ゴールドバッハ表現に関する平均、リーマンゼータ関数の零点のペアコリレーション及び素数定理の誤差項との関係

(The average number of Goldbach representations, pair correlation of zeros of the Riemann zeta function and error term of the prime number theorem)

九州大学大学院数理学研究院　アデ イルマ スリアジャヤ / チャチャ

Ade Irma Suriajaya / Chacha

Faculty of Mathematics, Kyushu University

序文

本研究は、Daniel A. Goldston 氏 (San José State University / サンノゼ州立大学) との共同研究であり、部分的に科研費（課題番号：18K13400）及び文部科学省ダイバーシティ研究環境実現イニシアティブ（先端型）の助成を受けたものである。

要旨

280 年前にゴールドバッハは 4 より大きい偶数が必ず二つの奇素数の和として書き表せると予想した。その予想が成り立てば、9 以上の奇数が三つの奇素数の和として書き表せることが従うが、この問題は「弱いゴールドバッハ予想」と通称され、近年解決されたものである。ゴールドバッハ問題を調べるために、偶数を二つの奇素数の和として書き表し、その表し方の個数を数えればよい。それが常に正であることとゴールドバッハ予想が成り立つことと同値である。実際の解析では、正の整数を二つの素数として表現する方法をそのまま数えるより、特殊な関数の重みで数えたほうが数学的に扱いやすい場合がある。本文に具体的な定義を述べるが、そのような表現を「ゴールドバッハ表現」と呼ぶことにする。この報告書では、ゴールドバッハ表現の個数の平均評価、また、リーマンゼータ関数の零点の対相関（ペアコリレーション）との関係を紹介する。特に、後者によるゴールドバッハ表現の個数の平均における誤差項の改良に注目したい。同様な方法で、素数定理における誤差評価の改良も得られる。本文では以上の結果を簡約にだけ解説し、詳しい内容については本論文 [GS-pre] を参照するとよい。

2010 *Mathematics Subject Classification*: 11M26, 11N05, 11N37, 11P32.
キーワード: 素数、ゴールドバッハ予想、ゴールドバッハ表現、素数定理、リーマンゼータ関数、零点、ペアコリレーション

0　ゴールドバッハ問題及びゴールドバッハ表現

4 以上の偶数が必ず

$$4 = 2+2, \qquad 6 = 3+3, \qquad 10 = 3+7 = 5+5,$$
$$16 = 3+13 = 5+11, \qquad 30 = 7+23 = 11+19 = 13+17,$$
$$72 = 5+67 = 11+61 = 13+59 = 19+53 = 29+43 = 31+41$$

のように、二つの素数の和として書き表せられるかという問題は、280 年前にゴールドバッハにより提起され、「ゴールドバッハ予想」として通称される。偶素数は 2 しかないため、2 を除いた素数を考えれば、それら二つの和が常に偶数となり、このような二つの奇素数の組み合わせが、2 と 4 を除いた正の偶数全体を成すということはゴールドバッハ予想の主張である。言い換えれば、4 より大きい偶数が必ず二つの奇素数の和として書き表せるという予想である。

ゴールドバッハ予想により、6 以上の整数が必ず三つの素数の和として書き表せることがわかる。

$\because$) ゴールドバッハ予想が成り立つという仮定により、整数 $n \geq 2$ に対して、ある素数 p_1 と p_2 が存在して、$2n = p_1 + p_2$ と書けるので、

$$2n+2 = p_1 + p_2 + 2, \qquad 2n+3 = p_1 + p_2 + 3$$

が成り立つ。即ち、6 以上の全ての整数を三つの素数の和で書き表すことができる。　□

補足 1. 5 以下の正整数を考えれば、

$$1, \qquad 2\ (\text{素数}), \qquad 3\ (\text{素数}), \qquad 4 = 2+2, \qquad 5 = 2+3$$

により、1 か、素数、または多くとも二つの素数の和としてしか表せない小さな正整数であるため、6 以上という条件が最善である。

補足 2. 一方、4 と 5 も考慮して、4 以上の全ての整数が二つの素数の和で書き表されることは期待できず、第 1 段落で述べたように、偶素数は 2 しかないことが要因である。実際、奇数 $2n+1$ を考えれば

$$2n+1 = p_1 + p_2 \tag{0.1}$$

と書けるとすると、p_1, p_2 のうち、一つが偶数であり、もう一つは奇数でなければならない。よって、(0.1) の分解が成り立つためには、

$$2n+1 = 2 + p \tag{0.2}$$

となる奇素数 p が存在しなければならない。しかし、ご存知のように、全ての正奇数が素数であるわけではないため、(0.2) を満たす奇数 $2n+1$ が 7 以上の全ての整数を成さない。実際、二つの素数の和で書き表せない奇数がたくさんある。例えば、11, 17, 23 が三つの

素数の和で書き表せるが、二つの素数の和として書けない。従って、正整数をいくつかの素数の和で書き表す表現として、7 以上の全ての奇数を含めるためには、二つの素数の和への分解ではなく、少なくとも三つの素数の和を考えざるをえない。これの成否を問うのはゴールドバッハ問題である。

補足 1 及び 2 により、正整数をいくつかの素数の和で書き表す問題として、ゴールドバッハ予想が意味する

「6 以上の全ての整数が三つの素数の和で書き表せる」

という主張は最善であるが、6 以上の奇数に対しては、「弱いゴールドバッハ予想」として知られ、近年解決されたものである。

上記で述べたような、正の偶数を二つの奇素数の和で書き表す表現の個数に注目する。具体的には、偶数 $n \geq 6$ を二つの奇素数の和として書き表す方法の個数

$$G(n) := \sum_{\substack{n=p_1+p_2 \\ 2\nmid p_1p_2 \\ p_1,p_2:\,\text{素数}}} 1 \tag{0.3}$$

という関数を考える。偶数 $n \geq 6$ に限って、$G(n)$ の定義 (0.3) における条件 $2 \nmid p_1p_2$ を外すことができる。しかし、$G(n)$ を一般の正整数に対して定義するときは、条件 $2 \nmid p_1p_2$ なしで定義することが多い。その際、$2n-1$ は素数であるとき、$G(2n+1) = 2$ となるが、それ以外の奇数 $2m+1$ に対しては $G(2m+1) = 0$ である。

実際の解析において、$n = p_1 + p_2$ の表し方を (0.3) のように $G(n)$ を用いてそのまま数えるのではなく、フォン・マンゴルト関数

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \exists p \text{ s.t. } n = p^k \ (\forall k \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\ldots\}), \\ 0, & \exists p_1 \neq p_2 \text{ s.t. } p_1p_2|n \ \text{ 或 } \ n = 1, \end{cases}$$

の重みを付けた個数関数

$$\psi_2(n) := \sum_{\substack{m_1+m_2=n \\ m_1,m_2:\,\text{正整数}}} \Lambda(m_1)\Lambda(m_2) \tag{0.4}$$

を考察することが多い。この報告書では $\psi_2(n)$ で数える正整数 n の表現を「ゴールドバッハ表現」と呼ぶ。$\psi_2(n)$ は n を素数と素数の冪の和で書き表す方法を整数上で密度 1 となるように対数関数の重みで数える。これが次の例で観察できる。

$$\begin{aligned} G(1,000,000) &= 10,804, & \psi_2(1,000,000) &= 1,756,567.53\ldots \\ G(1,000,002) &= 16,400, & \psi_2(1,000,002) &= 2,673,061.24\ldots \\ G(1,000,018) &= 8,121, & \psi_2(1,000,018) &= 1,322,135.60\ldots. \end{aligned}$$

実際の応用において、素数定理

$$\pi(x) := \sum_{\substack{p \le x \\ p:\,\text{素数}}} 1 \ \sim\ \frac{x}{\log x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi(x) := \sum_{\substack{n \le x \\ n:\,\text{正整数}}} \Lambda(n) \ \sim\ x \tag{0.5}$$

のように、$G(n)$ に対して得られる結果と $\psi_2(n)$ に対して得られる結果が一般には相互する。ここで、$f(x) \sim g(x)$ が

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

を意味する。

次の節以降、漸近公式の誤差項を主な対象とし、関数のオーダー評価、即ち、無限大に発散する速さを表すような関数の比較に使われる記号を紹介する。関数 $f(x)$ と非負関数 $g(x)$ に対して、

$$f(x) = O(g(x))$$

は、ある定数 $C > 0$ が存在して、

$$|f(x)| \le Cg(x)$$

が $x \to \infty$ のときに成り立つことを意味し、それをより簡約に

$$f(x) \ll g(x)$$

とも書く。

1 リーマンゼータ関数の零点

リーマンゼータ関数

$$\zeta(s) := \sum_{\substack{n \ge 1 \\ n:\,\text{正整数}}} \frac{1}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1), \qquad \zeta(s) = \underbrace{2^s \pi^{s-1}}_{\text{指数関数}} \overbrace{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}^{\text{三角サイン関数}} \underbrace{\Gamma(1-s)}_{\text{ガンマ関数}} \zeta(1-s)$$

は素数を検知し、素数分布論において非常に重要な関数である。$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において零点を持たず、上記の右側にある関数等式により $\mathrm{Re}(s) < 0$ においては負の偶数点 $s = -2, -4, -6, \ldots, -2k, -2k-2, \ldots$ のみで零点（一位の零点）を持ち、これらの零点を「自明な零点」として知られている。よって、自明な零点以外の零点は、存在すれば、帯領域 $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ に所在するが、素数定理との関係により、$\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上に零点を持たないため、自明な零点以外の零点は開帯領域 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ 内にしか存在し得ない。自明ではない零点は「非自明な零点」と通称される。

$\zeta(s)$ の非自明な零点は全て直線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上にあると予想されていて、これは有名な「リーマン予想」の主張である。リーマン予想と同値な主張の一つは、(0.5) で定義し

た素数を数える関数 $\pi(x)$ 及び $\psi(x)$ に対して、1901 年に H. von Koch [vonKoc01] によって提示された、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$(1.1) \qquad \pi(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt + O\left(x^{1/2+\varepsilon}\right) \text{、同様に} \qquad \psi(x) = x + O\left(x^{1/2+\varepsilon}\right)$$

の評価である。(1.1) のような $\pi(x)$ と $\psi(x)$ の近似公式における誤差項は $x^{1/2}$ の定数倍以上（オーダー的に下から $x^{1/2}$ によって抑えられる）となる x が無限に存在する [Pin83]。即ち、(1.1) における誤差項は $O\left(x^{1/2}\right)$ 以下になれない。即ち、リーマン予想と同値な (1.1) は素数定理の<u>最善の評価</u>である。$\zeta(s)$ の非自明な零点の分布は実に素数の分布を表し、整数論の重要な課題である。以降、$\rho = \beta + i\gamma$ は常に、実数 β と γ に対して考え、$\zeta(s)$ の非自明な零点を意味する。この表記を用いれば、リーマン予想の主張は $\beta = 1/2$ である。

$\zeta(s)$ の非自明な零点の個数は

$$(1.2) \qquad N(T) := \sum_{0<\gamma\le T} 1 = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

（[Ing32, Theorem 25] や [Tit86, Theorem 9.4] を参考）によって数えることができる。

補足. (1.2) における和では $\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ を重複度込みで数える。

特に、

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi}\log T$$

がわかる。また、評価

$$(1.3) \qquad N(T+1) - N(T) = \sum_{T<\gamma\le T+1} 1 \ll \log T$$

もよく使われる。

$x > 0$ と $T \ge 3$ に対して、H.L. Montgomery [Mon72] が

$$(1.4) \qquad F(x,T) := \sum_{0<\gamma,\gamma'\le T} x^{i(\gamma-\gamma')} w(\gamma-\gamma'), \qquad w(u) = \frac{4}{4+u^2}$$

を定義した。ここで、和が $\zeta(s)$ の非自明な零点の虚部 γ と γ' を重複度込みで渡る。[GM87, Lemma 8] により、$F(x,T)$ は実数であり、$F(x,T) \ge 0$, $F(x,T) = F(1/x,T)$ を満たし、リーマン予想が成り立てば、$1 \le x \le T$ に対して一様に

$$F(x,T) = \frac{T}{2\pi}\left(x^{-2}\log^2 T + \log x\right)\left(1 + O\left(\sqrt{\frac{\log\log T}{\log T}}\right)\right)$$

が成り立つ。この $F(x,T)$ 関数によって $\zeta(s)$ の零点の対相関（ペアコリレーション）が調べられる。(1.3) により、すべての $x > 0$ に対して、次の無条件に成り立つ自明な評価は知られている。

$$F(x,T) \le F(1,T) \ll T\log^2 T.$$

大きい x に対して、固定された $A>1$ に対して、

$$F(x,T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T \tag{1.5}$$

が $T \le x \le T^A$ に対して一様に成り立つと予想され、この予想にさらに、有名な「$\zeta(s)$ の零点の対相関予想」

$$\alpha < \beta \text{ に対して、} T \to \infty \text{ のとき、}$$

$$\sum_{\substack{0<\gamma,\gamma'\le T \\ \frac{2\pi\alpha}{\log T} \le \gamma-\gamma' \le \frac{2\pi\beta}{\log T}}} 1 \sim \left(\int_\alpha^\beta \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du + \delta(\alpha,\beta) \right) \frac{T}{2\pi} \log T,$$

$$\delta(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha \le 0 \le \beta, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

が従う [Gol05]。

※　以降、特に断らない限り、ρ または γ を渡る和が常に、$\zeta(s)$ の非自明な零点 $\rho = \beta + i\gamma$ を重複度込みで渡り、それ以外の和が常に正整数を渡る。

2　$\psi_2(n)$ の平均

この節では、正整数 n のゴールドバッハ表現を数える関数（(0.4) で定義した）$\psi_2(n)$ の平均

$$\sum_{n \le N} \psi_2(n)$$

に関する結果を紹介する。我々 [GS-pre] の結果に直接繋がる最も古い結果は次の 1991 年に A. Fujii [Fuj91a, Fuj91b, Fuj91c] が示したものである：リーマン予想が成り立つ（即ち、$\rho = 1/2 + i\gamma$）と仮定すれば、

$$\sum_{n \le N} \psi_2(n) = \frac{N^2}{2} - 2 \sum_\rho \frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(N^{\frac{4}{3}} (\log N)^{\frac{4}{3}} \right) \tag{2.1}$$

が成り立つ。

補足. (1.3) により、(2.1) の $\zeta(s)$ の零点を渡る和の絶対収束性は保証される。

上記の Fujii の結果は G. Bhowmik と J.-C. Schlage-Putcha [BS10] によって改良され、(2.1) における誤差項は $O(N \log^5 N)$ に改良できた。それは更に、A. Languasco と A. Zaccagnini [LS12] によって $O(N \log^3 N)$ まで改良された（[GY17] に別証明あり）。[BS10] では

$$\sum_{n \le N} \psi_2(n) = \frac{N^2}{2} - 2 \sum_\rho \frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + \Omega(N \log\log N)$$

が無条件に成り立つことも証明された。即ち、

$$\left|\sum_{n\le N}\psi_2(n)-\frac{N^2}{2}+2\sum_{\rho}\frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}\right|\gg N\log\log N$$

となる N が無限に存在する。よって、[LS12] の誤差評価 $O(N\log^3 N)$ がかなり最善評価に近い。

$|z|<1$ に対して収束する、無限和

$$\Psi(z):=\sum_{n\ge 1}\Lambda(n)z^n \tag{2.2}$$

は

$$\Psi(z)^2=\sum_{m,m'\ge 1}\Lambda(m)\Lambda(m')z^{m+m'}=\sum_{n\ge 1}\left(\sum_{m+m'=n}\Lambda(m)\Lambda(m')\right)z^n=\sum_{n\ge 1}\psi_2(n)z^n \tag{2.3}$$

を満たすため、$\psi_2(n)$ の母関数が得られる。我々 [GS-pre] は $\Psi(z)$ を用いて $\psi_2(n)$ の平均を調べた。まずは、Fujii [Fuj91a, Fuj91b, Fuj91c] に類似する $\psi_2(n)$ の平均公式は次のように書ける。

定理 0. $N\ge 2$ に対して、

$$\begin{aligned}\sum_{n\le N}\psi_2(n)&=\frac{N^2}{2}-2\sum_{\rho}\frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}-(2\log 2\pi-1/2)N+2\frac{\zeta'}{\zeta}(-1)-\sum_{k\ge 1}\frac{N^{1-2k}}{k(2k-1)}+E(N)\\&=\frac{N^2}{2}-2\sum_{\rho}\frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}+E(N)+O(N)\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$E(N):=\int_0^1\left(\sum_{n\ge 1}(\Lambda(n)-1)e^{-n/N}e^{2\pi in\alpha}\right)^2\sum_{n\le N}e^{n/N}e^{-2\pi in\alpha}\,d\alpha$$

である。

補足. 定理 0 は無条件に成り立つ。

定理 *0* の証明の概略.

$$I(z):=\sum_{n\ge 1}z^n$$

と書けば、

$$I(z)^2=\sum_{n\ge 2}\left(\sum_{m\le n-1}1\right)z^n=\sum_{n\ge 1}(n-1)z^n$$

となるが、(2.2) を用いれば、

$$I(z)\Psi(z) = \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{m\leq n-1}\Lambda(m)\right)z^n = \sum_{n\geq 1}\psi(n-1)z^n$$

となることがわかる。また、(2.3) で示したように

$$\Psi(z)^2 = \sum_{n\geq 1}\psi_2(n)z^n$$

も用いれば、

$$\sum_{n\geq 1}\psi_2(n)z^n = \sum_{n\geq 1}(2\psi(n-1)+(n-1))z^n + (\Psi(z)-I(z))^2$$

が得られる。次に、重みを外す。$e(\alpha) := e^{2\pi i\alpha}$ と記し、$0 < r < 1$ に対して、$z = re(\alpha)$ とおけば、

$$\int_0^1 \left(\sum_{n\geq 1}a_n r^n e(\alpha n)\right)\sum_{n\leq N} r^{-n}e(-\alpha n)\,d\alpha = \sum_{n\geq 1}\sum_{n'\leq N} a_n r^{n-n'}\int_0^1 e((n-n')\alpha)\,d\alpha = \sum_{n\leq N} a_n \tag{2.4}$$

が得られる。故に、

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq N}\psi_2(n) &= \sum_{n\leq N}(2\psi(n-1)+(n-1)) + \int_0^1 (\Psi(re(\alpha))-I(re(\alpha)))^2\sum_{n\leq N} r^{-n}e(-\alpha n)\,d\alpha\\ &= 2\psi_1(N) - \frac{(N-1)N}{2} + E(N).\end{aligned}$$

そこで、$\psi_1(N)$ の明示公式

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_\rho \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - (\log 2\pi)x + \frac{\zeta'}{\zeta}(-1) - \sum_{k\geq 1}\frac{x^{1-2k}}{2k(2k-1)}, \quad x \geq 1$$

([Ing32, Theorem 28] や [MV07, 12.1.1 Exercise 6] を参考）を用いて、$r = e^{-1/N}$ とおくと、定理 0 が従う。 □

次に、

$$\mathcal{E}(N) := \int_0^1 \left|\sum_{n\geq 1}(\Lambda(n)-1)e^{-n/N}e^{2\pi i n\alpha}\right|^2 \left|\sum_{n\leq N} e^{n/N}e^{-2\pi i n\alpha}\right| d\alpha \tag{2.5}$$

とおくと、$|E(N)| \leq \mathcal{E}(N)$ となる。また、$N \geq 2$ に対して、(2.4) により直ちに

$$\psi(N) - N = \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 1}(\Lambda(n)-1)e^{-n/N}e^{2\pi i n\alpha}\right)\sum_{n\leq N} e^{n/N}e^{-2\pi i n\alpha}\,d\alpha \tag{2.6}$$

が得られる。$0 \le \alpha \le 1/2$ に対して、

$$\left|\sum_{n \le N} e^{n/N} e^{-2\pi i n\alpha}\right| = \left|\frac{e - e(\alpha N)}{e^{-1/N} - e(\alpha)}\right| \ll \min\left\{N, \frac{1}{\alpha}\right\} \tag{2.7}$$

が成立することに注意し、コーシー＝シュワルツの不等式を用いれば、(2.5) により次の結果のように素数定理における誤差項は $\mathcal{E}(N)$ を用いて書き表される。

定理 1. $N \ge 2$ に対して、

$$\psi(N) = N + O\left(\sqrt{\mathcal{E}(N)\log N}\right)$$

が成立する。

(2.6) の式はゴールドバッハ表現の平均に関連する問題に現れて [BR18, 式 (7)]、類似公式も知られている [Kou19, 式 (5.20)]。

次に、$2^{\log_2 N} = N$ に注意し、

$$\mathcal{E}(N) \ll \sum_{0 \le k < \log_2 N} \frac{N}{2^k} \int_0^{\frac{2^{k+1}}{N}} \left|\sum_{n \ge 1} (\Lambda(n) - 1) e^{-n/N} e^{2\pi i n\alpha}\right|^2 d\alpha$$

と評価できる。再び、(2.7) を用いれば、

$$\mathcal{E}(N) \ll \int_0^{1/2} \left|\sum_{n \ge 1} (\Lambda(n) - 1) e^{-n/N} e^{2\pi i n\alpha}\right|^2 \min\left\{N, \frac{1}{\alpha}\right\} d\alpha$$

となるが、$\alpha \le \frac{2}{N}$ に対して $\min\{N, \frac{1}{\alpha}\} \ll N$ を用い、$\alpha > \frac{2}{N}$ に対して、区間を

$$\bigcup_{1 \le k \le \log_2 N} \left(\frac{2^k}{N}, \frac{2^{k+1}}{N}\right]$$

のように分ければ、

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(N) \ll N &\int_0^{\frac{2}{N}} \left|\sum_{n \ge 1} (\Lambda(n) - 1) e^{-n/N} e^{2\pi i n\alpha}\right|^2 d\alpha \\ &+ \sum_{1 \le k < \log_2 N} \frac{N}{2^k} \int_{\frac{2^k}{N}}^{\frac{2^{k+1}}{N}} \left|\sum_{n \ge 1} (\Lambda(n) - 1) e^{-n/N} e^{2\pi i n\alpha}\right|^2 d\alpha\end{aligned}$$

と評価できる。

$$\mathcal{W}(N, h) := \int_0^{\frac{1}{2h}} \left|\sum_{n \ge 1} (\Lambda(n) - 1) e^{-n/N} e^{2\pi i n\alpha}\right|^2 d\alpha$$

と書き、

$$H(x) := \int_0^x (\psi(t)-t)^2\,dt \qquad \text{と} \qquad J(x,h) := \int_0^x (\psi(t+h)-\psi(t)-h)^2\,dt$$

を用いれば、

$$\mathcal{W}(N,h) \ll \frac{1}{h^2}H(h) + \frac{1}{N^2}\sum_{k\ge1}\frac{1}{2^k}H(kN) + \frac{1}{h^2}\sum_{k\ge1}\frac{1}{2^k}J(kN,h) + \frac{N}{h^2}$$

となる。リーマン予想の仮定の下で、次の評価は知られている：

$H(x) \ll x^2$　(H. Cramér, 1921 年 [Cra21]),

$J(x,h) \ll hx\log^2\left(\frac{2x}{h}\right)$,　$1 \le h \le x$　(B. Saffari と R.C. Vaughan, 1977 年 [SV77]).

それらを用いれば、

$$\mathcal{W}(N,h) \ll \frac{N}{h}(\log N)^2, \quad 1 \le h \le N$$

が直ちに得られる。これを用いれば、次のように、Languasco と Zaccagnini (2011/2012) の結果 [LS12] 及び von Koch (1901) [vonKoc01] による素数定理の最善評価が回復できる。

系 1. リーマン予想が成り立つとする。このとき、$N \ge 2$ に対して、

$$\mathcal{E}(N) \ll N(\log N)^3$$

が成立する。従って、

$$\psi(N) = N + O(N^{1/2}(\log N)^2)$$

と

$$\sum_{n\le N}\psi_2(n) = \frac{N^2}{2} - 2\sum_\rho \frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(N(\log N)^3\right)$$

が成り立つ。

今度は、前節の後半で紹介した Montgomery の $F(x,T)$ 関数 (1.4) に関する評価を用いて、$J(x,h)$ の評価を導いて、上記の評価をさらに改良する。Goldston と Montgomery は [GM87] でリーマン予想を仮定し、$F(x,T)$ に関する予想 (1.5) が次と同値であることを示した：任意の固定された $\epsilon > 0$ に対して、

$$J(x,h) \sim hx\log\left(\frac{x}{h}\right)$$

が $1 \le h \le x^{1-\epsilon}$ に対して一様に成り立つ。こうして、Goldston と Montgomery [GM87] は $F(x,T)$ と $J(x,h)$ を結びつけた。我々 [GS-pre] は上記より弱い予想を仮定して、$\psi(N)$ と $\sum_{n\le N}\psi_2(n)$ の評価における誤差項の改良を試みた。

定理 2. リーマン予想が成り立つと仮定する。$x \geq 2$ と

$$\log x \leq \mathcal{L}(x) \leq \log^2 x$$

を満たす連続な増加関数 $\mathcal{L}(x)$ に対して、

$$e^{\sqrt{\mathcal{L}(x)}} \leq T \leq x \text{ に対して一様に} \quad F(x,T) \ll T\mathcal{L}(x) \quad \text{とすると、}$$

$$1 \leq h \leq 2xe^{-\sqrt{\mathcal{L}(x)}} \text{ に対して一様に} \quad J(x,h) \ll hx\mathcal{L}(x) \quad \text{が成り立つ。} \tag{2.8}$$

後者により、$\mathcal{E}(N) \ll N\mathcal{L}(N)\log N$ が成立し、

$$\psi(N) = N + O(N^{1/2}\sqrt{\mathcal{L}(\mathcal{N})}\log N)$$

が成り立つ。

定理 2 の特殊な場合として、次の二つの結果を紹介する。

系 2. リーマン予想が成り立つとする。

(I) 評価

$$F(x,T) = o(T\log^2 T), \quad T \leq x \leq T^A \qquad (\forall A > 1, T \geq 2)$$

が成り立てば、

$$J(x,h) = o(hx\log^2 x), \quad 1 \leq h \leq x \qquad (x \geq 2)$$

が成り立ち、さらに、$\mathcal{E}(N) = o(N(\log N)^3)$ となる。これにより、

$$\psi(N) = N + o(N^{1/2}(\log N)^2)$$

及び

$$\sum_{n \leq N} \psi_2(n) = \frac{N^2}{2} - 2\sum_{\rho} \frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + o(N(\log N)^3)$$

が成り立つ。

(II)

$$F(x,T) \ll T\log x, \quad T \leq x \leq T^{\log T} \qquad (T \geq 2) \tag{2.9}$$

とすると、

$$J(x,h) \ll hx\log x, \qquad 1 \leq h \leq x \qquad (x \geq 2)$$

が得られ、これによりさらに、$\mathcal{E}(N) \ll N(\log N)^2$ が成り立つ。従って、

$$\psi(N) = N + O\left(N^{1/2}(\log N)^{3/2}\right)$$

及び

$$\sum_{n \leq N} \psi_2(n) = \frac{N^2}{2} - 2\sum_{\rho} \frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(N(\log N)^2\right)$$

となる。

定理 2 において、$\mathcal{L}(x)=\epsilon\log^2 x$ と取れば系 2 の (I) が得られ、$\mathcal{L}(x)=\log x$ とおくと系 2 の (II) が従う。

補足. (2.9) の予想は、$T\le x\le T^A$ に対してのみ、Montgomery の $F(x,T)$ 予想 (1.5) に従い、$T^A\le x\le T^{\log T}$ に対して新しい予想である。$x\ge T^{\log T}$ に対しては自明な評価である。

定理 *2* の証明の概略.

$$\mathcal{J}(x,\delta):=\int_0^x\left(\psi((1+\delta)t)-\psi(t)-\delta t\right)^2\,dt,\qquad 0<\delta\le 1$$

を用いて、リーマン予想を仮定すれば、

$$F(x,T)\ll T\mathcal{L}(x),\qquad e^{\sqrt{\mathcal{L}(x)}}\le T\le x$$

により

$$\mathcal{J}(x,\delta)\ll \delta x^2\mathcal{L}(x),\qquad 1/x\le\delta\le 2e^{-\sqrt{\mathcal{L}(x)}}$$

が得られる。後者によりさらに、

$$J(x,h)\ll hx\mathcal{L}(x),\qquad 1\le h\le 2xe^{-\sqrt{\mathcal{L}(x)}}$$

となる。それらは実際、より大きい範囲において成り立つ。具体的には、

$$\begin{aligned}
&F(x,T)\ll T\mathcal{L}(x),\quad 2\le T\le x^A\qquad (\forall A\ge 1)\\
\Longrightarrow\qquad &\mathcal{J}(x,\delta)\ll\delta x^2\mathcal{L}(x),\quad 0\le\delta\le 1\\
\Longrightarrow\qquad &J(x,h)\ll hx\mathcal{L}(x),\quad 0\le h\le x
\end{aligned}$$

が成り立つ。

次に、

$$\begin{aligned}
F(x,T)&=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{0<\gamma\le T}\frac{x^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^T\left|\sum_{\gamma}\frac{x^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt+O\left((\log T)^3\right)
\end{aligned}$$

により、

$$G(x,\delta):=\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\kappa t}{t}\right)^2\left|\sum_{\gamma}\frac{x^{i\gamma}}{1+(t-\gamma)^2}\right|^2 dt$$

とおけば、リーマン予想の仮定の下で、$1/x\le\delta\le 1$ に対して、

$$\mathcal{J}(x,\delta)\ll x^2G(x,\delta)+O(\delta x^2)$$

とできる。これより、(2.8) が直ちに従う。

後半部分を示すのに、$1 \leq h \leq x/8$ に対して、

$$J(x,h) - J(x/2,h) \ll \frac{x}{h}\int_0^{8h/x} \mathcal{J}(x,\delta)\,d\delta \ll \frac{x^3\mathcal{L}(x)}{h}\int_0^{8h/x} \delta\,d\delta \ll hx\mathcal{L}(x)$$

に注意し、

$$\begin{aligned} J(x,h) - J(x/2^k,h) &= \sum_{j\leq k}\bigl(J(x/2^{j-1},h) - J(x/2^j,h)\bigr) \\ &\ll h\sum_{j\leq k}(x/2^{j-1})\mathcal{L}(x/2^{j-1}) \\ &\ll hx\mathcal{L}(x) \end{aligned}$$

と評価する。$(\log x)^2 \leq 2^k \leq 2(\log x)^2$ に対して、$J(x/2^k,h) \ll hx$ であるため、後半の主張が従う。 $\square$

最後に、リーマン予想より弱い予想を用いた評価を紹介する。

$$\Theta := \sup\{\beta : \zeta(\beta + i\gamma) = 0\}$$

とおく。Bhowmik, K. Halupczok, K. Matsumoto, と Y. Suzuki による [BHMS19] の特殊な場合として、$1/2 < \Theta < 1$ とし、$N \geq 2$ と $1 \leq h \leq N$ に対して、

$$J(N,h) \ll hN^{2\Theta}\log^4 N$$

が成り立つ。これにより

$$\mathcal{E}(N) \ll N^{2\Theta}\log^5 N$$

となる。これを用いれば、次の系が得られる。

系 3. $1/2 \leq \Theta < 3/4$ とすると、

$$\sum_{n\leq N}\psi_2(n) = \frac{N^2}{2} - 2\sum_{\substack{\rho \\ \mathrm{Re}(\rho)\geq 1/2}}\frac{N^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + o(N^{\frac{3}{2}})$$

が成り立つ。

参考文献

[BS10] G. Bhowmik, J. -C. Schlage-Puchta, *Mean representation number of integers as the sum of primes*, Nagoya Math. J., **200** (2010), 27–33.

[BR18] G. Bhowmik, I. Z. Ruzsa, *Average Goldbach and the quasi-Riemann hypothesis*, Anal. Math. **44** (2018), no. 1, 51–56.

[BHMS19] Gautami Bhowmik, Karin Halupczok, Kohji Matsumoto, Yuta Suzuki, *Goldbach representations in arithmetic progressions and zeros of Dirichlet L-functions*, Mathematika **65** (2019), no. 1, 57–97.

[Cra21] H. Cramér, *Some theorems concerning prime numbers*, Arxiv för Mat. Astr. Fys. **15** (1921), no. 5, 33pp.

[Fuj91a] A. Fujii, *An additive problem of prime numbers*, Acta Arith. **58** (1991), 173–179.

[Fuj91b] A. Fujii, *An additive problem of prime numbers. II*, Proc. Japan Acad. ser. A Math. Sci. **67** (1991), 248–252.

[Fuj91c] A. Fujii, *An additive problem of prime numbers. III*, Proc. Japan Acad. ser. A Math. Sci. **67** (1991), 278–283.

[Gol05] D. A. Goldston, *Notes on pair correlation of zeros and prime numbers*, Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory, LMS Lecture Note Series **322**, Edited by F. Mezzadri and N. C. Snaith, Cambridge Unversity Press, 2005, 79–110.

[GM87] D. A. Goldston and H. L. Montgomery, *Pair correlation of zeros and primes in short intervals*, Analytic Number Theory and Diophantine Problems (A. C. Adolphson and et al., eds.), Proc. of a Conference at Oklahoma State University (1984), Birkhauser Verlag, 1987, 183–203.

[GS-pre] D. A. Goldston and Ade Irma Suriajaya, *On an Average Goldbach Representation Formula of Fujii*, preprint in arXiv:2110.14250 [math.NT] (submitted).

[GY17] D. A. Goldston and L. Yang, *The Average Number of Goldbach Representations*, in: Prime numbers and representation theory, Edited by Ye Tian & Yangbo Ye, Science Press, Beijing, 2017, 1–12.

[Ing32] A. E. Ingham, *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Reprint of the 1932 original; With a foreword by R. C. Vaughan.

[vonKoc01] H. von Koch, *Sur la distribution des nombres premiers*, Acta Math. **24** (1901), 159–182.

[Kou19] Dimitris Koukoulopoulos, *The distribution of prime numbers*, Graduate Studies in Mathematics **203**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.

[LS12] A. Languasco and A. Zaccagnini, *The number of Goldbach representations of an integer*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 795–804.

[Mon72] H.L. Montgomery, The Pair Correlation of Zeros of the Zeta Function, in: Analytic Number Theory, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972, 181–193.

[MV07] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **97**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Pin83] J. Pintz, *Oscillatory properties of the remainder term of the prime number formula*, Studies in pure mathematics, 551–560, Birkhäuser, Basel, 1983.

[SV77] B. Saffari and R. C. Vaughan, *On the fractional parts of x/n and related sequences II*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **27** (1977), no. 2, 1–30.

[Tit86] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Clarendon (Oxford), 1986.

Faculty of Mathematics, Kyushu University
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395
JAPAN

E-mail address: adeirmasuriajaya@math.kyushu-u.ac.jp

九州大学 数理学研究院　Ade Irma Suriajaya

以上