Joint value distribution for L-functions on the critical line

東京工業大学理学院数学系　井上 翔太
Shōta Inoue
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1　導入

Riemann ゼータ関数 ζ を始めとする数論的な L 関数の値分布は, 数論における主要な研究テーマのひとつである. 本講究録では筆者と Junxian Li 氏の共同研究で得られた, L 関数の同時値分布についての結果を述べる. 本研究は, Riemann ゼータ関数で得られている結果を L 関数へ一般化すること, L 関数の確率的独立性を解明すること, のふたつの目的がある. 本節では導入として, いくつかの先行研究と我々が得た結果を, Riemann ゼータ関数に限定した場合について述べる. 我々の研究は一般の L 関数に対するものだが, Riemann ゼータ関数に限定しても新しい結果を含む. 一般の L 関数の定義や得られた結果については節 2 で述べる.

1.1　Riemann ゼータ関数の中心極限定理と大偏差

Riemann ゼータ関数の値分布についての重要な未解決問題として, 以下の予想が知られている. 以降, 全ての ε は十分小さな任意の正の数とする.

予想 (Lindelöf 予想)**.** 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)| \ll_{\varepsilon} (|t|+1)^{\varepsilon}.$$

複素関数論の一般論から, 有理型関数の挙動は零点や極の分布と密接な繋がりがあることがわかる. そして Riemann ゼータ関数も有理型関数であることから, 複素関数論の一般論により値分布と零点分布が密接に関係することがわかる. 実際に Riemann 予想が成り立つと仮定すると, Lindelöf 予想も成り立つことが知られている. また, Lindelöf 予想を仮定することで, 零点密度予想と呼ばれる零点の分布に関する重要な予想を解決することができる. さらに Lindelöf 予想は素数の分布に関する重要な帰結がある.

定理 (Ingham [8])**.** Lindelöf 予想が成り立つと仮定する. このとき

$$p_{n+1} - p_n \ll_{\varepsilon} p_n^{1/2+\varepsilon}$$

が成り立つ. ただし, p_n は n 番目の素数である.

このように Riemann ゼータ関数の値分布は, 零点分布や素数分布へ重要な応用をもつ興味深い研

究対象である．

Riemann ゼータ関数の挙動を把握することは難しく, 多くの解決すべき問題が残っている．一方で Selberg は [16][*1]で $\log|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ の分布が正規分布に従うこと, つまり $T\to+\infty$ で

$$\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{t\in[T,2T]\ :\ \frac{\log|\zeta(\frac{1}{2}+it)|}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}>V\right\}\sim\int_V^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{du}{\sqrt{2\pi}} \tag{1.1}$$

が任意の固定された $V\in\mathbb{R}$ に対して成り立つことを示した．ここで meas は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度である．この極限定理により, 複雑な ζ の値分布を正規分布を通して理解することが可能になる．しかしながら, 極限定理 (1.1) は固定された V に対するもので, Lindelöf 予想などのオーダー評価の問題に適用することはできない．我々が極限定理 (1.1) をオーダー評価の問題に適用するためには, V が極限を取るパラメータ T にどの程度依存させることができるか, という大偏差に関する以下のような問題を考える必要がある．

問題 1. 任意の $V\in[-R(T),R(T)]$ に対して, 極限定理 (1.1) が成り立つ $R(T)$ の大きさは何か.

この問題を考えることで極限定理と Lindelöf 予想を結びつけることができる． 実際に, もし $R(T)\geq\sqrt{(2+\varepsilon)\log T}$ に対して, 任意の $V\in[-R(T),R(T)]$ で極限定理の上からの評価, つまり

$$\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{t\in[T,2T]\ :\ \frac{\log|\zeta(\frac{1}{2}+it)|}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}>V\right\}\leq(1+o(1))\int_V^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$

が成り立つと仮定すると, Lindelöf 予想が成り立つことがわかる．一方で簡単にわかる事実として, $R(T)\geq\sqrt{(2+\varepsilon)\log T}$ のときに極限定理 (1.1) が成り立たないことが, Cauchy の積分公式と平均値の定理から確かめられる ([3] の Lemma 2.2 を参照). 問題 1 で期待される解答は Radziwiłł によって考察されている．

予想 (Radziwiłł [15])**.** 任意の $V=o(\sqrt{\log\log T})$ で極限定理 (1.1) が成り立ち, $V\asymp\sqrt{\log\log T}$ では成り立たない．特に $V\sim k\sqrt{\log\log T}$ のとき, ある $C(k)\neq1$ に対して, $T\to+\infty$ で

$$\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{t\in[T,2T]\ :\ \frac{\log|\zeta(\frac{1}{2}+it)|}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}}>V\right\}\sim C(k)\int_V^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{du}{\sqrt{2\pi}}.$$

この予想は Lindelöf 予想をさらに精密化した以下の予想と深く関係する．

予想 (Keating-Snaith 予想 [11])**.** 任意の $k>-\frac{1}{2}$ に対して, $T\to+\infty$ で

$$M_k(T)\coloneqq\int_T^{2T}|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^{2k}dt\sim C(k)T(\log T)^{k^2}.$$

ここで $C(k)$ は Barnes G 関数と Euler 積を用いて明示的に定義される正の定数である．

[*1] 正確にはこの論文で極限定理に関して言及はされていないが, この論文の内容から本質的に導出することができる．

Lindelöf 予想は任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $M_k(T) \ll_{\varepsilon,k} T^{1+\varepsilon}$ が成り立つことと同値であることが知られている ([19, Section 13.2] 参照). この同値性から Keating-Snaith 予想は Lindelöf 予想を精密化したものであると理解することができる. さらに Radziwiłł の予想は値分布の観点から見ると, Keating-Snaith 予想をさらに精密化した予想だと考えることができる. 実際に, Radziwiłł の予想と Riemann 予想下での Soundararajan の大偏差に関する評価 [18] を仮定すれば, Keating-Snaith 予想を $k \geq 0$ の場合に証明することができる. Radziwiłł は [15] で Dirichlet 多項式の計算から上記の予想を定式化した. さらに彼は, $R(T) = O((\log\log T)^{1/10-\varepsilon})$ であれば彼の予想が正しいことを示した. そして我々はこれらの先行研究の発展として以下を証明した.

定理 1 (Inoue, Li [10])**.** 任意の $0 \leq V = o((\log\log T)^{1/6})$ に対して,

$$\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{ t \in [T, 2T] \ : \ \frac{\mathrm{Re}\, e^{-i\theta} \log\zeta(\frac{1}{2}+it)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}} > V \right\} \leq (1+o(1)) \int_V^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$

が $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ のときに成り立ち,

$$\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\left\{ t \in [T, 2T] \ : \ \frac{\mathrm{Re}\, e^{-i\theta} \log\zeta(\frac{1}{2}+it)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}} > V \right\} \leq (1+o(1)) \int_V^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$

が $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ のときに成り立つ. また, Riemann 予想が成り立つと仮定すると, 上記ふたつの不等式が任意の $0 \leq V = o((\log\log T)^{1/6}(\log\log\log T)^{1/3})$ に対して同じ θ で成り立つ.

この定理の応用として次のモーメントに関する結果を得ることができる.

定理 2 (Inoue, Li [10])**.** ある絶対定数 $c > 0$, $B > 0$ に対して, 任意の $|k| \leq c$, $T \geq 3$ に対して,

$$T(\log T)^{k^2 - Bk^3} \ll \int_T^{2T} \exp\left(2k\, \mathrm{Im} \log\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \ll T(\log T)^{k^2+Bk^3}$$

が成り立つ. さらに, Riemann 予想を仮定すると, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して

$$T(\log T)^{k^2-\varepsilon} \ll_{k,\varepsilon} \int_T^{2T} \exp\left(2k\, \mathrm{Im} \log\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \ll_{k,\varepsilon} T(\log T)^{k^2+\varepsilon}$$

が成り立つ.

定理 2 の Riemann 予想下での上からの評価は Najnudel [14] により得られている. 一方で下からの評価と無条件な評価は, 今回の研究で得られた新しい結果である.

定理 1 は以下で述べる定理 4, 5 の特別な場合であり, 定理 2 は定理 6, 7 の特殊な場合である.

2 L 関数の多次元中心極限定理と大偏差

前節では Riemann ゼータ関数の値分布について述べた. 本節ではその結果を L 関数の同時値分布へ一般化する.

Selberg は [17] である適切な条件をみたす L 関数は「統計的に独立になる」と述べた．しかし彼はその数学的意味を [17] では述べていない．それを出版論文として初めて明確にしたのは Bombieri と Hejhal [2][*2]である．彼らは, ある適切な条件をみたす L 関数 $L_1, \dots, L_r$ に対して, $T \to +\infty$ のとき

$$\frac{1}{T}\operatorname{meas}\left\{ t \in [T, 2T] \ : \ \frac{\log|L_j(\frac{1}{2}+it)|}{\sqrt{\frac{n_j}{2}\log\log T}} > V_j \text{ for } j = 1, \dots, r \right\} \sim \prod_{j=1}^{r} \int_{V_j}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.1}$$

が固定された任意の $V_1, \dots, V_r \in \mathbb{R}$ で成り立つことを示した．ただし, n_j は L_j から定まるある正の定数である．これは極限定理 (1.1) を L 関数のベクトル値関数へ一般化したものである．この極限定理により, L 関数が確率変数として独立であると理解することができる．我々は節 1 で述べた背景を踏まえ, 彼らの定理を大偏差の意味でどの程度まで精密化できるか, という問題を議論する．つまり問題 1 を一般化した以下の問題について議論をする．

問題 2. 任意の $V_1, \dots, V_r \in [-R(T), R(T)]$ に対して極限定理 (2.1) が成り立つ $R(T)$ の大きさは何か．

2.1 定義と仮定

以下 s を複素数として, その実部を σ, 虚部を t とする．

定義 1. 以下の (S1)–(S5) をみたす関数 F の集合を $\mathcal{S}^\dagger$ と書く．

(S1) (Dirichlet 級数) 関数 F は Dirichlet 級数表示 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_F(n)}{n^s}$ をもち, かつこの級数は $\sigma > 1$ で絶対収束する．

(S2) (解析接続) 関数 $(s-1)^m F(s)$ が有限位数の整関数となる非負整数 m が存在する．

(S3) (関数等式) 任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\Phi_F(s) = \omega_F \overline{\Phi_F}(1-s).$$

ただし, ω_F は $|\omega_F| = 1$ をみたす複素数であり, $\Phi_F(s) := \gamma(s)F(s)$ で, γ はある $\lambda_\ell > 0$, $Q > 0$, $\operatorname{Re}\frac{\mu_\ell}{\lambda_\ell} > -\frac{1}{2}$ に対して, $\gamma(s) = Q^s \prod_{\ell=1}^{k} \Gamma(\lambda_\ell s + \mu_\ell)$, と定義される関数である．また, $\overline{\Phi_F}$ は $\overline{\Phi_F} = \overline{\Phi_F(\overline{s})}$ を意味する．

(S4) (Euler 積) 任意の $\sigma > 1$ に対して,

$$F(s) = \prod_p F_p(s), \quad F_p(s) = \exp\left(\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{b_F\left(p^\ell\right)}{p^{\ell s}} \right).$$

ただし, $b_F(n)$ は n が素数冪でない場合 0 であり, ある $\vartheta_F < \frac{1}{2}$ に対して $b_F(n) \ll n^{\vartheta_F}$ が全ての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ で成り立つ数論的関数である．

[*2] Bombieri と Hejhal は彼らの定理に Selberg にクレジットしているが, 筆者はその正確な背景を知らないことに注意しておきたい．

(S5) (仮説 H) 任意の $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して

$$\sum_{p} \frac{|b_F(p^\ell) \log p^\ell|^2}{p^\ell} < +\infty.$$

本稿での L 関数は $\mathcal{S}^\dagger$ に属する関数とする．$\mathcal{S}^\dagger$ はよく知られた Selberg クラスの条件から以下の Ramanujan 予想の条件を除いたものである．

(S3') 関数 F は (S3) と同じ関数等式をもつ．ただし, μ_ℓ は $\mathrm{Re}\,\mu_\ell \geq 0$ をみたす．
(S5') 関数 F の Dirichlet 係数 $a_F(n)$ に対して, 評価 $a_F(n) \ll_F n^\varepsilon$ が成り立つ．

このとき, (S1), (S2), (S3'), (S4), (S5') をみたす関数の集合を Selberg クラスといい $\mathcal{S}$ と書く．Selberg クラスは, $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の標準 L 関数全体の集合と一致することが期待されているが, 多くの標準 L 関数に対して (S3'), (S5') は未解決である．一方で, $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の中心指標がユニタリーの既約 cuspidal 保型表現の標準 L 関数に対して, $n \leq 4$ では (S3) が成り立つことが Kim-Sarnak [12] によって証明されている．そして (S5) は任意の n で成り立つことが知られている (例えば Luo-Rudnick-Sarnak [13] を参照)．そのため, 本稿では多くの L 関数に適用可能な議論をするために $\mathcal{S}^\dagger$ を調べる．

さらに L 関数の同時値分布を調べるために以下の仮定 $\mathscr{A}$ を導入する．

仮定 ($\mathscr{A}$)**.** Dirichlet 級数の r 個の組 $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_r)$ と $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$ が仮定 $\mathscr{A}$ をみたすことを, $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\theta}$ が以下の (A1)–(A3) をみたすことと定義する．

(A1) (Selberg の直交性予想)　全ての $\boldsymbol{F}$ の成分 F_j に対して, ある正の数 n_{F_j} が存在して

$$\sum_{p \leq x} \frac{|a_{F_j}(p)|^2}{p} = n_{F_j} \log\log x + O_{F_j}(1), \quad x \to \infty.$$

加えて, 任意の異なる $\boldsymbol{F}$ の成分のペア $F_i \neq F_j$ に対して,

$$\sum_{p \leq x} \frac{a_{F_i}(p)\overline{a_{F_j}(p)}}{p} = O_{F_i, F_j}(1), \quad x \to \infty.$$

(A2) 全ての $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して, $F_i = F_j$ となる $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$ は高々ひとつであり, そのとき $|\theta_i - \theta_j| \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$.

(A3) (零点密度評価) 全ての $\boldsymbol{F}$ の成分 F_j に対して, ある正の定数 κ_{F_j} が存在して, 任意の $T \geq 3$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$ に対して, 評価

$$N_{F_j}(\sigma, T) \ll_{F_j} T^{1-\kappa_{F_j}(\sigma - 1/2)} \log T$$

が成り立つ．ここで $N_F(\sigma, T)$ は $F \in \mathcal{S}^\dagger$の 非自明零点 $\rho_F = \beta_F + i\gamma_F$ で $\beta_F \geq \sigma, 0 \leq \gamma_F \leq T$ をみたす個数である．

集合 $\mathcal{S}^\dagger$ に属する L 関数 F の非自明零点とは, (S3) で定義された Φ_F の零点を意味する．

仮定 (A1) は Selberg の直交性予想と呼ばれ, Selberg クラスにおける重要な予想である．この予想は保型 L 関数ではいくつかの進展がある．例えば, 中心指標がユニタリーな $GL_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約

cuspidal 保型表現の標準 L 関数に対して, (S3) の仮定下ではこの予想が成り立つことが知られている.

仮定 (A2) は L 関数の独立性を保証するための自然な条件である. 例えば, $\mathrm{Re}\, e^{-i\theta_1} \log F(s)$ と $\mathrm{Re}\, e^{-i\theta_2} \log F(s)$ は $|\theta_1 - \theta_2| \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ とすると値分布が互いに依存し, 非独立となる.

仮定 (A3) は L 関数を臨界線 $\sigma = \frac{1}{2}$ 付近で十分に解析するために必要な条件である. (A3) はいくつかの L 関数に対しては既に証明されている. 実際に, Riemann ゼータ関数については Selberg [16], Dirichlet L 関数については Fujii [4], そして中心指標がユニタリーな $GL_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の cuspidal 表現の標準 L 関数に対しては Beckwith-Liu-Thorner-Zaharescu [1] により証明されている. また, (A3) は Riemann 予想を弱めたものだと考えることができる. もし F に対する Riemann 予想を仮定すれば, 任意の $\kappa_F > 0$ で (A3) は成り立つ.

最後に定理の主張を述べるための記号をいくつか準備する. 任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $\boldsymbol{V} = (V_1, \ldots, V_r) \in \mathbb{R}^r$ と仮定 $\mathscr{A}$ をみたす $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_r) \in (\mathcal{S}^\dagger)^r$ に対して,

$$\mathscr{S}(T, \boldsymbol{V}; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\theta}) \coloneqq \left\{ t \in [T, 2T] \ : \ \frac{\mathrm{Re}\, e^{-i\theta_j} \log F_j(\frac{1}{2} + it)}{\sqrt{\frac{n_{F_j}}{2} \log\log T}} > V_j \text{ for } j = 1, \ldots, r \right\}$$

と定義する. また $\vartheta_{\boldsymbol{F}} = \max_{1 \leq j \leq r} \vartheta_{F_j}$ で ϑ_{F_j} は (S4) のものとし, $\alpha_{\boldsymbol{F}} \coloneqq \min\{2r, \frac{1-2\vartheta_{\boldsymbol{F}}}{2\vartheta_{\boldsymbol{F}}}\}$ とする. そして $\|\boldsymbol{z}\| = \max_{1 \leq j \leq r} |z_j|$ とする. 記号の省略として, $\log_3 x = \log\log\log x$ と書く.

2.2 主結果

以下の定理は Bombieri-Hejhal [2] の極限定理 (2.1) を大偏差の意味で精密化するものである.

定理 3. 仮定 $\mathscr{A}$ をみたす $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_r) \in (\mathcal{S}^\dagger)^r$ をとる. また $A \geq 1$ とする. このとき, 十分大きな任意の T と $\|\boldsymbol{V}\| \leq A(\log\log T)^{1/10}$ をみたす任意の $\boldsymbol{V} = (V_1, \ldots, V_r) \in \mathbb{R}^r$ に対して,

$$\frac{1}{T} \mathrm{meas}(\mathscr{S}(T, \boldsymbol{V}; \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\theta})) = (1 + E) \prod_{j=1}^{r} \int_{V_j}^{\infty} e^{-u^2/2} \frac{du}{\sqrt{2\pi}},$$

が成り立つ. ここで, 誤差項 E は

$$E \ll_{\boldsymbol{F}, A} \frac{(\|\boldsymbol{V}\|^4 + (\log_3 T)^2)(\|\boldsymbol{V}\| + 1)}{\sqrt{\log\log T}} + \frac{\prod_{k=1}^{r}(1 + |V_k|)}{(\log\log T)^{\alpha_{\boldsymbol{F}} + \frac{1}{2}}}$$

をみたす.

この定理は Radziwiłł によって証明された, Riemann ゼータ関数の中心極限定理の大偏差に関する結果の一般化である. 実際に $r = 1$, $F_1 = \zeta$, $\theta_1 = 0$ とすれば彼の結果を得る.

次に, 筆者が [9] で証明した Riemann ゼータ関数の分布関数の上からの評価を一般化した結果を述べる. 以下の定理は L 関数のモーメントへ応用する際に重要となる.

定理 4. 定理 3 と同じ状況とする. このとき, 十分大きな任意の T とある定数 $a_1 = a_1(\boldsymbol{F}) > 0$ で

$\|\boldsymbol{V}\| \leq a_1\sqrt{\log\log T}$ をみたす任意の $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^r$ に対して,

$$\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}(\mathscr{S}(T,\boldsymbol{V};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta})) \leq (1+E)\exp\left(C\frac{\|\boldsymbol{V}\|^3+(\log_3 T)^{3/2}}{\sqrt{\log\log T}}\right)\prod_{j=1}^{r}\int_{V_j}^{\infty} e^{-u^2/2}\frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$

が $\boldsymbol{\theta} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^r$ のときに成り立ち,

$$\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}(\mathscr{S}(T,\boldsymbol{V};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta})) \geq (1-E)\exp\left(-C\frac{\|\boldsymbol{V}\|^3+(\log_3 T)^{3/2}}{\sqrt{\log\log T}}\right)\prod_{j=1}^{r}\int_{V_j}^{\infty} e^{-u^2/2}\frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$

が $\boldsymbol{\theta} \in [\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]^r$ のときに成り立つ. そして, E はある定数 $C = C(\boldsymbol{F}) > 0$ に対して不等式

$$E \leq C\frac{\prod_{k=1}^{r}(1+|V_k|+\|\boldsymbol{V}\|^2/\sqrt{\log\log T})}{(\log\log T)^{\alpha_{\boldsymbol{F}}+\frac{1}{2}}}$$

をみたす誤差項である.

もし L 関数の Riemann 予想, つまり全ての非自明零点の実部が $\frac{1}{2}$ であると仮定すると, 定理 4 を改善することができる. 以下の定理は Soundararajan [18] の結果の一般化である.

定理 5. 定理 3 と同じ状況であり, 加えて $F_1,\ldots,F_r$ が Riemann 予想をみたすと仮定する. このとき十分大きな任意の T とある正の定数 $a_2 = a_2(\boldsymbol{F})$ で $\|\boldsymbol{V}\| \leq a_2\sqrt{\log\log T}\log_3 T$ をみたす任意の $\boldsymbol{V} = (V_1,\ldots,V_r) \in \mathbb{R}^r$ に対して

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}(\mathscr{S}(T,\boldsymbol{V};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta}))\\ &\leq (1+E)\exp\left(C\frac{\|\boldsymbol{V}\|^3/\log((\|\boldsymbol{V}\|/\log_3 T)+3)+(\log_3 T)^{3/2}}{\sqrt{\log\log T}}\right)\prod_{j=1}^{r}\int_{V_j}^{\infty} e^{-u^2/2}\frac{du}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

が $\boldsymbol{\theta} \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^r$ のときに成り立ち,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{T}\,\mathrm{meas}(\mathscr{S}(T,\boldsymbol{V};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta}))\\ &\geq (1-E)\exp\left(-C\frac{\|\boldsymbol{V}\|^3/\log((\|\boldsymbol{V}\|/\log_3 T)+3)+(\log_3 T)^{3/2}}{\sqrt{\log\log T}}\right)\prod_{j=1}^{r}\int_{V_j}^{\infty} e^{-u^2/2}\frac{du}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

が $\boldsymbol{\theta} \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]^r$ のときに成り立つ. そして, E はある正の定数 $C = C(\boldsymbol{F})$ に対して評価

$$\begin{aligned}E \ll_{\boldsymbol{F}} &\exp\left(C\left(\frac{\|\boldsymbol{V}\|}{\sqrt{\log\log T}}\right)^{\frac{2-2\vartheta_{\boldsymbol{F}}}{1-2\vartheta_{\boldsymbol{F}}}}\right)\\ &\times\left\{\frac{\prod_{k=1}^{r}(1+|V_k|+\|\boldsymbol{V}\|^2/\log(\|\boldsymbol{V}\|+3)\sqrt{\log\log T})}{(\log\log T)^{\alpha_{\boldsymbol{F}}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{\log\log T}}\right\}\end{aligned}$$

をみたす誤差項である.

この定理で注目すべき点のひとつは, 大偏差の範囲が Ramanujan 予想に関連した定数 ϑ_F に依存するところである. 実際に, Ramanujan 予想を仮定すると $\alpha_{\boldsymbol{F}} = r$ となり十分大きくなるが, 一般の保型 L 関数に対しては $\alpha_{\boldsymbol{F}}$ は大きく取れない. 一方で $r = 1$ の場合には $\alpha_{\boldsymbol{F}}$ を大きく取る必要はないため, これは同時値分布を考えた際に発生する特有の問題である.

3 主結果の応用

この節で大偏差のモーメントへの応用を述べる．次の定理は定理 4 の応用として得られる．

定理 6. 仮定 $\mathscr{A}$ をみたす $\boldsymbol{F} = (F_1, \dots, F_r) \in (\mathcal{S}^\dagger)^r$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}^r$ をとる．定数 $h_{\boldsymbol{F}}$ を $h_{\boldsymbol{F}} = n_{F_1}^{-1} + \cdots + n_{F_r}^{-1}$ と定義する．このとき，ある正の定数 $a_3 = a_3(\boldsymbol{F})$, $B = B(\boldsymbol{F})$ が存在して，任意の固定された $0 < k \le a_3$ に対して，

$$\int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Re} e^{-\theta_j} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \ll_{\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} + Bk^3}$$

が $\boldsymbol{\theta} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^r$ のときに成り立つ．さらにもし $\vartheta_{\boldsymbol{F}} \le \frac{1}{r+1}$ であれば

$$\int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Re} e^{-i\theta_j} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \gg_{\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} - Bk^3}$$

が $\boldsymbol{\theta} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]^r$ のときに成り立つ．特に，もし $\vartheta_{\boldsymbol{F}} \le \frac{1}{r+1}$ なら，任意の固定された $0 < k \le a_3$ に対して，

$$\int_T^{2T} \left(\min_{1\le j\le r} |F_j(\tfrac{1}{2}+it)|\right)^{2k} dt \ll_{\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} + Bk^3}$$

$$\int_T^{2T} \left(\max_{1\le j\le r} |F_j(\tfrac{1}{2}+it)|\right)^{-2k} dt \gg_{\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} - Bk^3}$$

$$T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} - Bk^3} \ll_{\boldsymbol{F}} \int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Im} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \ll_{\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} + Bk^3}$$

$$T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} - Bk^3} \ll_{\boldsymbol{F}} \int_T^{2T} \exp\left(-2k \max_{1\le j\le r} \operatorname{Im} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \ll_{\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} + Bk^3}$$

が成り立つ．

この定理は定理 4 を次の等式

$$\begin{aligned}
&\int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Re} e^{-\theta_j} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2k e^{2kV} \operatorname{meas} \mathscr{S}\left(T, \left(V\sqrt{\tfrac{n_{F_1}}{2} \log\log T}, \dots, V\sqrt{\tfrac{n_{F_r}}{2} \log\log T}\right); \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\theta}\right) dV.
\end{aligned}$$

に適用し，鞍点法を用いて計算することで得られる．このとき鞍点は $V \asymp \sqrt{\log\log T}$ にあり，この V の範囲での分布関数の評価が重要となる．実際に，もし $V \asymp \sqrt{\log\log T}$ の場合に，$E = O(1)$ であることを証明できればより良い評価を得ることができる．これは Riemann 予想を仮定した定理 5 でも到達できていない評価だが，定理 5 で得られた評価でも以下のような興味深い評価を得ることができる．

定理 7. 定理 5 と同じ状況とする．このとき，ある正の数 $B = B(\boldsymbol{F})$ が存在して，任意の $k > 0$ と十分大きな任意の T に対して，

$$\int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Re} e^{-\theta_j} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \ll_{k,\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} + Bk^3/\log_3 T}$$

が $\boldsymbol{\theta} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^r$ のときに成り立つ．また，$\boldsymbol{\theta} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]^r$ であり $\vartheta_{\boldsymbol{F}} < \frac{1}{r+1}$ が成り立つなら，

$$\int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Re} e^{-\theta_j} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \gg_{k,\boldsymbol{F}} T + T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}} - Bk^3/\log_3 T}$$

を得る．特に，$\vartheta_{\boldsymbol{F}} < \frac{1}{r+1}$ が成り立つなら

$$\int_T^{2T} \left(\min_{1\le j\le r} |F_j(\tfrac{1}{2}+it)|\right)^{2k} dt \ll_{\varepsilon,k,\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}+\varepsilon},$$

$$\int_T^{2T} \left(\max_{1\le j\le r} |F_j(\tfrac{1}{2}+it)|\right)^{-2k} dt \gg_{\varepsilon,k,\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}-\varepsilon},$$

$$T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}-\varepsilon} \ll_{\varepsilon,k,\boldsymbol{F}} \int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Im} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \ll_{\varepsilon,k,\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}+\varepsilon},$$

$$T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}-\varepsilon} \ll_{\varepsilon,k,\boldsymbol{F}} \int_T^{2T} \exp\left(-2k \max_{1\le j\le r} \operatorname{Im} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \ll_{\varepsilon,k,\boldsymbol{F}} T(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}+\varepsilon}$$

を得る．

ここで得られた結果は真なる評価と近いものであると筆者は期待する．実際に筆者は次の評価

$$\int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Re} e^{-i\theta_j} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \asymp_{k,\boldsymbol{F}} T \frac{(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}}}{(\log\log T)^{(r-1)/2}}$$

が成り立つと期待している．これは Dirichlet 多項式のモーメントの評価 (4.4) から来る期待である．これに関連して筆者は，以下のふたつの問題が L 関数の独立性と関連して興味深いと考えている．

問題 3. 以下の評価

$$\int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Re} e^{-i\theta_j} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \ll_k T \frac{(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}}}{(\log\log T)^{(r-1)/2}}.$$

を Harper [6] の方法を用いて証明することができるか．

問題 4. Keating-Snaith [11] と同様にランダム行列を用いて，明示的な表示をもつ正の定数 $C(k,\boldsymbol{F})$ で漸近式

$$\int_T^{2T} \exp\left(2k \min_{1\le j\le r} \operatorname{Re} e^{-i\theta_j} \log F_j(\tfrac{1}{2}+it)\right) dt \sim C(k,\boldsymbol{F}) T \frac{(\log T)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}}}{(\log\log T)^{(r-1)/2}}$$

を推察することができるか．

問題 3 は Harper の方法を単純に一般化することで得られる結果ではない. Harper の方法は Dirichlet 多項式を $[T,2T]$ を適切な小区間に分割し, その小区間上で素数の独立性を用いて非自明な評価を得る, というものである. 一方で, Dirichlet 多項式の最小値はもちろん Dirichlet 多項式とはならないので, そのような計算をすることは単純にはできない.

問題 4 は L 関数の数論的な独立性と零点の独立性が必要となることが推測される. 数論的独立性は Selberg の直交性予想 (A2) によって定式化されている. 一方で, 零点をランダム行列でモデル化した際に, これに相当する適切なランダム行列に関する独立性が必要であることが推測される. この零点の独立性の定式化も含めて問題 4 は考察する価値のある問題であると筆者は期待する.

4 Dirichlet 多項式の多次元中心極限定理

節 2.2 で述べた L 関数の多次元中心極限定理は Dirichlet 多項式の同時分布を調べることで得られる. 最後に節 2.2 の結果の証明の鍵となる命題を述べて本稿を締めくくりたい. まずその主張を述べる前にいくつかの定義を準備する.

仮定 (S4) をみたす Dirichlet 級数 F に対して, 一般 von Mangoldt 関数 $\Lambda_F(n)$ を $\Lambda_F(n) = b_F(n)\log n$ と定義する. また $\log F$ に対応する Dirichlet 多項式 $P_F(s,X)$ を

$$P_F(s,X) \coloneqq \sum_{p^\ell \le X} \frac{b_F(p^\ell)}{p^{\ell s}} = \sum_{2\le n\le X} \frac{\Lambda_F(n)}{n^s \log n}$$

と定義する. このとき, $P_F(s,X)$ の分散 $\sigma_F(X)$ は

$$\sigma_F(X) \coloneqq \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{p\le X}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{|b_F(p^\ell)|^2}{p^\ell}}$$

と定義される. 以下, $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_r) \in \mathbb{R}^r$, $\boldsymbol{z} = (z_1,\dots,z_r) \in \mathbb{C}^r$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_r) \in \mathbb{R}^r$ とし, $\boldsymbol{F} = (F_1,\dots,F_r)$ を r 個の Dirichlet 級数の組とする. そして $\boldsymbol{F}$ の各成分 F_j が (S4) をみたすとき,

$$\tau_{j_1,j_2}(X) = \tau_{j_1,j_2}(X;\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta}) \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{p\le X}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re} e^{-i\theta_{j_1}} b_{F_{j_1}}(p^\ell)\overline{e^{-i\theta_{j_2}} b_{F_{j_2}}(p^\ell)}}{p^\ell},$$

$$K_{\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta}}(p,\boldsymbol{z}) \coloneqq \sum_{1\le j_1,j_2\le r} z_{j_1} z_{j_2} \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re} e^{-i\theta_{j_1}} b_{F_{j_1}}(p^\ell)\overline{e^{-i\theta_{j_2}} b_{F_{j_2}}(p^\ell)}}{p^\ell},$$

$$\mathscr{S}_X(T,\boldsymbol{V};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta}) \coloneqq \left\{ t\in[T,2T] \ :\ \frac{\operatorname{Re} e^{-i\theta_j} P_{F_j}(\frac{1}{2}+it,X)}{\sigma_{F_j}(X)} > V_j \text{ for } j=1,\dots,r \right\}$$

と定義する. 素数全体の集合を $\mathcal{P}$ として, $\{\mathcal{X}(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$ をある確率空間 $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ 上の確率変数で独立かつ $\mathbb{C}$ 上の単位円周上で一様分布なものとする. このとき, $M_p(\boldsymbol{z})$ を

$$M_p(\boldsymbol{z}) = M_p(\boldsymbol{z};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta}) \coloneqq \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{r} z_j \operatorname{Re} e^{-i\theta_j}\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{b_{F_j}(p^\ell)\mathcal{X}(p)^\ell}{p^{\ell/2}}\right)\right]$$

と定義する．ただし, $\mathbb{E}[]$ は期待値である．最後に, $\boldsymbol{F}$ の各成分 F_j が (A1), (S4), (S5) をみたすとき,

$$\Xi_X(\boldsymbol{x}) = \Xi_X(\boldsymbol{x};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta}) := \exp\left(\sum_{1\le j_1<j_2\le r} x_{j_1}x_{j_2}\tau_{j_1,j_2}(X)\right)\prod_p \frac{M_p(\boldsymbol{x})}{\exp\left(K_{\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta}}(p,\boldsymbol{x})/4\right)}$$

と定義する．

このとき, 我々は次の命題を証明することができる．

命題 1. (S4), (S5), (A1), (A2) をみたす r 個の Dirichlet 級数の組 $\boldsymbol{F} = (F_1,\dots,F_r)$ と $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^r$ をとる．また T, X を $X^{(\log\log X)^{4(r+1)}} \le T$ をみたす十分大きな任意の数とする．このとき $\|\boldsymbol{V}\| \le (\log\log X)^{2r}$ をみたす任意の $\boldsymbol{V} = (V_1,\dots,V_r) \in (\mathbb{R}_{\ge 0})^r$ に対して,

$$\frac{1}{T}\operatorname{meas}(\mathscr{S}_X(T,\boldsymbol{V};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta})) = (1+E)\times \Xi_X\left(\tfrac{V_1}{\sigma_{F_1}(X)},\dots,\tfrac{V_r}{\sigma_{F_r}(X)}\right)\prod_{j=1}^r\int_{V_j}^\infty e^{-u^2/2}\frac{du}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.1}$$

が成り立つ．ただし, E はある正の定数 $C = C(\boldsymbol{F})$ に対して

$$E \ll_{\boldsymbol{F}} \exp\left(C\left(\frac{\|\boldsymbol{V}\|}{\sqrt{\log\log X}}\right)^{\frac{2-2\vartheta_{\boldsymbol{F}}}{1-2\vartheta_{\boldsymbol{F}}}}\right)\left\{\frac{\prod_{k=1}^r(1+V_k)}{(\log\log X)^{\alpha_{\boldsymbol{F}}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\log\log X}}\right\} \tag{4.2}$$

をみたす．さらに $\|\boldsymbol{V}\| \le (\log\log X)^{2r}$ をみたす任意の $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^r$ に対して,

$$\frac{1}{T}\operatorname{meas}(\mathscr{S}_X(T,\boldsymbol{V};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta})) \asymp (1+E)\times \Xi_X\left(\tfrac{\max\{0,V_1\}}{\sigma_{F_1}(X)},\dots,\tfrac{\max\{0,V_r\}}{\sigma_{F_r}(X)}\right)\prod_{j=1}^r\int_{V_j}^\infty e^{-u^2/2}\frac{du}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.3}$$

が成り立つ．ここで, E は (4.2) と同じ評価を保つ．

この命題は Radziwiłł [15, Proposition 2] を一般化かつ精密化するものである．加えて彼の証明にはいくつかの議論不足な点があるが, 我々の証明ではそこを補完していることに注意したい．

命題 1 は, 問題 2 の Dirichlet 多項式類似に対する答えを与える．実際に Ξ_X の挙動から ([10, Lemma 4.7] 参照), $\|\boldsymbol{V}\| = o(\sqrt{\log\log X})$ のときに Dirichlet 多項式の分布は正規分布に従い, $\sqrt{\log\log X} \ll \|\boldsymbol{V}\| \le (\log\log X)^{2r}$ のときには正規分布に従わないことがわかる．

また, (4.1) では $\boldsymbol{V} \in (\mathbb{R}_{\ge 0})^r$ となっているが, これが $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^r$ とすると成り立たないことがわかっている．例えば, $r = 1$, $F_1 = \zeta$ として, $V_1 = -\sqrt{\log\log X \log_3 X}$ とすると, (4.1) の左辺は $\gg 1$ だが, 右辺が $= o(1)$ となることが証明できる．よって, $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^r$ の場合は (4.3) のように形を変形している．

上記の命題の $\boldsymbol{V}$ の範囲では E が大きくなることがある．その際に, (4.1), (4.3) の下からの評価は分布関数が負以上であることを主張する自明な評価となる．一方で, E が大きな場合でも上からの評価は非自明である．特に, Ξ_X の挙動に注意することで ([10, Lemma 4.7] 参照), Ramanujan 予想下であれば, $\|\boldsymbol{V}\| \ge C\sqrt{\log\log X\log_3 X}$ のとき,

$$\frac{1}{T}\operatorname{meas}(\mathscr{S}_X(T,\boldsymbol{V};\boldsymbol{F},\boldsymbol{\theta})) = o\left(\prod_{j=1}^r\int_{V_j}^\infty e^{-u^2/2}\frac{du}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

となることがわかる.

最後に命題 1 の応用として, 以下の Dirichlet 多項式のモーメントに関する結果を述べる. これは, [5], [7] で得られた結果の一部を一般化するものである.

定理 8. (S4), (S5), (A1), (A2) をみたす r 個の Dirichlet 級数 $\boldsymbol{F}=(F_1,\dots,F_r)$ と $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^r$ をとる. また, $\vartheta_{\boldsymbol{F}}^{*}=\min_{1\le j\le r}\vartheta_{F_j}$ とおく. さらに $\vartheta_{\boldsymbol{F}}<\frac{1}{r+1}$ と強い Selberg 直交性予想

$$\sum_{n\le X}\frac{a_{F_i}(p)\overline{a_{F_j}(p)}}{p}=\delta_{F_i,F_j}n_{F_j}\log\log X+e_{i,j}+o(1),\quad X\to+\infty$$

を仮定する. ここで δ_{F_i,F_j} は Kronecker のデルタ関数で, $e_{i,j}$ は F_i,F_j のみに依存するある定数である. このとき, 任意の $k>0$ に対して, ある正の定数 $c_1=c_1(k,\boldsymbol{F})$, $c_2=c_2(k,\boldsymbol{F})$ が存在して, 十分大きな任意の T に対して $X\le\max\{c_1(\log T\log\log T)^{\frac{2}{1+2\vartheta_{\boldsymbol{F}}^{*}}},c_2\frac{(\log T)^2\log\log T}{\log_3 T}\}$, であるとき,

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T}\exp\left(2k\min_{1\le j\le r}\operatorname{Re}e^{-i\theta_j}\sum_{2\le n\le X}\frac{\Lambda_{F_j}(n)}{n^{1/2+it}\log n}\right)dt\sim C(\boldsymbol{F},k,\boldsymbol{\theta})\frac{(\log X)^{k^2/h_{\boldsymbol{F}}}}{(\log\log X)^{(r-1)/2}} \tag{4.4}$$

が $X\to+\infty$ で成り立つ.

謝辞

この講究録は 2021 年度 RIMS 研究集会で筆者が発表した内容に基づくものである. その発表を快く受け入れて頂いた研究集会代表者である赤塚広隆先生, そして副代表者である山崎義徳先生にこの場を借りて深くお礼申し上げます.

参考文献

[1] O. Beckwith, D. Liu, J. Thorner and A. Zaharescu, A zero density estimate and fractional imaginary parts of zeros for GL_2 L-functions, preprint, `arXiv:2103.01956`.
[2] E. Bombieri and D. A. Hejhal, On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products, *Duke Math. J.* **80** no.3 (1995), 821–862.
[3] D. W. Farmer, S. M. Gonek, and C. P. Hughes, The maximum size of L-functions, *J. Reine Angew. Math.* **609** (2007), 215–236.
[4] A. Fujii, On the zeros of Dirichlet L-functions. I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **196** (1974), 225–235.
[5] S. M. Gonek, C. P. Hughes, and J. P. Keating, A hybrid Euler-Hadamard product for the Riemann zeta-function, *Duke Math. J.* no.3 **136** (2007), 507–549.
[6] A. J. Harper, Sharp conditional bounds for moments of the Riemann zeta function, preprint, `arXiv:1305.4618`.
[7] W. Heap, On the splitting conjecture in the hybrid model for the Riemann zeta-function, preprint, `arXiv:2102.02092`.
[8] A. E. Ingham, On the difference between consecutive primes, *Quart. J. Math.* **8** (1937), 255–266.
[9] S. Inoue, On the logarithm of the Riemann zeta-function and its iterated integrals, preprint, `arXiv:1909.03643`.
[10] S. Inoue and J. Li, Joint value distribution of L-functions on the critical line, preprint, `arXiv:2102.12724`.

[11] J. P. Keating and N. C. Snaith, Random matrix theory and $\zeta(1/2+it)$, *Comm. Math. Phys.* **214** (2000), 91–110.
[12] H. Kim, Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2. With appendix 1 by D. Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and P. Sarnak, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no.1, 139–183.
[13] W. Luo, Z. Rudnick, and P. Sarnak, On Selberg's eigenvalue conjecture, *Geom. Funct. Anal.* **5**, no. 2 (1995), 387–401.
[14] J. Najnudel, Exponential moments of the argument of the Riemann zeta function on the critical line, *Mathematika* **66** (2020), 612–621.
[15] M. Radziwiłł, Large deviations in Selberg's central limit theorem, `arXiv:1108.5092`.
[16] A. Selberg, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, Avhandl. Norske Vid.-Akad. Olso I. Mat.-Naturv. Kl., no.1; Collected Papers, Vol. 1, New York: Springer Verlag. 1989, 214–280.
[17] A. Selberg, Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory*, 367–385, 1992.
[18] K. Soundararajan, Moments of the Riemann zeta-function, *Ann. of Math.* (2) **170** (2009), 981–993.
[19] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Second Edition, Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.