^{\text{col}(\lambda)} = 3x + 4$ は, $\widehat{\mathcal{B}}_1^2(x) = 3x + 4$ と一致する.

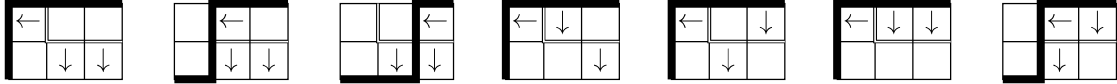


FIGURE 6. \mathcal{T}_1^2 のリスト

Theorem 3.13. [7, 22] 任意の整数 $n, k \geq 0$ に対し,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{T}_n^k} x^{\text{sta}(\lambda)} = \sum_{\lambda \in \mathcal{T}_n^k} x^{\text{col}(\lambda)} = \widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$$

が成り立つ. 特に, $|\mathcal{T}_n^k| = \widehat{\mathcal{B}}_n^k(1) = C_n^{(-k-1)}$, および, $\#\{\lambda \in \mathcal{T}_n^k \mid \text{一番左上のマスが } \leftarrow\} = \#\{\lambda \in \mathcal{T}_n^k \mid \text{col}(\lambda) = 0\} = \widehat{\mathcal{B}}_n^k(0) = B_n^{(-k)}$ である.

証明の概略. こちらは明示式 (1.3) ではなく, $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ が満たす漸化式

$$(3.1) \quad \widehat{\mathcal{B}}_n^k(x) = (n+1)\widehat{\mathcal{B}}_n^{k-1}(x) + x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \widehat{\mathcal{B}}_j^{k-1}(x) + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j-1} \widehat{\mathcal{B}}_j^{k-1}(x)$$

に基づく証明である. まず Theorem 3.6 で与えた $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の組合せ的解釈を用いることで, $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ が上記の漸化式を満たすことを示せる (cf. [7], 他にも示す術はあると思われる). 一方で, 各 $\lambda \in \mathcal{T}_n^k$ に対し, 最右列と最右列に含まれる \leftarrow が属する行を切り落とすことで, よりサイズの小さな packed alternative tableau を得る. この操作により, $(\mathcal{T}_n^k, \text{sta})$ および $(\mathcal{T}_n^k, \text{col})$ から定まる多項式が上の漸化式を満たすことを確かめられる. \square

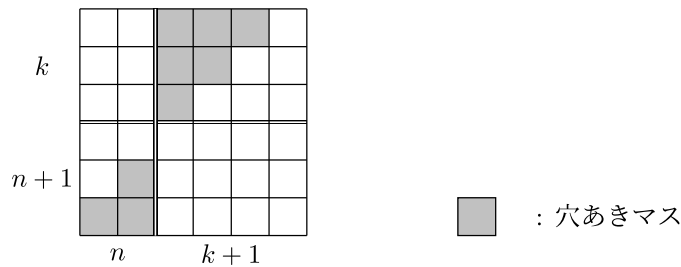
3.3. Double alternative trees. 紙幅の都合で詳細は割愛するが, Nadeau [34] において考察されている alternative trees/forests を用いて, $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の組合せ的解釈 $(\mathcal{T}_n^k, \text{chi})$ を与えることもできる. ここで, 組合せ的対象からなる集合と statistic の組 $(\mathcal{C}_1, w_1), (\mathcal{C}_2, w_2)$ が同型であることを, ある全単射 $f: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ が存在して, $w_2 \circ f = w_1$ が成り立つことと定義し, これを $f: (\mathcal{C}_1, w_1) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}_2, w_2)$ と書くことにする. このとき明らかに

$$\sum_{c \in \mathcal{C}_1} x^{w_1(c)} = \sum_{c \in \mathcal{C}_2} x^{w_2(c)}$$

が成り立つ. 論文 [22] において, 自然な同型 $(\mathcal{T}_n^k, \text{col}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}_n^k, \text{chi}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}_n^k, \text{lrm})$ を構成している. (この全単射による $(\mathcal{T}_n^k, \text{sta})$ の像が, Definition 3.3 の前で触れた $(\mathcal{C}_n^k, w_{\mathcal{C}}^{\text{br}})$ である). また少々複雑ではあるが, 同型 $(\mathcal{C}_n^k, \text{lrm}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{T}_n^k, \text{sta})$ を構成することもできる [22].

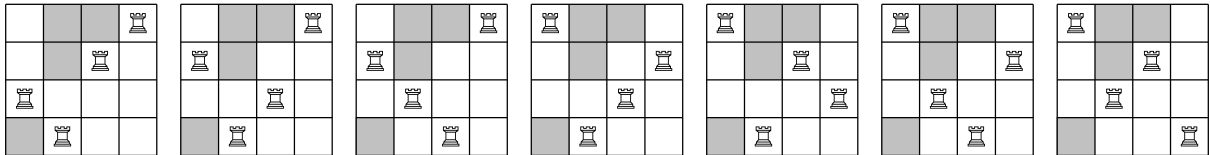
3.4. ルーク配置. Ehrenborg–Steingrímsson [18] が研究している Excedance 集合の概念をもとに, 次のようなルーク配置を考えることができる (cf. Clark–Ehrenborg [15]).

Definition 3.14. 整数 $n, k \geq 0$ に対し, サイズ $n+k+1$ のチェス盤を考え, 次の図のように穴をあける.



この穴あきチェス盤の上に, $n+k+1$ 個のルークを互いに攻撃できない位置に配置する. このようなルークの配置全体からなる集合を \mathcal{E}_n^k とおく. (\mathcal{E} は Excedance の頭文字である).

Example 3.15. $(n, k) = (1, 2)$ の場合のルークの配置は以下の 7 通りである.



この場合も $|\mathcal{E}_n^k| = \widehat{\mathcal{B}}_n^k(1) = C_n^{(-k-1)}$ を示すことができ, また適切に statistic を定義することで, 対称化多重 Bernoulli 多項式 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の組合せ的解釈を与えることができる. 詳細は [22] に譲ることにする. またこれは Launois [31] の与えた $B_n^{(-k)}$ の組合せ的解釈の類似であることにも注意しておく (cf. [26]).

3.5. 補足および気になること. 上で紹介した $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の 2 つの組合せ的解釈 $(\mathcal{C}_n^k, \text{lrm}), (\mathcal{T}_n^k, \text{sta})$ を思い出すと, 具体的に数え上げて (Stirling 数などを用いた) 明示公式を得るには $(\mathcal{C}_n^k, \text{lrm})$ の方が相性が良く, また帰納的な構造から $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の満たす漸化式を導くには $(\mathcal{T}_n^k, \text{sta})$ の方が相性が良いように感じられる. また $(\mathcal{T}_n^k, \text{sta})$ の直接的な数え上げによって $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の明示公式を得ることは, 少々難しいようにも感じる. このように, 同じ多項式 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ であっても組合せ的解釈が異なれば, そこから自然に得られる性質は一般に異なってくる.

詳細は省略するが論文 [5] では, Section 3.1 で紹介した Callan 列の考え方をもとにして, 対称化する前の多重 Bernoulli 多項式 $B_n^{(-k)}(x)$ や, 大野–佐々木 [35, 36] および小松 [29, 30] によって導入された 2 種の多重 Euler 数についても, 組合せ的解釈を与えている. これは既存の明示公式を反映したような組合せ的解釈になっており, もし他に alternative tableaux 等を用いた組合せ的解釈を与えることができれば, 新しい漸化式などが得られる可能性も期待されるだろう. また類似の対象に, 金子–Pallewatta–津村 [28] によって導入された多重コセカント数というものもあるが, これについても (複数の) 組合せ的解釈が考えられるだろうか.

組合せ的解釈が反映する性質の一つの例として、 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ が持つ「対称性」についても述べておきたい。このセクションにおいて、 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の組合せ的解釈を複数与えてきた。しかしながら、ここで導入した statistics の定義を振り返ってみると、 $\text{lrm}((S_1, S_2))$ は「 S_1 内の青元の情報のみ」から定まるもの、 $\text{sta}(\lambda)$ は「 \leftarrow の情報のみ」から定まるものであり、これらの組合せ的解釈 $(\mathcal{C}_n^k, \text{lrm}), (\mathcal{T}_n^k, \text{sta})$ からは、当然成り立つべき対称性 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x) = \widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ が非自明なのである。一方で、 $(\mathcal{T}_n^k, \text{col})$ については、少し工夫をすることで対称性を説明することができる。例えば次のようにすると良い [22]: 各 $\lambda \in \mathcal{T}_n^k$ に対し、

- \leftarrow を含み、最下行に \downarrow を含むような列に対し、 \downarrow を同列最下にある \leftarrow の場所へ移動し、その \leftarrow を同行の最左列に移動する。
- \downarrow を含み、最左列に \leftarrow を含むような行に対し、 \leftarrow を同行最左にある \downarrow の場所へ移動し、その \downarrow を同列の最下行に移動する。
- こうして得られた図を裏返しする

という操作によって、サイズの反転した $\lambda' \in \mathcal{T}_k^n$ を得る。これは全単射 $\mathcal{T}_n^k \rightarrow \mathcal{T}_k^n$ を与え、また $\text{col}(\lambda) = \text{col}(\lambda')$ を満たすため、 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ のもつ対称性を導く。

Example 3.16. Fig. 4 で考えた packed alternative tableau $\lambda \in \mathcal{T}_7^6$ に対して上記の操作を行うと、次のようにして $\lambda' \in \mathcal{T}_6^7$ が得られる。特に $\text{col}(\lambda) = \text{col}(\lambda') = 2$ である。

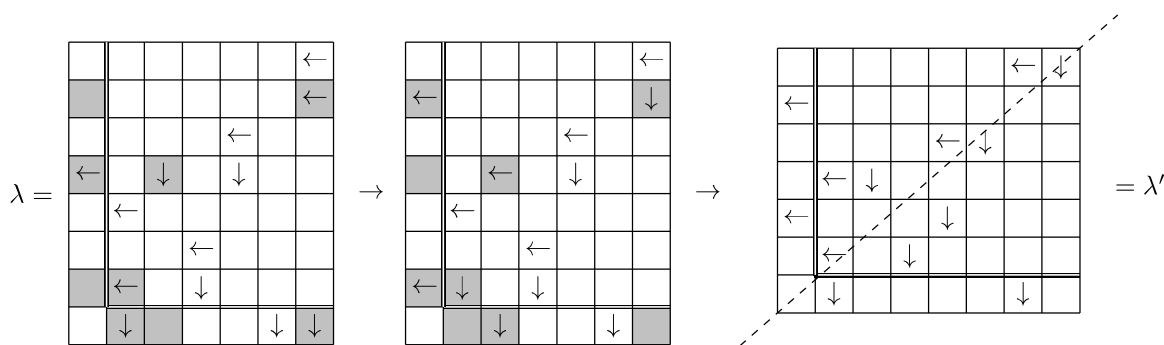


FIGURE 7. $(\mathcal{T}_n^k, \text{col})$ を用いた対称性 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x) = \widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の説明の例

同様に何かひと工夫することで、 $(\mathcal{C}_n^k, \text{lrm})$ や $(\mathcal{T}_n^k, \text{sta})$, また詳細は説明していないが $(\mathcal{F}_n^k, \text{chi})$ やルーク配置についても、 $\widehat{\mathcal{B}}_n^k(x)$ の対称性を説明することはできるだろうか。

最後に、Section 3.2 で考えた packed alternative tableaux は長方形型に限定していたが、他の形状に対しても同様に定義することができる。例えば、階段型の packed alternative tableaux を考えてみる。4 (= 3 + 1) 段あるようなものをいくつか書き出してみると、

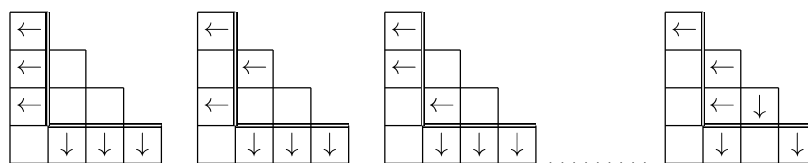


FIGURE 8. 階段型の packed alternative tableaux (4 段の場合)

のようになる。実は 4 段のものは全部で 17 個存在し、Genocchi 数 $G_6 = 17$ と一致する。一般に $n + 1$ 段の階段型 packed alternative tableaux の個数が Genocchi 数 G_{2n} と一致することが知られており、さらに statistic を最左列に含まれる \leftarrow の個数と定義することで、Gandhi 多項式 $G_n(x)$ の組合せ的解釈を与えることができる。(実際に 4 段の場合、最左列に \leftarrow が 3 つあるものが 6 つ、1 つあるものが 3 つあり、得られる多項式 $6x^3 + 8x^2 + 3x$ は Gandhi 多項式 $G_6(x) = x(6x^2 + 8x + 3)$ と一致する)。Genocchi 数との関係性については、Viennot [45] が指摘しており、その後 Josuat-Vergès [23] が、より一般に Dumont–Foata 多項式との関係を明らかにしている。この組合せ的解釈は Section 2.3 で述べた問いに何かヒントを与えるだろうか。また他の型を考えることで、何か面白い数列/多項式を与えることができるだろうか。

4. Stephan の観察

最後に、中央二項級数 (1.4) の負の整数点での値について考察を行った論文 [6] の紹介を行いたい。今回は取り扱わないが、正整数 $k \geq 2$ での特殊値 $\zeta_{\text{CB}}(k)$ については、Borwein–Broadhurst–Kamnitzer [10] が研究を行なっている。例えば $k = 2, 4$ のとき、それぞれ Riemann ゼータ値を用いて $\zeta_{\text{CB}}(2) = \frac{1}{3}\zeta(2)$, $\zeta_{\text{CB}}(4) = \frac{17}{36}\zeta(4)$ と書けることが知られており、一般の整数 $k \geq 2$ に対しては、 $\zeta_{\text{CB}}(k)$ が多重ゼータ値、多重 Clausen 値、および多重 Glaisher 値の \mathbb{Q} -線形和で書けることが示されている。(cf. 金子 [26]).

一方で、負の整数点についてはもう少し古く、1985 年に Lehmer [32] が考察をしている。彼は van der Poorten の記事 [44] の中で扱われている中央二項係数 $\binom{2n}{n}$ を含むような Dirichlet 級数を一般的に考察し、その明示公式を与えた。その一つが中央二項級数 $\zeta_{\text{CB}}(-k)$ である。具体的には次を示している。

Proposition 4.1. [32] \mathbb{Q} -係数の多項式列 $(p_k(x))_{k \geq -1}, (q_k(x))_{k \geq -1}$ を、 $p_{-1}(x) = 0, q_{-1}(x) = 1$ 、および微分を含む漸化式

$$(4.1) \quad \begin{aligned} p_{k+1}(x) &= 2(kx+1)p_k(x) + 2x(1-x)p'_k(x) + q_k(x), \\ q_{k+1}(x) &= (2(k+1)x+1)q_k(x) + 2x(1-x)q'_k(x) \end{aligned}$$

で定める。このとき、任意の $k \geq -1$ に対し次が成り立つ。

$$(4.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^k (2x)^{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{x}{(1-x^2)^{k+3/2}} \left(x\sqrt{1-x^2} p_k(x^2) + \arcsin(x) q_k(x^2) \right).$$

これは Taylor 展開の公式

$$\frac{2x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{n \binom{2n}{n}} \quad (|x| < 1)$$

を繰り返し微分することで示すことができる。

Example 4.2. 多項式 $p_k(x), q_k(x)$ の最初のいくつかは次のように与えられる。

k	$p_k(x)$	$q_k(x)$
-1	0	1
0	1	1
1	3	$2x+1$
2	$8x+7$	$4x^2+10x+1$
3	$20x^2+70x+15$	$8x^3+60x^2+36x+1$
4	$48x^3+460x^2+406x+31$	$16x^4+296x^3+516x^2+116x+1$

TABLE 6. 多項式列 $(p_k(x))_{k \geq -1}, (q_k(x))_{k \geq -1}$ のリスト

この等式において $x = 1/2$ とおくことで、任意の $k \geq -1$ に対し、次の $\zeta_{\text{CB}}(-k)$ の明示公式が得られる。

$$\zeta_{\text{CB}}(-k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^k p_k\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} q_k\left(\frac{1}{4}\right) \frac{\pi}{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q} \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

これは Riemann ゼータ関数の場合の有名な事実 $\zeta(-k) = -B_{k+1}/(k+1) \in \mathbb{Q}$ の類似とすることができる。このとき、 $\zeta_{\text{CB}}(-k)$ の有理数部分、 $\pi/\sqrt{3}$ の係数部分について、それぞれ以下の問が提出されていた。

- Stephan の観察 [42, A098830], 金子 [25, 26] において定式化：任意の整数 $n \geq 0$ に対し、

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n p_n\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{k=0}^n B_{n-k}^{(-k)}$$

が成り立つか？

- 金子 [25, 26]： $\pi/\sqrt{3}$ の係数が多重 Bernoulli 数か、或いは何か関連する数で書けるか？

Bényi との共同研究 [6] で、これら 2 つの問に対する一つの解答を与えることが出来たので、以下でその概略を紹介したい。

4.1. $q_n(x)$ と 2 変数 Eulerian 多項式. まず 2 つの permutation statistics を思い出しておく. 一つ目は [Example 1.8](#) でも紹介した $\text{cyc} : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である. これは $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ の順列 $\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_n$ を n 次置換 $\pi(i) = \pi_i$ と同一視するとき, そのサイクルの個数を数えることで定義される statistic である. もう一つは, des と共に **Eulerian statistics** とも呼ばれる statistic $\text{exc} : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で, $\text{exc}(\pi) = \#\{i \in [n] \mid \pi_i > i\}$ と定義される. これら des と exc は異なる statistics であるが, 対応する多項式

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{des}(\pi)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{exc}(\pi)}$$

は等しく, 共に Eulerian 多項式 $A_n(x)$ を定めることが知られている (例えば [Bóna \[9\]](#) や [Petersen \[37\]](#) を参照).

Example 4.3. $n = 3$ のとき, permutation statistics $\text{cyc}, \text{des}, \text{exc}$ の値は次のようになる.

π	$123 = (1)(2)(3)$	$132 = (1)(23)$	$213 = (12)(3)$	$231 = (123)$	$312 = (132)$	$321 = (13)(2)$
$\text{cyc}(\pi)$	3	2	2	1	1	2
$\text{des}(\pi)$	0	1	1	1	1	2
$\text{exc}(\pi)$	0	1	1	2	1	1

TABLE 7. \mathfrak{S}_3 における 3 種の statistics の値

このとき, Foata–Schützenberger [[19](#), Chapter IV-3] は次の Eulerian 多項式の 2 変数への拡張を導入し考察を行っている.

Definition 4.4. 任意の整数 $n \geq 0$ に対し, **2 変数 Eulerian 多項式** $F_n(x, y)$ を, $F_0(x, y) = 1$, および

$$F_n(x, y) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{exc}(\pi)} y^{\text{cyc}(\pi)} \quad (n > 0)$$

で定義する.

定義から漸化式や母関数表示を示すことができ, 次が知られている (cf. [[41](#)]).

Proposition 4.5. 2 変数 Eulerian 多項式 $F_n(x, y)$ の母関数は次で与えられる.

$$\mathcal{F}(x, y; t) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x, y) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{1-x}{e^{t(x-1)} - x} \right)^y.$$

また任意の $n \geq 0$ に対し,

$$F_{n+1}(x, y) = \left(x(1-x) \frac{d}{dx} + nx + y \right) F_n(x, y)$$

が成り立つ.

例えば [Table 7](#) より, $F_3(x, y) = y^3 + 3xy^2 + x^2y + xy$ である. $y = 1$ のときが古典的な Eulerian 多項式 $A_n(x)$ であり, 正整数 $y = r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ における値 $F_n(x, r)$ は, Riordan [[39](#)] によって研究された r -Eulerian 多項式というものになる. さらに Savage–Viswanathan [[41](#)] は, より一般に数列 $\mathbf{s} = (s_i)_{i \geq 1}$ に対し \mathbf{s} -Eulerian 多項式 $E_n^{\mathbf{s}}(x)$ という対象を導入しており, その特別な場合として, 正整数 $k > 0$ に対し, $k^n F_n(x, 1/k)$ の組合せ的解釈を与えている.

ここで唐突ではあるが, 2 変数多項式の $y = 1/2$ としたものを考えてみる.

n	$2^n F_n(x, 1/2)$	$q_n(x)$
-1	-	1
0	1	1
1	1	$2x + 1$
2	$2x + 1$	$4x^2 + 10x + 1$
3	$4x^2 + 10x + 1$	$8x^3 + 60x^2 + 36x + 1$
4	$8x^3 + 60x^2 + 36x + 1$	$16x^4 + 296x^3 + 516x^2 + 116x + 1$
5	$16x^4 + 296x^3 + 516x^2 + 116x + 1$...

TABLE 8. 多項式 $2^n F_n(x, 1/2)$ および $q_n(x)$ のリスト

すると, [Example 4.2](#) で見た多項式 $(q_n(x))_{n \geq -1}$ のリストと同じ多項式列が現れることに気が付く. 実際に次のことが成り立つ, というのが, 2つ目の問題に対して我々が得た一つの解答である.

Theorem 4.6. [6] 任意の $n \geq -1$ に対し, $q_n(x) = 2^{n+1} F_{n+1}(x, 1/2)$ が成り立つ.

証明の概略. 多項式 $q_n(x)$ の定義 (4.1) より, 母関数

$$Q(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!}$$

を特徴づける微分方程式が記述されるが, 直接計算から $\mathcal{F}(x, 1/2; 2t)$ がその解であると確認できる. \square

Savage–Viswanathan [41] の結果と合わせると, 多項式 $q_n(x)$ の組合せ的解釈を与えることもできる.

4.2. $p_n(x)$ と Stephan の観察の証明. 我々が与えた Stephan の観察の証明は, 2つの数列

$$(4.3) \quad a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n p_n\left(\frac{1}{4}\right), \quad b_n = \sum_{k=0}^n B_{n-k}^{(-k)}$$

が共通の漸化式

$$(4.4) \quad 3c_{n+1} = 2c_n + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} c_k + 3, \quad c_0 = 1$$

を満たすことを確認する, という基本的な戦略をとる. とは言っても, 一筋縄ではいかず, a_n, b_n の複雑な母関数表示を取り扱う必要がある. 以下で概略を説明したい.

4.2.1. 数列 a_n について. まずは, 多項式列 $(p_n(x))_{n \geq -1}$ の母関数を与えよう.

Proposition 4.7. 次が成り立つ.

$$P(x, t) := \sum_{n=0}^{\infty} p_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{(1-x)t} (\arcsin(x^{1/2} e^{(1-x)t}) - \arcsin(x^{1/2}))}{x^{1/2} (1 - x e^{2(1-x)t})^{1/2}}.$$

PROOF. 多項式 $p_n(x)$ の定義 (4.1), および [Theorem 4.6](#) から, 母関数 $P(x, t)$ を特徴づける微分方程式

$$\left((2tx - 1) \frac{d}{dt} + 2x(1-x) \frac{d}{dx} + 2(1-x) \right) P(x, t) + \mathcal{F}(x, 1/2; 2t) = 0$$

が記述されるが, 直接計算から主張の最右辺がその解であると確認できる.

ひとたび解を見つけてしまえば, 上記の天下りの証明も可能であるが, ここでは発見的でない証明も与えておく. (4.2) より,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{k-1} (2x)^{2n} t^k}{\binom{2n}{n} k!} = \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} \left(x \sqrt{1-x^2} P\left(x^2, \frac{t}{1-x^2}\right) + \arcsin(x) Q\left(x^2, \frac{t}{1-x^2}\right) \right).$$

が成り立つ. ここで左辺に (4.2) の $k = -1$ の場合を適用することで, 左辺は

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{-1} (2x e^t)^{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{x e^t \arcsin(x e^t)}{(1 - x^2 e^{2t})^{1/2}}.$$

と計算される. あとは $Q(x, t) = \mathcal{F}(x, 1/2; 2t)$ を代入して整理することで, 主張が得られる. \square

数列 $(a_n)_{n \geq 0}$ の母関数を得るには, **Proposition 4.7** において $x = 1/4, t \rightarrow \frac{2}{3}t$ とすれば良い.

Proposition 4.8. 数列 $(a_n)_{n \geq 0}$ を (4.3) のように定義するとき,

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{6e^{t/2} (\arcsin(e^{t/2}/2) - \arcsin(1/2))}{(4 - e^t)^{1/2}}$$

が成り立つ. 特に, 任意の $n \geq 0$ に対し,

$$3a_{n+1} = 2a_n + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a_k + 3, \quad a_0 = 1$$

が成り立つ.

PROOF. 母関数 $A(t)$ の表示は **Proposition 4.7** から従う. また直接計算により

$$\left((4 - e^t) \frac{d}{dt} - 2 \right) A(t) = 3e^t$$

が確かめられるため, 所望の漸化式を得る. □

4.2.2. 数列 b_n について. こちらについても **Proposition 4.8** と同様の母関数表示を示すことができれば, それでおしまいであるが, 直ぐには分からなかった. そこで今回は数列 $(b_n)_{n \geq 0}$ の (指数型ではなく) 通常型の母関数を用いることで, $(a_n)_{n \geq 0}$ と同様の漸化式を導くことにする.

まず荒川-金子 [2, p.163] によって, 次の母関数表示が知られている.

$$(4.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j!)^2 x^{2j}}{(1-x)^2 (1-2x)^2 \cdots (1-(j+1)x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(2 - \frac{1}{x}, 2 - \frac{1}{x} \right),$$

ここで Pochhammer 記号 $(x)_j = x(x+1)(x+2) \cdots (x+j-1)$ を用いて

$$f_j(x, y) = \frac{(j!)^2}{(x)_j (y)_j}.$$

とおいている. これは超幾何関数 ${}_3F_2$ を用いて記述することもできる. このとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k x^n = \frac{1-x}{x(1-2x)^2} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(3 - \frac{1}{x}, 3 - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x(1-x)^2} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(2 - \frac{1}{x}, 2 - \frac{1}{x} \right).$$

であることに注意すると, 係数 $(b_n)_{n \geq 0}$ が漸化式

$$(4.6) \quad 3b_{n+1} = 2b_n + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k + 3$$

を満たすことと,

$$(4.7) \quad \frac{2(2-x)}{(1-x)^2} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(2 - \frac{1}{x}, 2 - \frac{1}{x} \right) = \frac{3}{1-x} + \frac{1-x}{(1-2x)^2} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(3 - \frac{1}{x}, 3 - \frac{1}{x} \right)$$

が成り立つことは同値であることが分かる. あとはこの等式を示せば良いのであるが, これは次の補題から導くことができる.

Lemma 4.9. 任意の非負整数 $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\begin{aligned} & (x-1)(x-2) (f_j(x-2, y) - f_{j-1}(x-2, y)) + (x-1)(2x-5) f_{j-1}(x-1, y) \\ & - (x-1)(x-y-1) f_j(x-1, y) - (x-2)^2 f_{j-1}(x, y) \\ & = \begin{cases} (x-1)(y-1) & \text{if } j = 0, \\ 0 & \text{if } j > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $f_{-1}(x, y) = 0$ とおいている.

PROOF. 各 j に対して左辺は有理関数であり, 直接計算によって簡単に主張が確かめられる. □

(4.7) の証明の概略. Lemma 4.9 を $x \rightarrow 3 - 1/x, y \rightarrow 2 - 1/x$ に対して適用し, $j = 0, 1, 2, \dots$ にわたって足し合わせることで

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(2 - \frac{1}{x}, 2 - \frac{1}{x} \right) = \frac{1-x}{2-x} + \frac{(1-x)^2}{(1-2x)(2-x)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(3 - \frac{1}{x}, 2 - \frac{1}{x} \right).$$

を得る. 再度 $x \rightarrow 3 - 1/x, y \rightarrow 3 - 1/x$ に対して同様の議論を繰り返すことで, 主張が得られる. \square

以上により, 数列 $(b_n)_{\geq 0}$ が $b_0 = 1$ および漸化式 (4.6) を満たすことが確認できたので, 次の結論が得られる.

Theorem 4.10. [6] Stephan の観察は正しい. つまり, 任意の整数 $n \geq 0$ に対し,

$$\left(\frac{2}{3} \right)^n p_n \left(\frac{1}{4} \right) = \sum_{k=0}^n B_{n-k}^{(-k)}$$

が成り立つ.

Corollary 4.11. 任意の $n \geq -1$ に対し, 次が成り立つ.

$$\zeta_{\text{CB}}(-n) = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n B_{n-k}^{(-k)} + \left(\frac{4}{3} \right)^{n+1} F_{n+1} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

4.3. 補足および気になること. 証明は省略するが, 多項式 $p_n(x)$ も 2 変数 Eulerian 多項式 $F_n(x, y)$ を用いて次のように記述することができる.

$$p_n(x) = 2^n \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} F_{n-k}(x, 1/2) F_k(x, 1/2), \quad (n \geq 0).$$

また数列 $(a_n)_{\geq 0}$ について, Borwein–Girgensohn [11] は次の明示公式を示している.

$$(4.8) \quad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j j! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ j \end{matrix} \right\} 3^{j-1} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{3^i}{(2i+1) \binom{2i}{i}}.$$

一つの簡単な系として, 我々が得た等式 $a_n = b_n$ と Borwein らの式から, 多重 Bernoulli 数の和 b_n に関しても明示公式が得られたことになる. では逆に, 多重 Bernoulli 数の定義・性質から, この明示公式を証明することで, Theorem 4.10 の別証明を与えることはできるだろうか (cf. 金子 [25, 26]).

Section 4.2 の最初に述べたように, Theorem 4.10 の証明の主なアイデアは, 数列 $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ の満たす漸化式であり, そしてその漸化式を示すために, 指数型・通常型の 2 種類の母関数表示を駆使したのであった. さて, こうして (解析的な議論によって) 得られた漸化式 (4.4) は, 多重 Bernoulli 数の組合せ的な構造を何か反映したものになっているのだろうか. 例えば Section 3 で紹介したように, 個々の多重 Bernoulli 数 $B_n^{(-k)}$ は様々な組合せ的解釈を持っていた. また, 和を取った数列 b_n についても次のような組合せ的解釈が知られている. n 次置換 $\pi: [n] \rightarrow [n]$ が次の条件を満たすとき, $\pi \in \mathfrak{S}_n$ は **ascending-to-max 性** を持つという [21]: 任意の $1 \leq i \leq n-2$ に対し,

- $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(n)$ かつ $\pi^{-1}(i+1) < \pi^{-1}(n)$, ならば, $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(i+1)$,
- $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(n)$ かつ $\pi^{-1}(i+1) > \pi^{-1}(n)$, ならば, $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(i+1)$

が成り立つ. このとき Bényi–Hajnal [3] は, ascending-to-max 性をもつ \mathfrak{S}_{n+1} の元の個数が b_n と等しくなることを示している. (He–Munro–Rao [21] と異なる定義を採用しているため, 読み替えの必要があることに注意しておく).

Example 4.12. $n = 8$ のとき, $\pi = 47518362 \in \mathfrak{S}_8$ は ascending-to-max 性をもつ. ここで, $\pi(1) = 4, \pi(2) = 7, \pi(3) = 5, \dots, \pi(8) = 2$ と読んでいる. 例えば, $i = 2$ のとき, $\pi^{-1}(2) = 8, \pi^{-1}(3) = 6, \pi^{-1}(8) = 5$ より, 2 つ目の条件を満たしている.

一方で, $\pi = 41385762 \in \mathfrak{S}_8$ は ascending-to-max 性を持たない. 実際, $\pi(1) = 4, \pi(3) = 3, \pi(4) = 8$ より, $3 = \pi^{-1}(3) < \pi^{-1}(8) = 4$ かつ $1 = \pi^{-1}(4) < \pi^{-1}(8) = 4$ を満たしているが, $3 = \pi^{-1}(3) \not< \pi^{-1}(4) = 1$ である.

Example 4.13. ascending-to-max 性は次のように理解することもできる。 $[n]$ の順列において、任意の $1 \leq i \leq n-1$ に対して i から $i+1$ に矢印を書くとき、 i が n よりも左に位置するときは矢印が右向きで、 i が n よりも右に位置するときは矢印が左向きとなる。例えば上の例

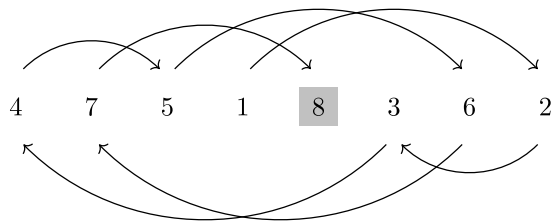


FIGURE 9. ascending-to-max 性の説明

は ascending-to-max 性を持っていた。一方で、 $\pi = 41385762$ については、 3 が 8 より左に位置しているにも関わらず、 3 から 4 へ向かう矢印が左向きとなっており、 よって ascending-to-max 性を持たない、 というわけである。

Example 4.14. Ascending-to-max 性を持つような \mathfrak{S}_4 の元は次の 10 個である。

$$\pi = 1234, 1243, 1342, 1432, 2341, 2413, 2431, 3142, 3421, 4321.$$

これは、 $b_3 = B_0^{(-3)} + B_1^{(-2)} + B_2^{(-1)} + B_3^{(0)} = 10$ と一致する。

こうした様々に考える数列 $(b_n)_{n \geq 0}$ の組合せ的解釈を用いることで、漸化式 (4.6) を自然に説明できるだろうか。

別的话题として Section 2 では、交代和に関する等式 (1.1), (1.2) の一般化として、対称化多重 Bernoulli 多項式の交代和

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(x) = (-1)^{n/2} G_n(x)$$

を考察したのであった (Theorem 2.6). 同様にして、以下のようなことも考えることができるだろう。対称化多重 Bernoulli 多項式の明示公式 (1.3) を用いると、

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n \widehat{\mathcal{B}}_{n-k}^k(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} j!(x+1)_j \sum_{k=j}^{n-j} \begin{Bmatrix} n-k+1 \\ j+1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k+1 \\ j+1 \end{Bmatrix}$$

が成り立つ。ここで最初の数項は

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = 2, f_2(x) = x + 4, f_3(x) = 6x + 10, f_4(x) = 2x^2 + 29x + 32, \dots$$

と与えられ、 $(f_n(1))_{n \geq 0} = (1, 2, 5, 16, 63, 294, \dots)$ となっている。全射ピストルの集合 \mathcal{P}_n 上に適切な statistics (sai, fix, max) を考え、 Gandhi 多項式 $G_n(x)$ を実現したように、

$$|\mathcal{C}_n| = f_n(1), \quad \sum_{c \in \mathcal{C}_n} x^{w(c)} = f_n(x)$$

を満たすような組合せ的对象からなる集合 \mathcal{C}_n と適切な statistic $w : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は存在するだろうか。

謝辞

本稿および集会における講演の機会を与えてくださいました世話人の赤塚広隆氏 (小樽商科大学)、山崎義徳氏 (愛媛大学) に感謝いたします。また一連の研究を通して、金子昌信氏および大野泰生氏には数えきれないほどの有益なコメントを頂きました。本当にありがとうございました。

References

- [1] T. Arakawa, T. Ibukiyama, and M. Kaneko, *Bernoulli numbers and zeta functions*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Tokyo, 2014. With an appendix by Don Zagier. MR3307736
- [2] T. Arakawa and M. Kaneko, *On poly-Bernoulli numbers*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **48** (1999), no. 2, 159–167. MR1713681
- [3] B. Bényi and P. Hajnal, *Combinatorics of poly-Bernoulli numbers*, Studia Sci. Math. Hungar. **52** (2015), no. 4, 537–558. MR3432984
- [4] ———, *Combinatorial properties of poly-Bernoulli relatives*, Integers **17** (2017), Paper No. A31, 26. MR3671793
- [5] B. Bényi and T. Matsusaka, *Combinatorial aspects of poly-Bernoulli polynomials and poly-Euler numbers*. submitted for publication, 2021.
- [6] ———, *Remarkable relations between the central binomial series, Eulerian polynomials, and poly-Bernoulli numbers*. submitted for publication, 2021.
- [7] ———, *On the combinatorics of symmetrized poly-Bernoulli numbers*, Electron. J. Combin. **28** (2021), no. 1, Paper No. 1.47,20. MR4245280
- [8] B. Bényi and M. Josuat-Vergès, *Combinatorial proof of an identity on Genocchi numbers*, J. Integer Seq. **24** (2021), no. 7, Art. 21.7.6, 13. MR4295405
- [9] M. Bóna, *Combinatorics of permutations*, Second, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, Boca Raton, FL, 2012. With a foreword by Richard Stanley. MR2919720
- [10] J. M. Borwein, D. J. Broadhurst, and J. Kamnitzer, *Central binomial sums, multiple Clausen values, and zeta values*, Experiment. Math. **10** (2001), no. 1, 25–34. MR1821569
- [11] J. M. Borwein and R. Girgensohn, *Evaluations of binomial series*, Aequationes Math. **70** (2005), no. 1-2, 25–36. MR2167981
- [12] C. Brewbaker, *A combinatorial interpretation of the poly-Bernoulli numbers and two Fermat analogues*, Integers **8** (2008), A02, 9. MR2373086
- [13] L. Carlitz, *A conjecture concerning Genocchi numbers*, Norske Vid. Selsk. Skr. (Trondheim) **9** (1971), 4. MR297697
- [14] ———, *Explicit formulas for the Dumont-Foata polynomial*, Discrete Math. **30** (1980), no. 3, 211–225. MR573636
- [15] E. Clark and R. Ehrenborg, *Explicit expressions for the extremal exceedance set statistics*, European J. Combin. **31** (2010), no. 1, 270–279. MR2552607
- [16] D. Dumont, *Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi*, Duke Math. J. **41** (1974), 305–318. MR337643
- [17] D. Dumont and D. Foata, *Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi*, Bull. Soc. Math. France **104** (1976), no. 4, 433–451. MR434830
- [18] R. Ehrenborg and E. Steingrímsson, *The exceedance set of a permutation*, Adv. in Appl. Math. **24** (2000), no. 3, 284–299. MR1751147
- [19] D. Foata and M.-P. Schützenberger, *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 138, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. MR0272642
- [20] J. M. Gandhi, *A conjectured representation of Genocchi numbers*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), no. 5, 505–506. MR1535914
- [21] M. He, J. I. Munro, and S. S. Rao, *A categorization theorem on suffix arrays with applications to space efficient text indexes*, Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 2005, pp. 23–32. MR2298247
- [22] M. Hirose, T. Matsusaka, R. Sekigawa, and H. Yoshizaki, *Bijjective enumerations for symmetrized poly-Bernoulli polynomials*. preprint, arXiv:2107.11952.
- [23] M. Josuat-Vergès, *Generalized Dumont-Foata polynomials and alternative tableaux*, Sémin. Lothar. Combin. **64** (2010/11), Art. B64b, 17. MR2773012
- [24] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. Théor. Nombres Bordeaux **9** (1997), no. 1, 221–228. MR1469669
- [25] ———, *A note on poly-Bernoulli numbers and multiple zeta values*, Diophantine analysis and related fields—DARF 2007/2008, 2008, pp. 118–124. MR2405633
- [26] ———, 多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数, 第 53 回代数学シンポジウム報告集 (2008).
- [27] M. Kaneko, F. Sakurai, and H. Tsumura, *On a duality formula for certain sums of values of poly-Bernoulli polynomials and its application*, J. Théor. Nombres Bordeaux **30** (2018), no. 1, 203–218. MR3809716
- [28] M. Kaneko, M. Pallewatta, and H. Tsumura, *On polycosecant numbers*, J. Integer Seq. **23** (2020), no. 6, Art. 20.6.4, 17. MR4115766
- [29] T. Komatsu, *Complementary Euler numbers*, Period. Math. Hungar. **75** (2017), no. 2, 302–314. MR3718524
- [30] ———, *On poly-Euler numbers of the second kind*, Algebraic number theory and related topics 2016, 2020, pp. 143–158.
- [31] S. Launois, *Rank t \mathcal{H} -primes in quantum matrices*, Comm. Algebra **33** (2005), no. 3, 837–854. MR2128415

- [32] D. H. Lehmer, *Interesting series involving the central binomial coefficient*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), no. 7, 449–457. MR801217
- [33] T. Matsusaka, *Symmetrized poly-Bernoulli numbers and combinatorics*, J. Integer Seq. **23** (2020), no. 9, Art. 20.9.2, 8. MR4167932
- [34] P. Nadeau, *The structure of alternative tableaux*, J. Combin. Theory Ser. A **118** (2011), no. 5, 1638–1660. MR2771605
- [35] Y. Ohno and Y. Sasaki, *On the parity of poly-Euler numbers*, Algebraic number theory and related topics 2010, 2012, pp. 271–278. MR2986929
- [36] ———, *On poly-Euler numbers*, J. Aust. Math. Soc. **103** (2017), no. 1, 126–144. MR3679021
- [37] T. K. Petersen, *Eulerian numbers*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser/Springer, New York, 2015. With a foreword by Richard Stanley. MR3408615
- [38] A. Randrianarivony and J. Zeng, *Some equidistributed statistics on Genocchi permutations*, 1996, pp. Research Paper 22, approx. 11. The Foata Festschrift. MR1392507
- [39] J. Riordan, *An introduction to combinatorial analysis*, Wiley Publications in Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London, 1958. MR0096594
- [40] J. Riordan and P. R. Stein, *Proof of a conjecture on Genocchi numbers*, Discrete Math. **5** (1973), 381–388. MR316372
- [41] C. D. Savage and G. Viswanathan, *The $1/k$ -Eulerian polynomials*, Electron. J. Combin. **19** (2012), no. 1, Paper 9, 21. MR2880640
- [42] N. J. A. Sloane, *The on-line encyclopedia of integer sequences*. Available at <https://oeis.org>.
- [43] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original. MR1442260
- [44] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed...Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$* , Math. Intelligencer **1** (1978/79), no. 4, 195–203. An informal report. MR547748
- [45] X. Viennot, *Alternative tableaux, permutations and partially asymmetric exclusion process*, 2008. Isaac Newton Institute, http://www.xavierviennot.org/xavier/videos_files/AT_Cambridge_web.pdf.

464-8601 愛知県名古屋市千種区不老町, 名古屋大学高等研究院 (多元数理科学研究科)
 Email address: matsusaka.toshiki@math.nagoya-u.ac.jp