Joint probability distribution and its density function for values of the logarithms of the Riemann zeta-function and related functions

群馬大学　名越 弘文
Hirofumi Nagoshi
Gunma University

1. Bohr-Jessen の極限定理

リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ に対する値分布の研究は，Bohr によって始まった．複素変数 s に対して，通常通り，$s=\sigma+it\,(\sigma,t\in\mathbb{R})$ と書くとする．集合 G を，$\mathbb{C}$ から集合

$$\bigcup_{\rho=\beta+i\gamma}\{\sigma+i\gamma:\,\sigma\le\beta\}\cup(-\infty,1]$$

を取り除いた集合とする．ただし，ρ たちはゼータ関数 $\zeta(s)$ の臨界領域内の零点たちである．集合 G は単連結開集合であり，$\zeta(s)$ は G 上で正則で零点を持たない．集合 G 上で，ゼータ関数 $\zeta(s)$ の対数（の 1 つの枝）$\log\zeta(s)$ というものを

$$\log\zeta(\sigma+it):=\int_{+\infty}^{\sigma}\frac{\zeta'(\alpha+it)}{\zeta(\alpha+it)}d\alpha \tag{1.1}$$

と定義する．

実数 $\sigma>1/2$ を固定して，実変数 t の関数 $\log\zeta(\sigma+it)$ を考える．この関数の値分布に関する Bohr と Jessen による結果を述べたい．ただし，現代的な形で述べるとする．

$\sigma>1$ のときに，(1.1) より，

$$\begin{aligned}\log\zeta(\sigma+it)&=\sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{np^{n(\sigma+it)}}\\&=\sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p^{-it})^n}{np^{n\sigma}}\\&=\sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(e^{2\pi i\left(-\frac{\log p}{2\pi}\right)t}\right)^n}{np^{n\sigma}}\end{aligned} \tag{1.2}$$

となる．ただし，p たちは素数たちを表す．この級数 (1.2) の形および事実「$\log p$ たちは $\mathbb{Q}$ 上線形独立である（よって，$-\frac{\log p}{2\pi}$ たちも $\mathbb{Q}$ 上線形独立である）」，そして，Kronecker-Weyl の一様分布の定理を考慮することにより，実変数 t の関数 $\log\zeta(\sigma+it)$ に対する確率モデルとして，下記 (1.3) の $\mathbb{C}$ 値確率変数 $\log\zeta(\sigma,\mathcal{X})$ を準備する．

確率論の話によれば，ある確率空間 (Ω_0,P_0) 上の $\mathbb{C}$ 値確率変数列 $\mathcal{X}=\{\mathcal{X}_p\}_p$ で次の条件 (i)(ii) を満たすものが存在する．

(i) $\mathcal{X}_p$ たちは独立性である．

(ii) 各 $\mathcal{X}_p$ は $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 上で一様に分布する．ここで，$\mathbb{T}$ には，通常の確率測度を入れる（つまり，$\mathbb{T}$ を区間 $[0, 2\pi)$ と同一視したときに $\frac{1}{2\pi}dx$ を考える）．

この $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_p\}_p$ を用いて，(1.2) に似たものとして，$\mathbb{C}$ 値確率変数

$$\log \zeta(\sigma, \mathcal{X}) := \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{\mathcal{X}_p}^n}{np^{n\sigma}} \tag{1.3}$$

を導入する．この級数は，$\sigma > 1/2$ ならほとんど確実に (almost surely) 収束する．

実数 $\sigma > 1/2$ を固定する．実数 $T > 0$ に対して，

$$P_{\sigma,T}(A) := \frac{1}{T} meas\{t \in [0, T] : \log \zeta(\sigma + it) \in A,\, \sigma + it \in G\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

という確率測度を考える．ここで，$meas$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度である．さらに，Q_σ は確率変数 $\log \zeta(\sigma, \mathcal{X})$ の分布を表すとする，すなわち，

$$Q_\sigma(A) := P_0(\log \zeta(\sigma, \mathcal{X}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

である．

そのときに，Bohr と Jessen [2], [3] は次の極限定理を示した．ただし，現代的な形で述べるとする．

定理 A. 実数 $\sigma > 1/2$ を固定する．そのとき，次が成り立つ．
(1) $T \to \infty$ のとき，$P_{\sigma,T}$ は Q_σ に弱収束する．
(2) 確率測度 Q_σ は，

$$Q_\sigma(A) = \int_A f_\sigma(z) dz \qquad \text{for any } A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$$

を満たす関数（確率密度関数）$f_\sigma \in C^\infty(\mathbb{C}) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を持つ．ここで，$C^\infty(\mathbb{C})$ とは，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と見なして $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ のことである．

類似あるいは関連する結果が，例えば [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] に得られている．

2. 主結果

この節では本稿の主結果を述べる．定理 A では $\log \zeta(\sigma + it)$ という 1 つの関数を扱ったが，本稿では複数個の関数たちを扱った結果を与える．ただし，実数 σ として $\sigma > 1$ である場合を扱う．

以下，N は自然数とし，$L_1(s), \ldots, L_N(s)$ は次の 3 つの条件 (i)(ii)(iii) を満たす Dirichlet 級数たちとする．

(i) Euler product: 各 $L_j(s)$ は

$$L_j(s) = \prod_p \prod_{k=1}^{m_j} \left(1 - \frac{\alpha_j(p, k)}{p^s}\right)^{-1} \qquad (m_j \in \mathbb{N},\, \alpha_j(p, k) \in \mathbb{C})$$

という形に書ける．

(ii) Ramanujan hypothesis: すべての j, p, k に対して，$|\alpha_j(p, k)| \leq 1$ を満たす．

(iii) Selberg orthogonality: $a_j(p) := \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_j(p,k)$ とする．そのとき，

$$\sum_{p \le x} \frac{a_j(p)\overline{a_{j'}(p)}}{p} = \begin{cases} \kappa_j \log\log x + O(1) & \text{if } j = j' \\ O(1) & \text{if } j \ne j' \end{cases} \qquad (x \to \infty)$$

が成り立つ．ここで，各 κ_j は，ある正の定数である．

条件 (iii) については，例えば [1] を参照されたい．

各 $L_j(s)$ に対して，

$$a_j(p^n) := \sum_{k=1}^{m_j} \alpha_j(p,k)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

と書くとする．$\sigma > 1$ とする．$\log L_j(\sigma+it)$ を (1.1) と同様に定義すると，(1.2) と同様に

$$\begin{aligned} \log L_j(\sigma+it) &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_j(p^n)}{np^{n(\sigma+it)}} = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_j(p^n)(p^{-it})^n}{np^{n\sigma}} \\ &= \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_j(p^n)\left(e^{2\pi i\left(-\frac{\log p}{2\pi}\right)t}\right)^n}{np^{n\sigma}} \end{aligned}$$

が成り立つ．このことに注意して，(1.3) と同様に，各 j に対して $\mathbb{C}$ 値確率変数

$$\log L_j(\sigma, \mathcal{X}) := \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_j(p^n){\mathcal{X}_p}^n}{np^{n\sigma}}$$

を導入する．ここで，$\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_p\}_p$ は以前に出てきた確率変数列である．

実数 $T > 0$ に対して，

$$P_{N,\sigma,T}(A) := \frac{1}{T} meas\{t \in [0,T] : (\log L_1(\sigma+it), \ldots, \log L_N(\sigma+it)) \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^N)$$

という $\mathbb{C}^N$ 上の確率測度を考える．$\mathbb{C}^N$ 値確率ベクトル $\mathbf{Z}_{N,\sigma} := (\log L_1(\sigma,\mathcal{X}), \ldots, \log L_N(\sigma,\mathcal{X}))$ に対して，

$$Q_{N,\sigma}(A) := P_0\left(\mathbf{Z}_{N,\sigma} \in A\right), \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^N)$$

で定義される $\mathbb{C}^N$ 上の確率測度 $Q_{N,\sigma}$ を，$\mathbb{C}^N$ 値確率ベクトル $\mathbf{Z}_{N,\sigma}$ の分布，あるいは，$\mathbb{C}$ 値確率変数たち $\log L_1(\sigma,\mathcal{X}), \ldots, \log L_N(\sigma,\mathcal{X})$ の同時分布と言う．

次が本稿の主結果の 1 つである．

定理 1. 実数 $\sigma > 1$ を固定する．そのとき，次が成り立つ．
(1) $T \to \infty$ のとき，$P_{N,\sigma,T}$ は $Q_{N,\sigma}$ に弱収束する．
(2) 確率測度 $Q_{N,\sigma}$ は，

$$Q_{N,\sigma}(A) = \int_A g_\sigma(\underline{z})d\underline{z} \qquad \text{for any } A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^N)$$

を満たす関数（確率密度関数）$g_\sigma \in C^\infty(\mathbb{C}^N) : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ を持つ．

Kershner と Wintner [7] は，$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)$ に対して，Bohr-Jessen の極限定理 (定理 A) の類似の結果を得た．$\sigma>1$ のとき，

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)=\sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}(-\log p)\frac{1}{p^{n(\sigma+it)}}$$

が成り立つ．そのため，(1.2) と (1.3) と同様に，$\mathbb{C}$ 値確率変数

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma,\mathcal{X}):=\sum_{p}\sum_{n=1}^{\infty}(-\log p)\frac{{\mathcal{X}_p}^n}{p^{n\sigma}}$$

を考える．そのとき，$\log\zeta(\sigma+it)$ と $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)$ の同時値分布について，定理 1 と同様な結果が実は得られる．これが 2 つ目の主結果である．特に，弱収束先である $\log\zeta(\sigma,\mathcal{X})$ と $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma,\mathcal{X})$ の同時分布について，確率密度関数の存在が示せる．

3. 証明の概略

定理 1 の (2) の証明の概略を述べる．そのために，まずは，確率測度の特性関数というものを準備する．μ を $\mathbb{C}^N$ 上の確率測度とする．$\underline{w}=(w_1,\dots,w_N),\underline{z}=(z_1,\dots,z_N)\in\mathbb{C}^N$ に対して，

$$\langle\underline{w},\underline{z}\rangle:=\sum_{j=1}^{N}((\operatorname{Re}w_j)(\operatorname{Re}z_j)+(\operatorname{Im}w_j)(\operatorname{Im}z_j))=\sum_{j=1}^{N}\operatorname{Re}(\overline{w_j}z_j)$$

とする．そのとき，

$$\varphi_\mu(\underline{w}):=\int_{\mathbb{C}^N}e^{i\langle\underline{w},\underline{z}\rangle}\mu(d\underline{z}),\qquad \underline{w}\in\mathbb{C}^N$$

で定義される関数 $\varphi_\mu:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}$ を，確率測度 μ の特性関数（あるいはフーリエ変換）と言う ([11, p. 194])．

$\mu_{\mathbf{Y}}$ が，ある確率空間 (Ω,P) 上の $\mathbb{C}^N$ 値確率ベクトル $\mathbf{Y}$ の分布であるときには，

$$\varphi_{\mu_{\mathbf{Y}}}(\underline{w})\left(:=\int_{\mathbb{C}^N}e^{i\langle\underline{w},\underline{z}\rangle}\mu_{\mathbf{Y}}(d\underline{z})\right)=\mathbb{E}\left[e^{i\langle\underline{w},\mathbf{Y}\rangle}\right]\left(:=\int_{\Omega}e^{i\langle\underline{w},\mathbf{Y}\rangle}dP\right)$$

が成り立つことが知られている．

また，特性関数の応用として次が知られている．

補題 1. もし

$$\int_{\mathbb{C}^N}\|\underline{w}\|^m\left|\varphi_\mu(\underline{w})\right|d\underline{w}<\infty$$

がある整数 $m\geq 0$ に対して成り立つならば，確率測度 μ は

$$\mu(A)=\int_A f_\mu(\underline{z})d\underline{z}\qquad \textit{for any } A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^N)$$

を満たす関数（確率密度関数）$f_\mu\in C^m(\mathbb{C}^N):\mathbb{C}^N\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を持つ．また，この関数 f_μ は，ある逆公式で与えられる．

補題 1 や上記の定義たちなどによれば，定理 1 の (2) を得るためには，$\underline{w} = (w_1, \dots, w_N)$ を $\mathbb{C}^N \setminus \{(0,\dots,0)\}$ の元とするとき，

$$\left| \prod_p \int_0^1 e^{i \sum_{j=1}^N \mathrm{Re}\left(\overline{w_j} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_j(p^n)}{np^{n\sigma}} e^{2\pi i n \theta_p} \right)} d\theta_p \right| \tag{3.1}$$

を $\|\underline{w}\|$ に関して評価すればよいことが分かる．この評価を得るために，Righetti の結果 [10, Proposition 2.5] を適用する．その結果を適用するために，次のことを使う．

$\underline{w} = (w_1, \dots, w_N)$ を $\mathbb{C}^N \setminus \{(0,\dots,0)\}$ の元とし，$L_1(s), \dots, L_N(s)$ に対して，

$$\mathcal{P}(\underline{w}) = \mathcal{P}(\underline{w}; L_1, \dots, L_N) := \left\{ p : \left| \sum_{j=1}^N \overline{w_j} a_j(p) \right| \geq \delta \|\underline{w}\| \right\} \tag{3.2}$$

という素数たちの集合を考える．ここで，

$$\delta := \sqrt{\frac{\min_{1\leq j\leq N} \kappa_j}{2}}$$

である．なお，$N=1$ のときは，$p \in \mathcal{P}(\underline{w})$ の条件は単に $|a_1(p)| \geq \delta$ である．そして，$SL(2,\mathbb{Z})$ の正則な Hecke 固有形式に付随する L 関数 (1 つ) の場合には，この条件 $|a_1(p)| \geq \delta$ を満たす素数たちは無限個存在することが Ram Murty により示されている．

$L_1(s), \dots, L_N(s)$ の条件 (iii) (Selberg orthogonality) を使うことにより，次の補題が得られる．

補題 2. 任意の $\underline{w} = (w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{C}^N \setminus \{(0,\dots,0)\}$ と任意の $x > x_0$ に対して，

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \in \mathcal{P}(\underline{w})}} 1 \geq C_0 \log\log x$$

が成り立つ．ここで，x_0 と C_0 は，$L_1(s), \dots, L_N(s)$ のみに依存する ($\underline{w}$ には依存しない) 正の定数たちである．

この補題と先ほど述べた Righetti [10] の Proposition 2.5 によれば，任意の自然数 ν に対して，

$$\prod_p \left| \int_0^1 e^{i \sum_{j=1}^N \mathrm{Re}\left(\overline{w_j} \sum_{n=1}^\infty \frac{a_j(p^n)}{np^{n\sigma}} e^{2\pi i n \theta_p} \right)} d\theta_p \right| \ll \frac{1}{\|\underline{w}\|^\nu}$$

が得られる．そうして，(3.1) で述べたように，定理 1 の (2) が得られる．

前節の最後に述べた，$\log\zeta(\sigma, \mathcal{X})$ と $\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma, \mathcal{X})$ の同時分布に対する確率密度関数の存在を示すときにも，先の Righetti [10] の Prosition 2.5 を使う．(3.2) の $\mathcal{P}(\underline{w})$ の代わりに，今度は，$\underline{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に対して

$$\mathcal{Q}(\underline{w}) := \left\{ p : |\overline{w_1} + (-\log p)\overline{w_2}| \geq \frac{1}{4}\|\underline{w}\| \right\}$$

という素数たちの集合を考えることになる．各 $\underline{w}$ に対して $\mathcal{Q}(\underline{w})$ に属する適当な素数たちの存在を示すために，$\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を次の 3 つの部分に分けて考える．

$$\mathcal{R}_1 := \left\{ \underline{w} = (w_1, w_2) : \frac{|\overline{w_1}|}{\|\underline{w}\|} > \frac{1}{2}, \ \frac{|\overline{w_2}|}{\|\underline{w}\|} < \frac{1}{x_0} \right\},$$
$$\mathcal{R}_2 := \left\{ \underline{w} = (w_1, w_2) : \frac{|\overline{w_1}|}{\|\underline{w}\|} > \frac{1}{2}, \ \frac{|\overline{w_2}|}{\|\underline{w}\|} \geq \frac{1}{x_0} \right\},$$

$$\mathcal{R}_3 := \left\{ \underline{w} = (w_1, w_2) : \frac{|\overline{w_1}|}{\|\underline{w}\|} \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

ここで，x_0 はある大きな正の実数である．

謝辞． 本研究集会における研究代表者の山崎義徳氏と副代表者の安福悠氏に感謝致します．

References

[1] M. Avdispahić, L. Smajlović, *On the Selberg orthogonality for automorphic L-functions*, Arch. Math. 94 (2010), 147–154.

[2] H. Bohr, B. Jessen, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Math. 54, 1–35 (1930).

[3] H. Bohr, B. Jessen, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, Acta Math. 58, 1–55 (1932).

[4] Y. Ihara, *On "M-functions" closely related to the distribution of L'/L-values*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44, No. 3, 893–954 (2008).

[5] Y. Ihara, K. Matsumoto, *On certain mean values and the value-distribution of logarithms of Dirichlet L-functions*, Q. J. Math. 62, No. 3, 637–677 (2011).

[6] B. Jessen and A. Wintner, *Distribution functions and the Riemann zeta function*, Trans. Amer. Math. Soc. 38 (1935), no.1, 48–88.

[7] R. Kershner, A. Wintner, *On the asymptotic distribution of $\zeta'/\zeta(s)$ in the critical strip*, Amer. J. Math. 59, 673–678 (1937).

[8] K. Matsumoto, Y. Umegaki, *On the density function for the value-distribution of automorphic L-functions*, J. Number Theory 198, 176–199 (2019).

[9] M. Mine, *On M-functions for the value-distributions of L-functions*, Lith. Math. J. 59, No. 1, 96–110 (2019).

[10] M. Righetti, *On the density of zeros of linear combinations of Euler products for $\sigma > 1$*, Algebra Number Theory 11, No. 9, 2131–2163 (2017).

[11] S. Takanobu, *Bohr-Jessen limit theorem, revisited*, MSJ Memoirs 31, Mathematical Society of Japan, 2013.