On the discrete mean of the higher derivative of Hardy's Z-function

名古屋大学多元数理科学研究科　小林　弘京
Hirotaka Kobayashi
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1　序論

Hardy の Z-関数とは, 標語的に言えば Riemann ζ-関数の critical line 上での値を実数値化したものである. Riemann ζ-関数とは, $s = \sigma + it$ とすると, Dirichlet 級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

によって, $\sigma > 1$ で定義された複素関数であった. この関数は関数等式

$$h(s)\zeta(s) = h(1-s)\zeta(1-s)$$

を満たし, 全複素平面に有理型に解析接続される. ここで $h(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ である. この関数については, 「実でない零点の実部は常に 1/2 であろう」という Riemann 予想と呼ばれるものがあって, 素数分布などに直接関わるものであり, 現在も重要な未解決問題の一つとして研究が続けられている. 直線 $\sigma = 1/2$ は critical line 等と呼ばれ, この直線上での Riemann ζ-関数の挙動は特に重要な研究対象となっている. そういった事情で, Riemann ζ-関数の critical line 上での値を実数値化したものである, Hardy の Z-関数は色々と研究されており, 最近も monograph [4] が出版されたりしている. Hardy の Z-関数の定義を書くと,

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

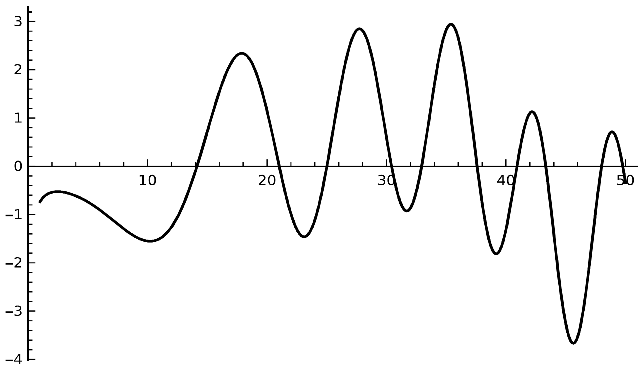
となる. ここで $\theta(t) = \arg h(1/2 + it)$ である. Hardy の Z-関数が Riemann ζ-関数の critical line 上の値に対応するのは定義を見れば明らかであろう. 実数値関数であるこ

とも関数等式や鏡像原理から直ちにわかる.

筆者はこの Hardy の Z-関数及びその高階導関数の零点分布に興味を抱き, それを平均的に調べた, というのが今回の講演の内容である. 研究の動機としては松岡氏 ([6]) による以下の定理が発端となっている.

定理 1 (K. Matsuoka, 2012)**.** Riemann 予想を仮定すると, 任意の非負整数 k に対してある T_0 が存在して, $T_0 \le T$ ならば, 二つの連続する $Z^{(k)}(t)$ の零点 $T \le \gamma_k < \gamma_k'$ の間に $Z^{(k+1)}(t)$ の零点が唯一つ存在する.

下の図は $k = 0$ のとき, すなわち $Z(t)$ のグラフだが, これを見ていただければ定理の意味するところは明らかであろう. このような状況が一般の非負整数 k に対する $Z^{(k)}(t)$ について成り立っている事が (Riemann 予想の仮定下で) 示されたのだ.



$0 \le t \le 50$ における $Z(t)$ のグラフ

ここで次のような疑問が浮かぶ, ではこのグラフにおいては $Z''(t)$ の零点, すなわち $Z(t)$ の変曲点は, $Z'(t)$ の零点より, $Z(t)$ の零点の近くに存在するのではないか. より一般的に言えば, $Z^{(k)}(t)$ の零点の分布は k の偶奇によって偏りが存在するのではないか. これが今回の研究の端緒となった疑問である. そこでまずは平均的にそのようなことが言えないか, と考えたわけである. 過去の文献を漁ってみると, Yıldırım ([8]) による次のような事実が見つかった.

定理 2 (C. Y. Yıldırım, 1990)**.** k を非負整数とする. Riemann 予想を仮定すると, $T \to \infty$ のとき,

$$\sum_{0<\gamma_k \le T} |Z(\gamma_k)|^2 \sim \begin{cases} (1 + \frac{1}{k} + O(\frac{\log k}{k^2}))\frac{TL^2}{2\pi} & (k \text{ odd and } k > 1) \\ (1 - \frac{3}{k} + O(\frac{\log k}{k^2}))\frac{TL^2}{2\pi} & (k \text{ even}) \end{cases}$$

が成り立つ. ここで, γ_k は $Z^{(k)}(t)$ の零点であり, $L = \log(T/2\pi)$ である.

この結果からどうも睨んだ通り k の偶奇によって零点に偏りがあるらしい, ということが見て取れる.

2 主定理

筆者は Yıldırım の結果の更なる一般化を試み, 以下を得た ([5]).

定理 3 (H. K)**.** j と k を非負整数とする. Riemann 予想を仮定すると, $T \to \infty$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0<\gamma_k\leq T} \left| Z^{(j)}(\gamma_k) \right|^2 \\
&= \delta_{0,k} \frac{T}{2^{2j+1}(2j+1)\pi} \left(\log \frac{T}{2\pi} \right)^{2j+2} - \frac{(k+1)\{1+(-1)^j\}}{2^{2j+1}(j+1)^2} \frac{T}{2\pi} \left(\log \frac{T}{2\pi} \right)^{2j+2} \\
&\quad + \sum_{u=1}^{j} \frac{1}{2j+1-u} \frac{j!}{(j-u)!} (-1)^{-u} \sum_{g=1}^{k} \frac{1}{\theta_g^{u+1}} \frac{T}{2^{2j+1}\pi} \left(\log \frac{T}{2\pi} \right)^{2j+2} \\
&\quad + (-1)^{j+1} \sum_{g=1}^{k} \frac{(j!)^2}{\theta_g^{2j+2}} \frac{T}{2^{2j+2}\pi} \left(\log \frac{T}{2\pi} \right)^{2j+2} \\
&\quad + (-1)^j (j!)^2 \sum_{g=1}^{k} \frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{z_g-1}}{\theta_g^{2j+2}} \left(\sum_{\mu=0}^{j} \frac{\theta_g^{\mu}}{\mu!} \right)^2 \frac{T}{2^{2j+2}\pi} \left(\log \frac{T}{2\pi} \right)^{2j+2} \\
&\quad + O_{j,k}\left(T(\log T)^{2j+1} \right),
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで $\delta_{0,k}$ は Kronecker の δ, z_g $(g = 1, 2, \ldots, k)$ は $\mathscr{Z}_k(s,T) := (L/2 + d/ds)^k \zeta(s)$ の零点であって, $z_g = 1 - 2\theta_g/L + O(L^{-2})$ となるもので, θ_g は $\sum_{\mu=0}^{k} \theta_g^{\mu}/\mu! = 0$ を満たす. $j = 0$ または $k = 0$ のとき, 右辺の和は空和であるとみなす.

詳しい証明は論文の方に譲るが, 簡単に方針を述べると, 考えるべき和を複素積分

$$
\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{Z_k'}{Z_k}(s) Z_j(s) Z_j(1-s) ds
$$

の計算に置き換える, というものである. ここで C は適切な積分路であり, $Z_k(s)$ は $Z^{(k)}(t)$ に対応するような複素関数である. 対応する, というのは $Z(t)$ と $\zeta(s)$ の間にあるような関係がある, ということだと思っていただければよい. ここで, $Z_k(s)$ の対数微分はそのままでは扱いにくいので, $\mathscr{Z}_k(s,T)$ の対数微分で近似するのである. そ

こで Gonek の補題 ([2], Lemma 5) やごく最近, 南出-谷川の両氏によって得られた, 積分による連続的な平均値の結果 ([7]) などを用いる．なお, 大まかな証明の方針は Conrey-Ghosh([1]) ないし Yıldırım([8]) による．

このような平均値を考えることによって筆者が何を目論んだかというと, j と k の偶奇が一致するかしないかで値が異なるかどうかを確認したかったのである．もしそれが確認できれば, k の偶奇による $Z^{(k)}(t)$ の零点の分布の偏りの存在はより明瞭になる．

3　問題点

ところが問題が発生して, 主要項の係数が一般には決定することが難しいということが判明した．実は Yıldırım の結果にも同様の問題が発生している. 彼の結果も係数は近似でしか得られていない. 特に, $k=2$ の場合の係数は精密とはとても言えない．筆者の結果において問題となるのは第 3〜5 項目で, 方程式

$$\sum_{\mu=0}^{k} \frac{x^\mu}{\mu!} = 0 \tag{1}$$

の解 $x=\theta_g$ $(g=1,2,\cdots,k)$ の逆乗和及び第 5 項における z_g と θ_g に関する和の値である．これらの値を正確に決定することは大きな困難を伴うことが予想される. まず第一に, 方程式 (1) の解 $x=\theta_g$ を (近似ではなく) 正確に決定することは一般に容易ではない. この方程式については現在までいくつか先行研究があるようだが, k が奇数の時に現れる実零点でさえ一般的な解は与えられていない. 複素零点は言わずもがなである (例えば [9] を参照). 第二に, よしんばそれらの零点が決定できたとて, 次は $\mathscr{Z}_k(s,T)$ の零点 z_g の値が問題となる. しかもその値から

$$\sum_{g=1}^{k} \frac{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{z_g-1}}{\theta_g^{2j+2}} \left(\sum_{\mu=0}^{j} \frac{\theta_g^\mu}{\mu!}\right)^2$$

なる和を計算せねばならないのである. 従って正攻法でこれらの値を調べるのは, この問題の攻略法として現実的とは思えない．そこで, そもそもなぜこのような値が現れるのかを考えてみる. 証明をたどると元凶は $Z_k(s)$ を $\mathscr{Z}_k(s,T)$ によって近似したことにあるようだ．ここで取るべき方針は一先ず次のようなものが思い浮かぶ.

- 第 3〜5 項目の係数が, $Z_k(s)$ から得られるどのような値に対応するか調べる.

これにより, 結局 $Z_k(s)$ を $\mathscr{Z}_k(s,T)$ によって近似しないような新たな証明・計算法を与えることになるであろう．ではどのようにするか, これがまた問題である. まず, 特

殊な k の場合を考えるべきであろう. $k=0$ ではつまらないから, $k=1$ や 2 の場合を考える. このくらいであれば問題の係数も比較的容易に計算できるはずである. そうして計算することでパターンを探り出し, $Z_k(s)$ から得られるどのような値に対応するか調べるわけである. どうせそれは $Z_k(s)$ を含むような関数の $s=1$ 辺りの留数であろうから後はそれらを片端から調べればよい. これもまた現実的とはやや言い難いが, 少なくとも上に書いたような正攻法よりは余程可能性のある方法である.

次に考えられるのはランダム行列を用いる方法である. こちらは成功する可能性はあるが, まったく未知で何の確証も無い方法である. 言うだけなら簡単で, ランダム行列を使って漸近式の係数まで予想して, 係数比較を行うのである. 何も知らなければ突然, ランダム行列などと言いだして何事かと思われるかもしれないが, これには前例があって, Hughes, Keating, O'Connell の三氏が似たような平均値の問題に関する非常に精密な予想を提出している ([3]). すなわち.

予想 1 (C. P. Hughes, J. P. Keating and N. O'Connell, 2000)**.** $k>-3/2$ に対して

$$\sum_{0<\gamma\le T}|\zeta'(\rho)|^{2k}\sim\frac{G^2(k+2)}{G(2k+3)}a_k\frac{T}{2\pi}\left(\log T\right)^{(k+1)^2}$$

が成り立つ. ここで,

$$a_k=\prod_p\left(1-p^{-1}\right)^{k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\Gamma(m+k)}{m!\Gamma(k)}\right)^2p^{-m}$$

であって, $G(z)$ は Barnes G 関数

$$G(z+1)=(2\pi)^{\frac{z}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(z^2+\gamma z^2+z)\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n e^{-z+\frac{z^2}{2n}}$$

である.

この予想を導き出した, ランダム行列を用いた方法を今回の問題に適用し, 係数を予想しようというのである. もしそこまでできれば, 今回の主定理で得られた係数との比較によってそれらを明示的に決定できるのではないか, ということである. こちらは筆者の知識が追い付いていないので, 実際どのくらい可能性があるかはまったく未知であるが, 可能ならば最も手っ取り早い方法であろう.

謝辞

本稿は 2021 年度 RIMS 研究集会「解析的整数論とその周辺」での講演を基に執筆したものである. 講演の機会をくださいました世話人の赤塚広隆先生, 山﨑義徳先生にこの場を借りて感謝申し上げます.

参考文献

[1] J. B. Conrey and A. Ghosh. 'A mean value theorem for the Riemann zeta-function at its relative extrema on the critical line', *J. London Math. Soc.* (2) **32** (1985) 193–202.

[2] S. M. Gonek, 'Mean values of the Riemann zeta-function and its derivatives', *Invent. Math.* **75** (1984), 123–141. Press, San Diego, 1989), 343–370.

[3] C. P. Hughes, J. P. Keating and N. O'Connell, 'Random matrix theory and the derivative of the Riemann zeta-function', *Proc. Roy. Soc. London Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.* **456** (2000), 2611–2627.

[4] A. Ivić, 'The theory of Hardy's Z-function', Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[5] H. Kobayashi, 'On the Discrete Mean of the higher Derivative of Hardy's Z-Function', arXiv:2106.01736.

[6] K. Matsuoka. 'On the higher derivatives of $Z(t)$ associated with the Riemann Zeta-Function', arXiv:1205.2161.

[7] T. M. Minamide and Y. Tanigawa. 'Mean square of the derivatives of Hardy's Z-function', *J. Math. Anal. Appl.* **485** (2020), no.1, 123772, 15pp.

[8] C. Y. Yıldırım. 'The Mean Value of $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2$ at The Zeros of $Z^{(k)}(t)$', *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada* **12** No.4 (1990), 135–140.

[9] S. M. Zemyan, 'On the zeros of the Nth partial sum of the exponential series', *Am. Math. Mon* **112** No.10 (2005), 891–909.