Algebraic independence and Linear independence of sets of prime-representing constants

東京理科大学理学部　武田　渉

Wataru Takeda
Faculty of Science, Tokyo University of Science

概要

本稿では素数表現定数の歴史を振り返りつつ, $\mathbb{Q}$ 上線形独立性に関する結果を与える. 本研究は齋藤耕太氏 (筑波大学) との共同研究である.

1　素数表現関数/定数

多項式 $P(k) = k^2 - k + 41$ は $k = 1, \ldots, 40$ なる正の整数において, 素数を取ることが確認できる. これは Euler の素数生成多項式と呼ばれ, 40 個の連続する整数において素数を取るものである. より一般に $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が素数表現関数であるとは, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $f(k)$ が整数であることをいう. 本稿では任意の正の整数において素数となるような素数表現関数が存在するかという問題を考える. まず, Euler の素数生成多項式が一般化できないかを考えると以下の事実が分かる.

Proposition. 定数でない整数係数多項式で素数表現関数となるものは存在しない.

Proof. 定数でない整数係数多項式 $P(k)$ を任意にとる. このとき, 任意の $k \geq k_0$ で $P(k) > 1$ かつ $P'(k) > 0$ となる正の整数 k_0 をとる. ここで $P(k_0)$ が合成数であるとき, $P(k)$ は素数表現関数でないため, $P(k_0)$ が素数 p であると仮定する. このとき, $P(k)$ は整数係数の多項式であるため, $P(k_0 + p) \equiv P(k_0) \equiv 0 \pmod{p}$ が成立する. よって, 単調増加性と合わせると $P(k_0 + p) = pq$ なる整数 $q \geq 2$ が存在し, $P(k_0 + p)$ は合成数, つまり $P(k)$ は素数表現関数ではないことが分かる. $\square$

以上より, 多項式の素数表現関数は存在しないため, Euler の例とは異なり多項式でない関数を考える. 素数表現関数の一例として, Mills [Mil47] は実数 $x \in \mathbb{R}$ の整数部分 $\lfloor x \rfloor$ を用いて, 以下の結果を証明した.

Theorem 1.1 (Mills [Mil47])**.** 正の整数 $k \in \mathbb{N}$ で $\lfloor A^{3^k} \rfloor$ が常に素数となる正の数 $A > 1$ が存在する.

Mills の結果は存在を示したものであるが, $\lfloor A^{3^k} \rfloor$ が常に素数となるような A の最小値 (Mills の定数) の存在やそれが有理数か無理数かどうかは未解決な問題となっていた. 上で見たように Mills の結果は A のべきが 3^k であったが, 論文 [ST22] ではべきを一般化したものを扱い, それらの位相的/代数的性質や最小値の存在性などさまざまな結果を与えた. 以下ではその結果を紹介する.

まず, 実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を $c_1 > 0$ および $c_k > 1$ $(k \geq 2)$ を満たすものとする. このとき, $C_k = c_1 \cdots c_k$ とし,

$$\mathcal{W}(c_k) = \{A > 1 \colon \lfloor A^{C_k} \rfloor \text{ が素数表現関数 }\},$$

と定める. また, $\mathcal{W}(c_k)$ の元を $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ に関する素数表現定数と呼ぶ. 例えば, Mills の結果から $\mathcal{W}(3) \neq \emptyset$ が分かる.

続いて, sub-boundary を導入する. 集合 $X \subset \mathbb{R}$ の境界を ∂X とし, $\mathrm{Conn}(X)$ を連結成分とする. このとき, 各 $X \subset \mathbb{R}$ に対して, X の *sub-boundary* を

$$\tilde{\partial} X = \bigcup_{U \in \mathrm{Conn}(\mathbb{R}\setminus X)} \partial U$$

と定める. また, その部分集合 *left sub-boundary* と *right sub-boundary* をそれぞれ

$$\tilde{\partial}_L X = \{\sup U \in \mathbb{R} \colon U \in \mathrm{Conn}(\mathbb{R} \setminus X)\}, \quad \tilde{\partial}_R X = \{\inf U \in \mathbb{R} \colon U \in \mathrm{Conn}(\mathbb{R} \setminus X)\}$$

と定義する. 例えば, $X = [0,1] \cup [3,4]$ のとき, $\mathrm{Conn}(\mathbb{R}\setminus X) = \{(-\infty, 0), (1,3), (4,\infty)\}$ であるため,

$$\tilde{\partial} X = \{0,1,3,4\}, \quad \tilde{\partial}_L X = \{0,3\}, \quad \tilde{\partial}_R X = \{1,4\}$$

であり, 直感的な左右や境界 (boundary) とあっていることも分かる. 重要な例として, Cantor の三進集合の sub-boundary たちを与える.

Example. Cantor の三進集合

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \colon \text{各 } i \in \mathbb{N} \text{ で } x_i \in \{0, 2\} \right\}$$

に対して,

$$\begin{aligned}
\tilde{\partial}\mathcal{C} &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \in \mathcal{C} \colon \text{ある } N \in \mathbb{N} \text{ で } x_N = x_{N+1} = \cdots \right\}, \\
\tilde{\partial}_L\mathcal{C} &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \cdots \in \mathcal{C} \colon \text{ある } N \in \mathbb{N} \text{ で } x_N = x_{N+1} = \cdots = 0 \right\}, \\
\tilde{\partial}_R\mathcal{C} &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \cdots \in \mathcal{C} \colon \text{ある } N \in \mathbb{N} \text{ で } x_N = x_{N+1} = \cdots = 2 \right\}.
\end{aligned}$$

[ST22] では, 適切な条件のもと, $\mathcal{W}(c_k)$ やその sub-boundary $\tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k)$ に関して, 位相的性質と代数的独立性双方の結果を得た. ここで, 部分集合 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \mathbb{C}$ が代数的独立であるとは, 任意の非零多項式 $P \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_r]$ に対して, $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq 0$ となることである.

Theorem 1.2 ([ST22, Theorem 1.2])**.** 実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を以下を満たすものとする:

1. $c_1 > 0$;
2. 任意の $k \geq 2$ に対して, $c_k \in \mathbb{Z}$ および $c_k \geq 2$ が成立する;
3. 無限個の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $c_k \geq 3$ が成立する.

このとき, 十分大きな $a \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{W}(c_k)$ に対して, $\mathcal{W}(c_k) \cap [0, a]$ と $\mathcal{C}$ は同相である.

Theorem 1.3 ([ST22, Theorem 1.3])**.** 整数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を以下の 3 つを満たすものとする.

1. $c_1 \geq 1$;
2. 任意の $k \geq 2$ に対して, $c_k \geq 2$ が成立する;
3. 正の整数 r に対して, $\limsup_{k\to\infty} c_{k+1} C_k^{1-r} = \infty$.

このとき, $A_1 \in \tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k)$, $A_2, \ldots, A_r \in \tilde{\partial}_L\mathcal{W}(c_k)$ なる任意の $A_1 < A_2 < \cdots < A_r$ に対して,

$$\{A_1, \ldots, A_r\}$$

は代数的独立である. 特に $\tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k)$ の任意の元は超越数である.

他にも, [ST22] では, 適切な条件の下 $\mathcal{W}(c_k)$ に最小値が存在することを示し, $\min \mathcal{W}(c_k)$ も超越数であることを示した. これは Mills の定数が超越数であることも与え, Theorem 1.1 の後に挙げた問題の解答となる. また, Theorem 1.2 から $\mathcal{W}(c_k) \cap [0,a]$ と $\mathcal{C}$ が同相であることが従う. その一方で先の例から $\tilde{\partial}\mathcal{C} \subset \mathbb{Q}$ であるが Theorem 1.3 から $\tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k)$ はすべて超越数となり, 全く違う様相が観察される.

本稿では, Theorem 1.3 における仮定を弱めることで $\mathbb{Q}$ 上線形独立性に関する結果を与える. ここで $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subset \mathbb{C}$ が $\mathbb{K}$ 上で線形独立であるとは, 任意の $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ に対して, $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_r\alpha_r \neq 0$ となることをいう. Theorem 1.3 では,

$$\limsup_{k \to \infty} c_{k+1} C_k^{-1} = \infty \tag{1.4}$$

を仮定することで, $A_1 \in \tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k), A_2 \in \tilde{\partial}_L\mathcal{W}(c_k)$ なる $A_1 < A_2$ に対して, $\{A_1, A_2\}$ の代数的独立性を示していた. 条件 (1.4) を弱めることで $\{A_1, A_2\}$ の $\mathbb{Q}$ 上線形独立性を以下のように得る.

Theorem 1.5. 実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を以下を満たすものとする.

1. $c_1 > 0$;
2. 任意の $k \geq 2$ に対して, $c_k \in \mathbb{Z}$ および $c_k \geq 2$ が成立する;
3. $\limsup_{k\to\infty} c_{k+1} = \infty$.

このとき, $A_1 \in \tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k)$, $A_2 \in \tilde{\partial}_L\mathcal{W}(c_k)$ なる任意の $A_1 < A_2$ に対して, $\{A_1, A_2\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

以下の Section 2 で Theorem 1.5 の証明に必要な補題を述べて, Section 3 で上の $\mathbb{Q}$ 上線形独立性を示し, 例を挙げる.

2　補題

この章を通して, 実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を以下を満たすものとする:

1. $c_1 > 0$;
2. 任意の $k \geq 2$ に対して, $c_k \in \mathbb{Z}$ および $c_k \geq 2$ が成立する;
3. 無限個の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $c_k \geq 3$ が成立する.

また, 各 $A \in \tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k)$ に対して, $p_k = \lfloor A^{C_k} \rfloor$ とし, $\mathcal{I} = \{k \in \mathbb{N} \colon c_{k+1} \geq 3\}$ とする. このとき, 以下 2 つの結果を得る.

Lemma 2.1 ([ST22, Lemma 5.1])**.** $A \in \tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k)$ を任意に固定する．このとき, ある $k_0 = k_0(A) > 0$ が存在して, 任意の $k \in \mathcal{I} \cap [k_0, \infty)$ に対して以下が成立する．

1. $A \in \tilde{\partial}_L\mathcal{W}(c_k)$ のとき, $p_k^{c_{k+1}} \le p_{k+1} \le p_k^{c_{k+1}} + p_k^{\theta c_{k+1}}$;
2. $A \in \tilde{\partial}_R\mathcal{W}(c_k)$ のとき, $(p_k+1)^{c_{k+1}} - (p_k+1)^{\theta c_{k+1}} \le p_{k+1} < (p_k+1)^{c_{k+1}}$.

Lemma 2.2 ([ST22, Lemma 5.2])**.** $A \in \tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k)$ を任意に固定し, Lemma 2.1 と同じ $k_0 = k_0(A)$ を取る．このとき, 任意の $k \in \mathcal{I} \cap [k_0, \infty)$ に対して以下が成立する．

1. $A \in \tilde{\partial}_L\mathcal{W}(c_k)$ のとき, $0 \le A - p_k^{1/C_k} \le A \cdot p_1^{(\theta-1)C_{k+1}/c_1}$;
2. $A \in \tilde{\partial}_R\mathcal{W}(c_k)$ のとき, $0 \le (p+1)^{1/C_k} - A \le (p_1+1)^{1/c_1} A^{(\theta-1)C_{k+1}}$.

3　$\mathbb{Q}$ 上線形独立性

以下では Theorem 1.5 を証明する．まず, Theorem 1.5 をもう一度復習する．

Theorem (Theorem 1.5)**.** 実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を以下を満たすものとする．

1. $c_1 > 0$;
2. 任意の $k \ge 2$ に対して, $c_k \in \mathbb{Z}$ および $c_k \ge 2$ が成立する;
3. $\limsup_{k\to\infty} c_{k+1} = \infty$.

このとき, $A_1 \in \tilde{\partial}\mathcal{W}(c_k)$, $A_2 \in \tilde{\partial}_L\mathcal{W}(c_k)$ なる任意の $A_1 < A_2$ に対して, $\{A_1, A_2\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である．

Proof. $\{A_1, A_2\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形従属であると仮定して矛盾を導く．つまり, $mA_2 - nA_1 = 0$ なる $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ が存在すると仮定する．

各 $j \in \{1,2\}$ に対して $p_j(k) = \lfloor A_j^{C_k} \rfloor$ とする．集合 $\mathcal{I}$ と正の整数 $k_0(A_j)$ を 2 章のようにとる．ここで $k_1 = \max(k_0(A_1), k_0(A_2))$ とする．いま, $A_1 < A_2$ であるため, $p_1(k) + 1 < p_2(k)$ となる十分に大きな $k \in \mathcal{I} \cap [k_1, \infty)$ をとる．ここで

$$q_1(k) = \begin{cases} p_1(k) & A_1 \in \tilde{\partial}_L\mathcal{W}(c_k) \text{ のとき}, \\ p_1(k)+1 & A_1 \in \tilde{\partial}_R\mathcal{W}(c_k) \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.1}$$

と定める．また, $\varphi(x) = x^{C_k} - q_1(k)/p_2(k)$, $\alpha_1(k) = q_1(k)^{1/C_k}$, $\alpha_2(k) = p_2(k)^{1/C_k}$ とすると

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{p_2(k)m^{C_k} - q_1(k)n^{C_k}}{n^{C_k}p_2(k)}$$

となる．以下, $\varphi(m/n) \neq 0$ を背理法で示す．つまり, $\varphi(m/n) = 0$ と仮定して矛盾を導く．このとき,

$$q_1(k) n^{C_k} = p_2(k) m^{C_k} \tag{3.2}$$

が成立する．ここで, (3.2) の両辺の $p_2(k)$ 因子の数を考える．(3.1) で定めた通り, $q_1(k)$ は $A_1 \in \tilde{\partial}_L \mathcal{W}(c_k)$ か $A_1 \in \tilde{\partial}_R \mathcal{W}(c_k)$ によって変わるが, $p_1(k) + 1 < p_2(k)$ であるため, どちらの場合においても左辺の $p_2(k)$ 因子の数はある非負整数 u_1 を用いて, $C_k u_1$ 個である．一方, 右辺はある非負整数 u_2 を用いて, $1 + C_k u_2$ 個である．これは矛盾であり, $\varphi(m/n) \neq 0$ となる．よって, 分子が非零の整数であるため, $|\varphi(m/n)| \geq (n^{C_k} p_2(k))^{-1}$ が従い, 以下を得る:

$$\frac{1}{n^{C_k} A_2^{C_k}} \leq \frac{1}{n^{C_k} p_2(k)} \leq \left| \varphi\left(\frac{m}{n}\right) \right| = \left| \varphi\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \right| = \frac{|q_1(k) A_2^{C_k} - p_2(k) A_1^{C_k}|}{A_2^{C_k} p_2(k)}.$$

ここで三角不等式と平均値の定理より, 上式の最右辺の分子に関して,

$$\begin{aligned}
&|q_1(k) A_2^{C_k} - p_2(k) A_1^{C_k}| \\
&\leq (A_2^{C_k} |q_1(k) - A_1^{C_k}| + A_1^{C_k} |p_2(k) - A_2^{C_k}|) \\
&\leq \left(A_2^{C_k} |\alpha_1(k) - A_1| C_k (A_1 + 1)^{C_k - 1} + A_1^{C_k} |\alpha_2(k) - A_2| C_k (A_2 + 1)^{C_k - 1} \right)
\end{aligned}$$

となり, 以上の 2 つの不等式から,

$$\begin{aligned}
1 &\leq \frac{n^{C_k}}{p_2(k)} \left(A_2^{C_k} |\alpha_1(k) - A_1| C_k (A_1 + 1)^{C_k - 1} + A_1^{C_k} |\alpha_2(k) - A_2| C_k (A_2 + 1)^{C_k - 1} \right) \\
&\leq \frac{n^{C_k} (A_1 + 1)^{C_k} (A_2 + 1)^{C_k} C_k}{p_2(k)} \left(|\alpha_1(k) - A_1| + |\alpha_2(k) - A_2| \right)
\end{aligned}$$

を得る．ここで, $p_2(i) \leq A_2^{C_i}$ から $p_2(i)^{c_{i+1}} \leq A_2^{C_{i+1}}$ が従い, $\lfloor A_2^{C_{i+1}} \rfloor = p_2(i+1)$ から $p_2(i)^{1/c_{i+1}} \leq p_2(i+1)$ が従う．よって, $p_2(1)^{1/C_1} \leq p_2(2)^{1/C_2} \leq \cdots \leq p_2(k)^{1/C_k}$ が成立し,

$$1 \leq \gamma_1^{C_k} \left(|\alpha_1(k) - A_1| + |\alpha_2(k) - A_2| \right)$$

となる $\gamma_1 = \gamma_1(A_1, A_2, n, c_1) > 1$ が存在する．さらに, Lemma 2.2 より, 正の数 $\eta' = \eta(A, c_1) > 0$, $\gamma_2 = \gamma_2(A, c_1) > 1$ で

$$1 \leq \gamma_1^{C_k} (|\alpha_1(k) - A_1| + |\alpha_2(k) - A_2|) \leq \eta' \gamma_1^{C_k} \gamma_2^{C_{k+1}(\theta - 1)} = \eta' (\gamma_1 \gamma_2^{c_{k+1}(\theta-1)})^{C_k} \tag{3.3}$$

を満たすものが存在する．一方, 仮定の 3. より, (3.3) の最右辺が 1 未満となる正の整数 $k \in \mathcal{I} \cap [k_1, \infty)$ が存在するが, これは矛盾である．よって, 背理法の仮定が否定され, $\{A_1, A_2\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である． $\square$

Theorem 1.5 が適用できる一例として, 各 $c_k = k$ と数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を定めると, 以下の Corollary を得る.

Corollary 3.4. $A_1 \in \tilde{\partial}\mathcal{W}(k)$, $A_2 \in \tilde{\partial}_L\mathcal{W}(k)$ なる任意の $A_1 < A_2$ に対して, $\{A_1, A_2\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

謝辞

2022 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「解析的整数論とその周辺」における講演の機会を与えてくださった山﨑 義徳先生, 安福 悠先生にこの場をお借りして感謝いたします. 本研究は JSPS 科研費 JP19J20878, JP22K13900 の助成を受けたものです.

参考文献

[Mil47] W. H. Mills, *A prime-representing function*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 604. MR 20593

[ST22] K. Saito and W. Takeda, *Topological properties and algebraic independence of sets of prime-representing constants*, Mathematika **68** (2022), no. 2, 429–453.