A LIMIT THEOREM FOR THE VALUE-DISTRIBUTION OF SYMMETRIC POWER L-FUNCTIONS
（対称べき L 関数の値分布に関する極限定理）

KOHJI MATSUMOTO
（松本耕二）

本稿の主目的は対称べき L 関数の値分布についての、M 関数を密度関数として内包するような極限定理を証明する試みに関する、Philippe Lebacque 氏、峰正博氏、梅垣由美子氏との共同研究 [15] において得られた結果について報告することである。しかし、諸定理のかなり複雑で長い証明の細部については [15] に譲り、本稿では関連する先行研究などについて紹介[1]した後、今回得られた結果についてはその主張と、証明についてのごく手短な要約を述べるに留めることにする。

なお、数理研での研究集会における筆者の講演の直後、杉山真吾氏から、その講演で述べた定理において採用していた仮定について、かなり critical なご批判をいただいた。氏のご批判に基づいて [15] の著者たちで相談した結果、当時の仮定のある部分は違った形の仮定で差し替えたし、また別のある部分については実際に証明できることが判明した。したがって [15] の現在の version は、当時とは相当に異なる仮定の下に記述されている。ただし証明の骨組み自体は、数理研で喋った時と本質的には変わっていない。

重大なご示唆をいただいた杉山真吾氏には、この場をお借りして心からの謝意を表しておきたい。

1. Bohr-Jessen の極限定理

まず M 関数の理論の原点である、Riemann ゼータ関数の値分布に関する古典的な Bohr–Jessen の定理から話を始める。

よく知られているように、Riemann ゼータ関数は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s = \sigma + it \in \mathbb{C})$$

として半平面 $\sigma > 1$ において定義され、全複素平面に有理型に解析接続される。Bohr と Jessen [4] は、$\sigma > 1/2$ なる σ をひとつ固定して、直線 $\Re s = \sigma$ 上の点における $\log\zeta$ の取る値の分布を調べた。複素平面

[1] この部分の記述は、[19], [24] と重複する箇所も多い。

内の有界な Jordan 可測集合 A をひとつ定め、$T>0$ に対し

$$L(T,A)=\mu\{t\in[-T,T]\mid \log\zeta(\sigma+it)\in A\}$$

と定義する。ただし μ は通常の一次元 Lebesgue 測度である。

定理 1 (Bohr–Jessen)
(i) 任意の $\sigma>1/2$ に対して、極限値

$$W(A)=\lim_{T\to\infty}\frac{L(T,A)}{2T} \tag{1.1}$$

が存在する。
(ii) 具体的に構成可能な、連続な密度関数 $M_\sigma:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して、

$$W(A)=\int_A M_\sigma(w)\frac{dudv}{2\pi}\qquad (w=u+iv\in\mathbb{C}) \tag{1.2}$$

と書ける。

この極限値 $W(A)$ は、直線 $\Re s=\sigma$ 上で $\log\zeta$ の値が A に含まれる「確率」と見ることができるであろう。

この定理はゼータ関数の値分布論の創始者である Bohr がその研究生活の後半において到達した、いわば彼にとっての最終到達点とも言うべきものである。その後の発展についていくつか述べておくと、まず Bagchi [3] による関数空間上での類似がある。この Bagchi の結果は Voronin の普遍性定理の Bagchi による別証明の鍵となったこともあり、それ自身重視され、特に Laurinčikas を中心とするリトアニア学派によって深く追求されている。

次に、Bohr–Jessen の定理の前半部分、つまり (1.1) については、Euler 積を持つような非常に一般的なゼータ関数のクラスについて、(1.1) の類似が成り立つことを筆者 [16] が証明した。

また (1.1) における収束のスピードや、極限値 $W(A)$ の挙動の定量的分析なども種々行なわれている。以上のような事項についての 20 世紀末の頃までの発展については [18] にもサーベイされているが、近年においても著しい成果が次々と得られている。

2. M 関数の理論

次に Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$ を考える。ただし χ は $\bmod q$ の Dirichlet 指標とする。Dirichlet L 関数については、q-aspect の考察が重要であるということはよく知られている。そこで Bohr–Jessen の定理の q 類似を追求する、という着想が生まれる。

Ihara [8] は代数体と関数体の両方の場合に、L 関数の対数微分の値分布を考察して、定理 1 に類似した極限定理を絶対収束域 $\sigma>1$ に対して（関数体の場合にはより広い領域で）示し、また積分の中に現れ

る密度関数を M 関数と呼んだ。引き続いて Ihara–Matsumoto [10] は Dirichlet L 関数の対数の場合に、Ihara [8] の着想と、筆者が [17] で論じた平均値定理に基づく議論とを組み合わせることにより、臨界領域に踏み込むことに成功して、次の結果を証明した。

定理 2 (Ihara–Matsumoto) $\sigma > 1/2$ とする。具体的に構成可能な、連続な密度関数 $M_\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在して、

(2.1)
$$\mathrm{Avg}_\chi \Psi(\log L(s,\chi)) = \int_{\mathbb{C}} M_\sigma(w)\Psi(w)\frac{dudv}{2\pi} \qquad (w = u + iv \in \mathbb{C})$$

が[2]、有界連続な、または（コンパクト台を持つ）Riemann 可積分関数であるような[3] 任意の Ψ について成り立つ。ただし Avg_χ は指標に関するある平均であって、具体的には次の二つのどちらかの平均を意味する。

(Avg_χ の意味)

(FI) f を素数、$X(f)$ を mod f の原始 Dirichlet 指標の全体、$\pi(m)$ を m 以下の素数の個数として、固定した s に対し、

$$\mathrm{Avg}^{\mathrm{I}}_\chi \Psi(\log L(s,\chi)) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi(m)} \sum_{2<f\leq m} \frac{1}{f-2} \sum_{\chi\in X(f)} \Psi(\log L(s,\chi))$$

とする。ただし $L(s,\chi) = 0$ となる指標 χ は適宜無視する。

(FII) $\chi_\tau(n) = n^{-i\tau}$ とおくと、

$$\zeta(s+i\tau) = \prod_p (1 - p^{-s-i\tau})^{-1} = \prod_p (1 - \chi_\tau(p)p^{-s})^{-1}$$

なので、τ についての平均も一種の指標に関する平均と見ることができる。この意味で、

$$\mathrm{Avg}^{\mathrm{II}}_\chi \Psi(\log L(s,\chi_\tau)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Psi(\log\zeta(s+i\tau))d\tau$$

とする。

(FII) の方は、実質的には t-aspect である。事実、Ψ として集合 A の特性関数を取れば、その場合の (2.1)(FII) が意味していることは Bohr–Jessen の (1.2) そのものである。この密度関数が、異なる aspect であ

[2] この式の左辺の s は複素数であるが、右辺はその実部 σ にしか依らないことに注意。

[3] ここは実は [10] では、Riemann 可積分関数ではなく、「$\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合の特性関数」となっているのだが、上記のように修正する必要がある。筆者の論文 [20] を参照。

る (FI) の場合にもそのまま密度関数として使える、という点は、上の定理の一つの興味深いポイントである。

上の定理においては、テスト関数 Ψ について有界連続という条件が現れていたが、この「有界」という条件は一般 Riemann 予想の下では大幅に緩和される（Ihara–Matsumoto [11]）。なお $(L'/L)(s,\chi)$ に対する、定理 2 と類似した結果は Ihara–Matsumoto [12] にある。関数体の場合は Ihara–Matsumoto [9] において、[8] の結果が改良されている。

Ihara–Matsumoto による一連の論文に対して、最初にその variant を提示したのは Mourtada–Murty [29] であって、彼らは L 関数の対数微分の discriminant aspect に関する類似の結果を証明した。さらにそれを受けて、Akbary–Hamieh [1] [2] や Gao–Zhao [5] が cubic character, quartic character の場合を論じている。Mine [25] [26] はより一般的な枠組みで M 関数の理論を展開し、また Euler 積を持たない Lerch ゼータ関数の場合にも考察を広げている（ [27]）。また Suzuki [31] による、Riemann ゼータ関数に付随するある種の関数の零点分布に関連しても M 関数が現れる、という観察も興味深いものである。

3. 保型 L 関数の場合

定理 1 の後半や定理 2 のような、M 関数を含む積分表示が他の種々のゼータ関数、L 関数の値分布についても示せないか、と考えるのは極めて自然な疑問であろう。するとやはり大きな目標は、保型 L 関数の場合の状況を考察することである。

$S_k(N)$ を、重みが k でレベルが N の正則カスプ形式の全体のなす空間とする。$S_k(N)$ の元 f として原始形式、すなわち normalized Hecke-eigen new form であるものをとる。この f の Fourier 展開を

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n)n^{(k-1)/2}e^{2\pi inz}$$

と書けば、$\lambda_f(1)=1$ で、$\lambda_f(n)$ はすべて実数である。これに付随する L 関数を

$$L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n)n^{-s}$$

で定義すれば、これは $\sigma>1$ で絶対収束し、全平面に正則解析接続可能で、その Euler 積表示は

$$L(f,s)=\prod_{p|N}(1-\lambda_f(p)p^{-s})^{-1}\prod_{p\in\mathbb{P}_N}(1-\lambda_f(p)p^{-s}+p^{-2s})^{-1} \tag{3.1}$$

となる。ただし $\mathbb{P}_N$ は N を割らない素数全体の集合とする。あるいは、この第二の積の部分を

$$(1-\lambda_f(p)p^{-s}+p^{-2s})^{-1}=(1-\alpha_f(p)p^{-s})^{-1}(1-\beta_f(p)p^{-s})^{-1}$$

と因数分解して書く場合も多い。ここで $\alpha_f(p)$, $\beta_f(p)$ は共に絶対値が 1 の複素数で、

$$\alpha_f(p)+\beta_f(p)=\lambda_f(p), \qquad \beta_f(p)=\overline{\alpha_f(p)}$$

を満たす。

このL(f,s) に対する研究として、まず t-aspect については、Matsumoto–Umegaki [22] において定理 1 の後半部分の類似が示されている。その証明のひとつのポイントは、Ihara-Matsumoto 論文などでも重要な役割を果たす Jessen–Wintner の評価式 (Jessen–Wintner [13]) を、保型 L 関数の場合にも利用できるように適切に一般化することであった。

他方、Lebacque-Zykin [14] は別の二種類の aspects について考察した。まず第一に、彼らは保型 L 関数を Dirichlet 指標で捻った $L(f\otimes\chi,s)$ を考え、その値分布の q-aspect について [11] に類似した結果を示している。また彼らは level aspect についての議論も試みているが、その方向では [14] の段階では中間的な結果しか得られていない。その後、Mine [28] によって、保型 L 関数の level aspect についても、定理 2 の完全な類似とも言うべき、満足すべき結果が証明された。

4. 対称べき L 関数の場合

次に対称べき L 関数の場合を論じる。自然数 r, N に対し、(partial) r-th 対称べき L 関数を

$$L_{\mathbb{P}_N}(\mathrm{Sym}_f^r,s)=\prod_{p\in\mathbb{P}_N}\prod_{h=0}^{r}(1-\alpha_f^{r-h}(p)\beta_f^h(p)p^{-s})^{-1} \tag{4.1}$$

で定義する。この級数は $\sigma>1$ で収束する。Newton–Thorne [30] により、各 $p|N$ に対して適当な局所因子 $L_p(\mathrm{Sym}_f^r,s)$ が存在して、

$$L(\mathrm{Sym}_f^r,s):=L_{\mathbb{P}_N}(\mathrm{Sym}_f^r,s)\prod_{p|N}L_p(\mathrm{Sym}_f^r,s)$$

が、GL_{r+1} のある保型表現の L 関数と一致し、従って全平面に有理型に解析接続される。

対称べき L 関数の値分布について、t-aspect は Matsumoto–Umegaki [23] で論じられた。関数 $L(\mathrm{Sym}_f^r,s)$ に対する (2.1) の t-aspect の場合の類似が、$\sigma>1-1/(r+1)$ の範囲で、$r=2$ のときには無条件に、$r\geq 3$ なら non-CM case でかつ局所因子等が若干の仮定を満たすときに、成り立つことが示されている。成立範囲が $\sigma>1-1/(r+1)$ と狭くなっているのは、使用した平均値定理に由来する制約である。

次に level aspect であるが、これは [23] より早く、Matsumoto–Umegaki [21] においてまず取り上げられた。この論文 [21] は、Lebacque–Zykin [14] と並んで、保型 L 関数に対する M 関数の理論を構築しようとした最初期の試みである。この研究は当初、保型 L 関数そのものの値分布

を考察しようとしたが、なかなか上手くいかなかった。そのうちに、その手法はむしろ対称べき L 関数の対数の差

$$\log L_{\mathbb{P}_q}(\mathrm{Sym}_f^u, \sigma) - \log L_{\mathbb{P}_q}(\mathrm{Sym}_f^v, \sigma)$$

（ただし q は素数、u, v は正の整数で $u - v = 2$、また m を自然数として、f のレベルは q^m）に対して有効に働くことに気づき、その level aspect に関する (2.1) の類似を証明するに至った。

定理 1、定理 2 のような結果の証明においては、例えば t-aspect については Kronecker–Weyl の定理、modulus aspect については Dirichlet 指標の直交性のような、ある種の「直交性」が重要な鍵となる。保型 L 関数の場合、そうした鍵の役割を果たすのが Petersson 公式である。上の [21] においては、Ichihara（= Umegaki）[7] によって定式化された形の Petersson 公式が用いられる。証明[4] の基本方針は Ihara–Matsumoto [10] のアナロジーであるが、結論として現れる M 関数はこの場合は $\mathbb{C}$ 上の関数ではなく $\mathbb{R}$ 上で定義された関数となる。

5. 主結果

前節で紹介した [21] の結果は、level aspect への挑戦であったが、対称べき L 関数そのものの値分布の記述は与えることができなかった。今回報告するのは、対称べき L 関数そのものに対する M 関数の理論の試みとして、おそらく初めて意味のある成果に到達した、筆者と Lebacque, Mine, Umegaki との共同研究 [15] の主結果（以下の定理 3 と定理 4）である。

考察の対象は q を素数として、レベルが q^m の原始形式 f に対する $\log L_{\mathbb{P}_q}(\mathrm{Sym}_f^r, \sigma)$ の値分布であって、考える平均は

$$\begin{aligned} (5.1) \quad & \mathrm{Avg}\Psi(\log L_{\mathbb{P}_q}(\mathrm{Sym}_f^r, \sigma)) \\ &= \lim_{q^m \to \infty} \frac{1}{C_k(1 - C_q(m))} \sum_f \frac{1}{\langle f, f \rangle} \Psi(\log L_{\mathbb{P}_q}(\mathrm{Sym}_f^r, \sigma)) \end{aligned}$$

というものである。ただし $C_k = (4\pi)^{k-1}/\Gamma(k-1)$,

$$C_q(m) = \begin{cases} 0 & m = 1, \\ q(q^2-1)^{-1} & m = 2, \\ q^{-1} & m \geq 3, \end{cases}$$

$\langle\ ,\ \rangle$ は Petersson 内積、そして和は $L(\mathrm{Sym}_f^r, s)$ が整関数であるような $S_k(q^m)$ の原始形式 f すべてにわたる。また極限 $q^m \to \infty$ は、(Case I) q を固定して $m \to \infty$ とするか、(Case II) m を固定して $q \to \infty$ とするか、のどちらかの意味であるとする。

[4]証明のアウトラインは [24] にもスケッチされている。

我々が得た第一の結果は、$r=1$ または $r=2$ の場合の、次のような定理 2 の類似である。

定理 3 k は偶数で $2 \le k \le 10$ または $k=14$ とし[5]、また $L(\mathrm{Sym}_f^r, s)$ $(r=1,2)$ に対して一般 Riemann 予想を仮定する。このとき、$\mathbb{R}$ 上で定義された（明示的に構成できる）非負実数値の連続関数 $M_\sigma(\mathrm{Sym}_f^r, *)$ が存在して、有界連続または Riemann 可積分な任意のテスト関数 Ψ に対して、

(5.2)
$$\mathrm{Avg}\Psi(\log L_{\mathbb{P}_q}(\mathrm{Sym}_f^r, \sigma)) = \int_{\mathbb{R}} M_\sigma(\mathrm{Sym}_f^r, u)\Psi(u)\frac{du}{\sqrt{2\pi}} \quad (r=1,2)$$

が $\sigma > 1/2$ において成り立つ。

Case I の場合の M_σ と Case II の場合の M_σ は同じではないことを注意しておく。実際、Case I の場合は q に依存するが、Case II ではそうではない。

上の定理で $r=1$ の場合というのは SL_2 の保型 L 関数に他ならず、既に Mine [28] の結果があるわけだが、この定理では $r=1$ の場合の証明と $r=2$ の場合の証明が全く並行して進むので、$r=1$ の場合も結果に含めてある。本質的に新しい部分は $r=2$, つまり symmetric square の場合である。定理 3 の証明の基本原理は先行する Matsumoto–Umegaki [21] と同じなのだが、今回の新しいアイデアは M 関数の構成に Sato-Tate 測度を用いる点であり、従って細部の計算はかなり異なってくる。

定理 3 によって $r=2$ の場合には、一般 Riemann 予想の仮定などはあるが、一定の結論が得られた。しかし、$r \ge 3$ の場合はどうなっているのだろうか。この方向はまだ暗中模索の状態だが、ごく特別な形のテスト関数に対しては、(5.2) と同様の結果が得られることが判明した。

定理 4 k は定理 3 と同様とし、一般 Riemann 予想に加えて、「$L(\mathrm{Sym}_f^r, s)$ が整関数ではないような原始形式は少ない」[6] と仮定する。このとき、テスト関数 $\Psi_1(x) = cx$ $(c \ne 0)$ に対して、

(5.3)
$$\mathrm{Avg}\Psi_1(\log L_{\mathbb{P}_q}(\mathrm{Sym}_f^r, \sigma)) = \int_{\mathbb{R}} M_\sigma(\mathrm{Sym}_f^{ro}, u)\Psi_1(u)\frac{du}{\sqrt{2\pi}} \quad (r=1,2)$$

[5]前節で言及した Ichihara [7] の Petersson 公式をこの定理の証明でも用いるが、k についてのこの制約は Petersson 公式の定式化に起因する。

[6]正確に言うと、$S_k(q^m)$ に属する、$L(\mathrm{Sym}_f^r, s)$ が整関数ではない原始形式の個数を (5.1) の右辺と同様の重み付きで数え上げたとき、それが $O(q^{-\Delta m})$ と評価できるような $\Delta = \Delta(r) > 0$ が存在する、ということ。

が $\sigma > 1/2$ において成り立つ。ただし r_0 は r が偶数なら 2, r が奇数なら 1 と定める。

また上式右辺をもっと明示的に書き下すことも可能である。

定理 4 の証明は、(5.3) の左辺と右辺を別々に計算して、その両者が等しいことを見ることによってなされる。左辺の計算においては Garnville–Soundararajan [6] における手法を援用し、右辺では Ihara–Matsumoto [11] にある議論が使われる。

定理 4 において r の偶奇で状況が区別されることと、Matsumoto–Umegaki [21] において $u-v=2$ の条件の下で Sym^u と Sym^v の L 関数の対数の差を考えると議論が上手く進行したこととを考え合わせると、r のパリティに関する何らかの原理が背後に潜んでいるのかもしれない。関連する若干の考察は [15] の最終節にも述べた。だが定理 4 はあまりに特殊な場合にしか示されておらず、この方向で予想めいたものを提案するには、まだ時期尚早であろう。

References

[1] A. Akbary and A. Hamieh, Value-distribution of cubic Hecke L-functions, J. Number Theory **206** (2020), 81–122.

[2] A. Akbary and A. Hamieh, Two dimensional value-distribution of cubic Hecke L-functions, Proc. Amer. Math. Soc. **149** (2021), 4669–4684.

[3] B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta function and other allied Dirichlet series, Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[4] H. Bohr and B. Jessen, Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, I, *Acta Math.* **54** (1930), 1-35; II, *ibid.* **58** (1932), 1-55.

[5] P. Gao and L. Zhao, Value-distribution of quartic Hecke L-functions, Moscow J. Combin. Number Theory **10** (2021), 167–181.

[6] A. Granville and K. Soundararajan, Large character sums, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 365–397.

[7] Y. Ichihara[7], The first moment of L-functions of primitive forms on $\Gamma_0(p^\alpha)$ and a basis of old forms, *J. Number Theory* **131** (2011), 343-362.

[8] Y. Ihara, On "M-functions" closely related to the distribution of L'/L-values, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **44** (2008), 893-954.

[9] Y. Ihara and K. Matsumoto, On L-functions over function fields: Power-means of error-terms and distribution of L'/L-values, in "Algebraic Number Theory and Related Topics 2008", H. Nakamura et al. (eds.), RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B19** (2010), 221–247.

[10] Y. Ihara and K. Matsumoto, On certain mean values and the value-distribution of logarithms of Dirichlet L-functions, *Quart. J. Math. (Oxford)* **62** (2011), 637-677.

[7] Y. Ichihara = Y. Umegaki

[11] Y. Ihara and K. Matsumoto, On $\log L$ and L'/L for L-functions and the associated "M-functions": Connections in optimal cases, *Moscow Math. J.* **11** (2011), 73-111.
[12] Y. Ihara and K. Matsumoto, On the value-distribution of logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions, in *Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions*, G. V. Milovanović et al. (eds.), Springer-Verlag, 2014, pp.79-91.
[13] B. Jessen and A. Wintner, Distribution functions and the Riemann zeta function, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), 48–88.
[14] P. Lebacque and A.Zykin, On M-functions associated with modular forms, Moscow Math. J. **18** (2018), 437–472.
[15] P. Lebacque, K. Matsumoto, M. Mine and Y. Umegaki, On the value-distribution of the logarithms of symmetric power L-functions in the level aspect, preprint, arXiv:2209.11918
[16] K. Matsumoto, Value-distribution of zeta-functions, in *Analytic Number Theory*, K. Nagasaka and E. Fouvry (eds.), Lecture Notes in Math. **1434**, Springer-Verlag, 1990, pp.178–187.
[17] K. Matsumoto, Asymptotic probability measures of zeta-functions of algebraic number fields, J. Number Theory **40** (1992), 187–210.
[18] 松本耕二、ゼータ関数の確率論的値分布論、数学 **53** (2001), 279–296.
[19] K. Matsumoto, On the theory of M-functions, 数理解析研究所講究録 **2120** (2019), 153–165.
[20] K. Matsumoto, An M-function associated with Goldbach's problem, J. Ramanujan Math. Soc. **36** (2021), 339–352.
[21] K. Matsumoto and Y. Umegaki, On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power L-functions, Intern. J. Number Theory **14** (2018), 2045–2081.
[22] K. Matsumoto and Y. Umegaki, On the density function for the value-distribution of automorphic L-functions, J. Number Theory **198** (2019), 176–199.
[23] K. Matsumoto and Y. Umegaki, On the value-distribution of symmetric power L-functions, in "Topics in Number Theory", T. Chatterjee and S. Gun (eds.), Ramanujan Math. Soc. Lect. Note Ser. **26**, 2020, pp. 147–167.
[24] K. Matsumoto and Y. Umegaki, On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power L-functions, 数理解析研究所講究録 **2203** (2021), 159–170.
[25] M. Mine, On M-functions for the value-distribution of L-functions, Lith. Math. J. **59** (2019), 96–110.
[26] M. Mine, On certain mean values of logarithmic derivatives of L-functions and the related density functions, Funct. Approx. Comment. Math. **61** (2019), 179–199.
[27] M. Mine, The density function for the value-distribution of the Lerch zeta-function and its applications, Michigan Math. J. **69** (2020), 849–889.
[28] M. Mine, Probability density functions attached to random Euler products for automorphic L-functions, Quart. J. Math. **73** (2022), 397–442.
[29] M. Mourtada and V. K. Murty, Distribution of values of $L'/L(\sigma, \chi_D)$, Moscow Math. J. **15** (2015), 497–509.

[30] J. Newton and J. A. Thorne, Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms I, II, Publ. Math. l'IHÉS **134** (2021), 1–116, 117–152.

[31] M. Suzuki, Nearest neighbor spacing distributions for the zeros of the real or imaginary part of the Riemann xi-function on vertical lines, Acta Arith. **170** (2015), 47–65.

名古屋大学大学院多元数理科学研究科