On a unified double zeta function of Mordell-Tornheim type

門田 慎也 (新居浜工業高等専門学校)
Shin-ya Kadota (Niihama College)
岡本 卓也 (豊橋科学技術大学)
Takuya Okamoto (Toyohashi University of Technology)
小野 正隆 (早稲田大学)
Masataka Ono (Waseda University)
田坂 浩二 (愛知県立大学)
Koji Tasaka (Aichi Prefectural University)

Abstract

本稿では, 2022 年 10 月 11 日 (火) から 14 日 (金) まで行われた研究集会「解析的整数論とその周辺」において講演した「On a unified double zeta function of Mordell-Tornheim type」の内容およびその後得られた結果について報告する.

1 主結果

いきなりだが, 講演で紹介した 2 つの主結果について述べたい. $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3$ に対して, Mordell–Tornheim 型二重ゼータ関数 $\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3)$ を次で定める：

$$\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3) := \sum_{m,n \geq 1} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}}.$$

この級数は, $\Re(s_1+s_3), \Re(s_2+s_3) > 1, \Re(s_1+s_2+s_3) > 2$ において絶対収束する. また, 松本 [9] は $\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3)$ が $\mathbb{C}^3$ 全体へ有理型に解析接続されることを示し, true singularities も決定した. 具体的には以下のとおりである.

$$\begin{aligned} S &:= \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3 \mid s_1 + s_2 + s_3 = 2\}, \\ S_{i,j} &:= \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3 \mid s_i + s_j - 1 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\} \quad (1 \leq i < j \leq 3) \end{aligned}$$

としたとき, $\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3)$ の特異点は $S \cup S_{1,3} \cup S_{2,3}$ 上にのみ位置しており, $S \cup S_{1,3} \cup S_{2,3}$ 上の点はすべて $\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3)$ の特異点となっている. タイトルにある Mordell–Tornheim

型 unified 二重ゼータ関数 $\omega_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3)$ は, $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3$ に対して次のように定義される：

$$\omega_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3) := (-1)^{s_1}\zeta_{MT}(s_2, s_3; s_1) + (-1)^{s_2}\zeta_{MT}(s_1, s_3; s_2) + (-1)^{s_3}\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3).$$

ただし, $(-1)^s = e^{\pi i s}$ である. $\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3)$ の特異点の情報から $\omega_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3)$ の特異点の候補は $S \cup S_{1,2} \cup S_{1,3} \cup S_{2,3}$ 上に位置していることがわかる. ところが, $S_{1,2}$ 上の点は $\zeta_{MT}(s_2, s_3; s_1)$ と $\zeta_{MT}(s_1, s_3; s_2)$ に由来するものであり, 打消し合いが起きている可能性があるため, 本当に特異点であるかを確かめる必要がある. 1つ目の主結果は $\omega_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3)$ の特異点に関するものである.

Theorem 1.1. $S \cup S_{1,2} \cup S_{1,3} \cup S_{2,3}$ 上の点はすべて $\omega_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3)$ の特異点である.

さらに, これらの特異点は不確定点となっているため, 極限値は極限のとり方に依存する. 2つ目の主結果は, 非正整数点において特定の極限のとり方をしたときの極限値に関するものである.

Theorem 1.2. $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ と $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$ なる $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$ に対して次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon_\alpha \to 0} \lim_{\varepsilon_\beta \to 0} \lim_{\varepsilon_\gamma \to 0} \omega_{\mathcal{U}}(-m_1 + \varepsilon_1, -m_2 + \varepsilon_2, -m_3 + \varepsilon_3) = \begin{cases} 1 & , (m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 0), \\ 0 & , (m_1, m_2, m_3) \neq (0, 0, 0). \end{cases}$$

2 背景

研究の背景にある金子–Zagier 予想を説明するための準備を行う.

2.1 Euler–Zagier 型

金子–Zagier 予想を説明するために多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$, 有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, 対称多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ を導入する. まずは, 多重ゼータ値を導入する. $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, 正の整数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}_{>0}^r$ をインデックスと呼ぶ. ただし, $r = 0$ の場合は空インデックスと呼び $\varnothing$ と表す. また, インデックス全体の集合を $\mathbb{I}^+$ と書くことにする. このとき, インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{I}^+$ と $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$H_n(\mathbf{k}) := \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r < n} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

と定める. ただし, 空和は 0 とする. $k_r > 1$ であれば, $n \to \infty$ としたとき $H_n(\mathbf{k})$ は収束し, その極限値を多重ゼータ値 (特に, Euler–Zagier 型多重ゼータ値) という. つまり, $k_r > 1$ なるインデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{I}^+$ に対して多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ を次で定める：

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{k}) &:= \lim_{n \to \infty} H_n(\mathbf{k}) \\ &= \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}} \end{aligned}$$

多重ゼータ値が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を $\mathcal{Z}$ と書く. $\mathcal{Z}$ は $\mathbb{Q}$ 代数になることが知られている.

続いて, 有限多重ゼータ値を導入する. $\mathcal{A} := \left(\prod_{p:\mathrm{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)/\left(\bigoplus_{p:\mathrm{prime}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$ としたとき, インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{I}^+$ に対して, 有限多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ を次で定める [7] :

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) &:= (H_p(\mathbf{k}) \mod p)_p \\ &= \left(\sum_{0<n_1<\cdots<n_r<p} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \mod p\right)_p \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

最後に, 対称多重ゼータ値を導入する. まず, インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{I}^+$ に対して,

$$\zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^{k_{i+1}+\cdots+k_r} \zeta^{ш}(k_1, \ldots, k_i)\zeta^{ш}(k_r, \ldots, k_{i+1})$$

とする. ただし, $\zeta^{ш}(k_1, \ldots, k_r)$ はシャッフル正規化多重ゼータ値と呼ばれるものであり, $k_r = 1$ でも扱える対象である. また, $\zeta^{ш}(k_1, \ldots, k_r) \in \mathcal{Z}$ であることが知られている [4]. そして, インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{I}^+$ に対して, 対称多重ゼータ値 $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ は, 以下で定義される :

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) := \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}) \mod \zeta(2)\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z}.$$

このとき, 金子–Zagier 予想は, 次を主張している.

Conjecture 2.1. $\mathbb{Q}$ の有限集合 $\{a_{\mathbf{k}} \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}^+\}$ に対して,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{I}^+} a_{\mathbf{k}}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = 0 \overset{?}{\iff} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{I}^+} a_{\mathbf{k}}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) = 0.$$

ここで, 有限多重ゼータ値の定義を思い返すと, $H_p(\mathbf{k})$ は有限和であるから多重ゼータ値と異なり収束性を気にする必要は無く, 整数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対して $\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ を定義することができる. そこで, $\mathbb{I} := \bigcup_{r\geq 0} \mathbb{Z}^r$ とおくと, $\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ も $\mathbf{k} \in \mathbb{I}$ に対して定義できないか, と考えたくなる. そこで, 小森は $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して次の unified 多重ゼータ関数 $\zeta_{\mathcal{U}}(\mathbf{s})$ を導入した [8] :

$$\zeta_{\mathcal{U}}(\mathbf{s}) := \sum_{i=0}^{r} (-1)^{s_{i+1}+\cdots+s_r} \zeta(s_1, \ldots, s_i)\zeta(s_r, \ldots, s_{i+1}),$$

ただし, $(-1)^s = e^{\pi i s}$ であり, 右辺に現れる $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ は多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_r)$ の各 k_i を複素変数 s_i に置き換えたものである. $\zeta(s_1, \ldots, s_r)$ は特異点を持つため [1, 11, 14], $\zeta_{\mathcal{U}}(\mathbf{s})$ も特異点を持つことが予想される. ところが, 驚くべきことに $\zeta_{\mathcal{U}}(\mathbf{s})$ は整関数であることが小森によって証明された [8]. また, 小森は $\mathbf{k} \in \mathbb{I}^+$ に対して, $\zeta_{\mathcal{U}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{Z}[\pi i], \zeta_{\mathcal{U}}(\mathbf{k}) \equiv \zeta_{\mathcal{S}}^{ш}(\mathbf{k}) \mod \pi i\mathcal{Z}[\pi i]$ となることを示した. その後, 小野–山本 [13] によって $\zeta_{\mathcal{U}}(\mathbf{k}) \in \mathcal{Z}[\pi i]$ ($\mathbf{k} \in \mathbb{I}$) が示された. そこで, $\mathbf{k} \in \mathbb{I}$ に対して

$$\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) := \zeta_{\mathcal{U}}(\mathbf{k}) \mod \pi i\mathcal{Z}[\pi i]$$

と定める. これで, 金子–Zagier 予想における $\mathbb{I}^+$ を $\mathbb{I}$ に置き換えた次の問題を考えることができる.

Question 2.2. $\mathbb{Q}$ の有限集合 $\{a_{\mathbf{k}} \in \mathbb{Q} \mid \mathbf{k} \in \mathbb{I}\}$ に対して,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{I}} a_{\mathbf{k}}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = 0 \overset{?}{\iff} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{I}} a_{\mathbf{k}}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) = 0.$$

この問題に対して, すでに部分的な解答は得られている.

Theorem 2.3 (小森 [8]). $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r_{\leq 0}$ に対して

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \begin{cases} ((-1)^r)_p & ,(k_1, \ldots, k_r) = (0, \ldots, 0), \\ (0)_p & ,(k_1, \ldots, k_r) \neq (0, \ldots, 0) \end{cases}$$

および

$$\zeta_{\mathcal{U}}(\mathbf{k}) = \begin{cases} (-1)^r & ,(k_1, \ldots, k_r) = (0, \ldots, 0), \\ 0 & ,(k_1, \ldots, k_r) \neq (0, \ldots, 0). \end{cases}$$

が成り立つ.

この結果から, 上記問題において $\mathbb{I}$ を $\bigcup_{r\geq 0} \mathbb{Z}^r_{\leq 0}$ に置き換えた問題に対しては, 同値性が成り立つことが分かる.

ところで, 多重ゼータ値には類似物として Mordell–Tornheim 型多重ゼータ値と呼ばれるものが存在する. Bachmann–竹山–田坂 [2] は金子–Zagier 予想の Mordell–Tornheim 型類似を与えた.

2.2 Mordell–Tornheim 型

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{I}^+$ に対して, Mordell–Tornheim 型多重ゼータ値 $\zeta_{MT}(\mathbf{k})$ を次で定める：

$$\begin{aligned} \zeta_{MT}(\mathbf{k}) &= \zeta_{MT}(k_1, \ldots, k_{r-1}; k_r) \\ &:= \sum_{n_1,\ldots,n_{r-1}>0} \frac{1}{n_1^{k_1} \ldots n_{r-1}^{k_{r-1}} (n_1 + \cdots + n_{r-1})^{k_r}}. \end{aligned}$$

Mordell–Tornheim 型多重ゼータ値は Euler–Zagier 型多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$-線形結合として表されることが知られている. つまり $\zeta_{MT}(\mathbf{k}) \in \mathcal{Z}$ である [3].

続いて, Mordell–Tornheim 型有限多重ゼータ値を導入する. インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{I}^+$ と $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$\omega_n(\mathbf{k}) := \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r>0 \\ n_1+\cdots+n_r=n}} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

と定める．そして, $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{I}^+$ $(r\neq 1)$ に対して Mordell–Tornheim 型有限多重ゼータ値 $\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ を次で定める：

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) &:= (\omega_p(\mathbf{k}) \mod p)_p \\ &= \left(\sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r\geq 1\\ n_1+\cdots+n_r=p}} \frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} \mod p\right)_p \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

本稿では, これを有限多重オメガ値と呼ぶことにする．

Remark 2.4. Mordell–Tornheim 型有限多重ゼータ値は最初, 鎌野 [6] により $\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ とは異なる形で導入された．しかし, それと $\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ は高々符号の違いしかないことに注意しておく．

そして, インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{I}^+$ に対して, Mordell–Tornheim 型対対称重ゼータ値 $\omega_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ を次で定める：

$$\omega_{\mathcal{S}}(\mathbf{k}) := \sum_{i=1}^{r}(-1)^{k_i}\zeta_{MT}(k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots k_r;k_i) \mod \zeta(2)\mathcal{Z}.$$

本稿では, これを対称多重オメガ値と呼ぶことにする．これで, 金子–Zagier 予想の Mordell–Tornheim 型類似を考えることができる．

Conjecture 2.5. $\mathbb{Q}$ の有限集合 $\{a_{\mathbf{k}}\in\mathbb{Q} \mid \mathbf{k}\in\mathbb{I}^+\}$ に対して,

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{I}^+} a_{\mathbf{k}}\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=0 \overset{?}{\iff} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{I}^+} a_{\mathbf{k}}\omega_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})=0.$$

この予想に関連した結果として, 次が得られている．

Theorem 2.6 (Bachmann–竹山–田坂 [2])**.** $\mathbf{k}\in\mathbb{I}^+$ に対して,

$$\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{l}} c_{\mathbf{l}}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{l}),\quad \omega_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})=\sum_{\mathbf{l}} c_{\mathbf{l}}\zeta_{\mathcal{S}}(\mathbf{l})$$

が成り立つ．ただし, 和は $\mathbf{k}$ から定まるインデックス $\mathbf{l}$ にわたり, $c_{\mathbf{l}}$ は $\mathbf{l}$ から定まる整数である．

この結果から, 金子–Zagier 予想が正しければ, 金子–Zagier 予想の Mordell–Tornheim 型類似も成り立つことが分かる．

ここで, $\omega_{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ の定義を思い返すと, Euler–Zagier 型と同じように収束性を気にする必要はなく, $\mathbf{k}\in\mathbb{I}$ に対して定義することができる．そこで, $\mathbf{k}\in\mathbb{I}$ に対して $\omega_{\mathcal{S}}(\mathbf{k})$ を定義するために次の関数を導入する．$\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_r)\in\mathbb{C}^r$ に対して, unified 多重オメガ関数 $\omega_{\mathcal{U}}(\mathbf{s})$ を次で定める：

$$\omega_{\mathcal{U}}(\mathbf{s}) := \sum_{i=1}^{r}(-1)^{s_i}\zeta_{MT}(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots s_r;s_i).$$

Euler–Zagier 型と同様, $\zeta_{MT}(s_1,\ldots,s_{r-1};s_r)$ も特異点を持つため [10, 12], $\omega_{\mathcal{U}}(\mathbf{s})$ も特異点を持つことが予想される．今回, 我々は $r=3$ の場合を考え得られたのが主結果である．

Theorem 1.1 (再掲)**.**

$$S = \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3 \mid s_1 + s_2 + s_3 = 2\},$$
$$S_{i,j} = \{(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3 \mid s_i + s_j - 1 \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\} \quad (1 \leq i < j \leq 3)$$

としたとき,

$$\omega_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3) := (-1)^{s_1}\zeta_{MT}(s_2, s_3; s_1) + (-1)^{s_2}\zeta_{MT}(s_1, s_3; s_2) + (-1)^{s_3}\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3).$$

の特異点はすべて $S \cup S_{1,2} \cup S_{1,3} \cup S_{2,3}$ 上にあり, $S \cup S_{1,2} \cup S_{1,3} \cup S_{2,3}$ 上の点はすべて $\omega_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3)$ の特異点である.

Theorem 1.2 (再掲)**.** $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ と $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$ なる $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$ に対して次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon_\alpha \to 0} \lim_{\varepsilon_\beta \to 0} \lim_{\varepsilon_\gamma \to 0} \omega_{\mathcal{U}}(-m_1 + \varepsilon_1, -m_2 + \varepsilon_2, -m_3 + \varepsilon_3) = \begin{cases} 1 & ,(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 0), \\ 0 & ,(m_1, m_2, m_3) \neq (0, 0, 0). \end{cases}$$

残念なことに unified 多重ゼータ関数とは異なり, $\omega_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3)$ は整関数ではなかった. ところが, $\omega_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3)$ の定義における因子 $(-1)^{s_i}$ を $C(s_i) := \frac{(-1)^{s_i} + (-1)^{-s_i}}{2}$ に置き換えた関数

$$\widetilde{\omega}_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3) := C(s_1)\zeta_{MT}(s_2, s_3; s_1) + C(s_2)\zeta_{MT}(s_1, s_3; s_2) + C(s_3)\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3)$$

を考えてみると, 負の整数点における極限値は変わらず, なんと $S_{1,2} \cup S_{1,3} \cup S_{2,3}$ 上の特異点は解消されるのである!!

Theorem 2.7. $\widetilde{\omega}_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3)$ の特異点はすべて S 上に位置しており, S 上の点はすべて $\widetilde{\omega}_{\mathcal{U}}(s_1, s_2, s_3)$ の特異点である. また, $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ と $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$ なる $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$ に対して次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon_\alpha \to 0} \lim_{\varepsilon_\beta \to 0} \lim_{\varepsilon_\gamma \to 0} \widetilde{\omega}_{\mathcal{U}}(-m_1 + \varepsilon_1, -m_2 + \varepsilon_2, -m_3 + \varepsilon_3) = \begin{cases} 1 & ,(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 0), \\ 0 & ,(m_1, m_2, m_3) \neq (0, 0, 0). \end{cases}$$

Remark 2.8. 上記, 因子の置き換えは小森先生により提案された.

3　その後

$\zeta_{MT}(s_1, s_2; s_3)$ の拡張として, 次の関数が考えられる. $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{C}^3$ に対して,

$$\zeta_{a,b}(s_1, s_2; s_3) := \sum_{m,n>0} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (am + bn)^{s_3}}$$

と定め, さらに

$$\omega_{\mathcal{U},a,b}(s_1,s_2,s_3):=C(s_3)a^{s_3}\zeta_{a,b}(s_1,s_2;s_3)+C(s_2)a^{s_2}\zeta_{a,b}(s_3,s_1;s_2)+C(s_1)a^{s_1}\zeta_{a,b}(s_2,s_3;s_1)$$

と定める. ここで, 右辺第 2 項は, $\zeta_{MT}(\mathbf{k})$ の変数の対称を用いて $\omega_{\mathcal{U}}(s_1,s_2,s_3)$ の定義式における右辺第 2 項を $\zeta_{MT}(s_1,s_3;s_2)=\zeta_{MT}(s_3,s_1;s_2)$ と変形した後に拡張したとみなすことに注意. 最後に, 講演中にはお話しできなかった $\omega_{\mathcal{U},a,b}(s_1,s_2,s_3)$ に関して得られた結果を紹介して本稿を終えたいと思う. 証明については, 我々の論文 [5] と同様の手法であるので, ここでは割愛する.

Theorem 3.1. $\omega_{\mathcal{U},a,b}(s_1,s_2,s_3)$ の特異点の候補はすべて $S\cup S_{1,2}\cup S_{1,3}\cup S_{2,3}$ 上にあり, $S\cup S_{1,2}\cup S_{1,3}\cup S_{2,3}$ 上の点はすべて $\omega_{\mathcal{U},a,b}(s_1,s_2,s_3)$ の特異点である.

Theorem 3.2. $(m_1,m_2,m_3)\in\mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ と $\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}$ なる $\alpha,\beta,\gamma\in\{1,2,3\}$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon_\alpha\to 0}\lim_{\varepsilon_\beta\to 0}\lim_{\varepsilon_\gamma\to 0}\omega_{\mathcal{U},a,b}(-m_1+\varepsilon_1,-m_2+\varepsilon_2,-m_3+\varepsilon_3)\\&=\sum_{j=0}^{2}\left((-1)^{m_{1+j}+m_{2+j}}\left(\frac{b}{a}\right)^{M_j(\alpha,\beta,\gamma)}b(m_{1+j},m_{j+2};m_{j+3})+(-1)^{m_{3+j}}c_{a,b}(m_{1+j},m_{2+j};m_{3+j})\right),\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}b(m_1,m_2;m_3)&:=m_1!m_2!m_3!\binom{m_1+m_2+m_3+1}{m_3}\frac{B_{m_1+m_2+m_3+2}}{(m_1+m_2+m_3+2)!},\\c_{a,b}(m_1,m_2;m_3)&:=\sum_{\substack{n_1+n_2=m_3\\n_1,n_2\geq 0}}\left(\frac{b}{a}\right)^{n_2}\binom{m_3}{n_2}\frac{B_{m_1+n_1+1}}{m_1+n_1+1}\frac{B_{m_2+n_2+1}}{m_2+n_2+1}\\M_j(\alpha,\beta,\gamma)&=\begin{cases}m_{1+j}+m_{2+j}+1 & ,(\alpha,\beta,\gamma)\in I_j,\\-m_{1+j}-1 & ,(\alpha,\beta,\gamma)\notin I_j,\end{cases}\\I_j&:=\{(1+j,2+j,3+j),(1+j,3+j,2+j),(3+j,1+j,2+j)\}.\end{aligned}$$

また, Theorem 3.2 から以下が従う.

Corollary 3.3. $a,b,m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ と $\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}$ なる $\alpha,\beta,\gamma\in\{1,2,3\}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon_\alpha\to 0}\lim_{\varepsilon_\beta\to 0}\lim_{\varepsilon_\gamma\to 0}\omega_{\mathcal{U},a,b}(-m+\varepsilon_1,-m+\varepsilon_2,-2n+1+\varepsilon_3)=0.$$

Corollary 3.4. $a,b,\ell,m,n\in\mathbb{Z}_{>0}$ と $\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}$ なる $\alpha,\beta,\gamma\in\{1,2,3\}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon_\alpha\to 0}\lim_{\varepsilon_\beta\to 0}\lim_{\varepsilon_\gamma\to 0}\omega_{\mathcal{U},a,b}(-2\ell+\varepsilon_1,-2m+\varepsilon_2,-2n+1+\varepsilon_3)=0.$$

謝辞

この度は, 2022 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「解析的整数論とその周辺」において講演の機会を与えていただき誠にありがとうございました. 研究代表者である山崎義徳先生と研究副代表者である安福悠先生に改めて感謝申し上げます.

References

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta Arith. **98** (2001), no. 2, 107–116.

[2] H. Bachmann, Y. Takeyama and K. Tasaka, *Finite and symmetric Mordell—Tornheim multiple zeta value*, J. Math. Soc. Japan **73** (2021), no. 4, 1129–1158.

[3] D. M. Bradley and X. Zhou, *On Mordell-Tornheim sums and multiple zeta values*, Ann. Sci. Math. Québec **34** (2010), no. 1, 15–23.

[4] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), no. 2, 307–338.

[5] S. Kadota, T. Okamoto, M. Ono and K. Tasaka, *On a unified double zeta function of Mordell–Tornheim type*, Lith. Math. J. **62** (2022), no. 2, 207–217.

[6] K. Kamano, *Finite Mordell–Tornheim multiple zeta values*, Funct. Approx. Comment. Math. **54** (2016), no. 1, 65–72.

[7] M. Kaneko and D. Zagier, *Finite multiple zeta values*, in preparation.

[8] Y. Komori, *Finite multiple zeta values, symmetric multiple zeta values and unified multiple zeta functions*, Tohoku Math. J. (2) **73** (2021), no. 2, 221–255.

[9] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of of various multiple-zeta functions*, in “ Number Theory for the Millennium II, Proc. of the Millennial Conference on Number Theory ”, M. A. Bennett et. al. (eds.), A. K. Peters, 2002, pp. 417–440.

[10] K. Matsumoto, *On Mordell–Tornheim and other multiple zeta-functions*, Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, 17pp., Bonner Math. Schriften, **360**, Univ. Bonn, 2003.

[11] K. Matsumoto, *The analytic continuation and the asymptotic behaviour of certain multiple zeta-functions I*, J. Number Theory **101** (2003), no. 2, 223–243.

[12] K. Matsumoto, T. Nakamura, H. Ochiai and H. Tsumura, *On value-relations, functional relations and singularities of Mordell–Tornheim and related triple zeta-functions*, Acta Arith. **132** (2008), no. 2, 99–125.

[13] M. Ono and S. Yamamoto, *On the refined Kaneko–Zagier conjecture for general integer indices*, preprint arXiv:2202.06789.

[14] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 5, 1275–1283.