$\mathrm{Re}(s) < 1/2$ におけるセルバーグクラス L 関数の導関数の零点
(Zeros of derivatives of L-functions in the Selberg class on the left-half plane and the left-half of the critical strip)

九州大学大学院数理学研究院　アデ イルマ スリアジャヤ / チャチャ

Ade Irma Suriajaya / Chacha
Faculty of Mathematics, Kyushu University

序文

本研究は、Sneha Chaubey (IIIT-Delhi) および Suraj Singh Khurana (Indian Institute of Technology Kanpur) との共同研究であり、部分的に科研費（課題番号：18K13400）及び文部科学省ダイバーシティ研究環境実現イニシアティブ（先端型）の助成を受けたものである。

要旨

A. Speiser (1935 年) はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の一階導関数 $\zeta'(s)$ が $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ で実数でない零点を持たないことがリーマン予想と同値であることを示した。N. Levinson と H. L. Montgomery (1974 年) は Speiser (1935 年) の結果の量的な言い換えを与え、特に、$0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ において、$\zeta(s)$ の零点の個数は $\zeta'(s)$ の零点の個数とほぼ同じであることを明らかにした。この結果は他の L 関数に対しても証明されている。例えば、原始的指標に付随するディリクレ L 関数の場合に対しては H. Akatsuka と筆者 (2018 年) によって示された。同様の結果は拡張されたセルバーグクラスの L 関数に対して Šleževičienė (2003 年) や Garunkštis と Šimėnas (2015 年) によって得られたが、T-方向のみ考察された。筆者らはセルバーグクラスの L 関数に対して、T-方向だけではなく、他のパラメーターに対しても明示的な評価を目指している。その準備として、必要となる導関数の非零領域および自明な零点の明示的な評価を示した。この講究録では、講演で紹介した、上記の結果を報告する。

1　リーマンゼータ関数の場合

$\zeta(s)$ の零点は、「関数等式」([Tit86, (2.1.1), p. 13] を参照) により出てくる自明な零点とそれ以外の零点、非自明な零点と呼ばれる零点の二種類に分けられる。$\zeta(s)$ の自明な零点はガンマ関数 $\Gamma(s)$ の極により生じ、全ての負の偶数点 $s = -2, -4, -6, -8, \ldots$ である。$\mathrm{Re}(s) < 0$ において、$\zeta(s)$ はそれら以外の零点を持たない。一方、$\mathrm{Re}(s) > 1$ においては、

2020 *Mathematics Subject Classification*: 11M06, 11M41.
キーワード: ゼータ関数、L 関数、セルバーグクラス、導関数、零点

「オイラー積」と呼ばれる無限積表示 ([Tit86, (1.1.2), p. 1] を参照) により、$\zeta(s)$ が零点を全く持たない。これにより、$\zeta(s)$ の非自明な零点は $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ の中にしか存在し得ないことがわかる。素数定理と同値な主張として、$\zeta(s)$ は直線 $\mathrm{Re}(s) = 1$ 上に零点を持たない。よって、再び関数等式を用いれば、$\zeta(s)$ の非自明な零点は $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ に存在することがわかる。これまでの話を簡単にまとめると、負の偶数全体を

$$-2\mathbb{N} := \{-2, -4, -6, -8, -10, -12, \ldots\}$$

で表すと、

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \leq 0\} \setminus (-2\mathbb{N}) \quad \cup \quad \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \geq 1\}$$

は $\zeta(s)$ の一つの「非零領域」である。それにより、帯領域 $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ はよく「臨界帯領域」(critical strip) と呼ばれている。より精密な非零領域も知られている (例えば [Tit86, (6.15.1), p. 131] や、現在知られている最善非零領域は Korobov [Kor58a, Kor58b] と Vinogradov [Vin58] によるものである)。

自明な零点の位置は正確に知られている一方、非自明な零点の正確な位置が不明である。関数等式により、非自明な零点は対称的に現れ、その対称軸は $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ である。Riemann [Rie59] はこれらの非自明な零点がすべて実に直線 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上に存在すると予想した。この予想は「リーマン予想 (RH)」と愛称され、160 年以上経った現在も未解決である。[Rie59] で述べられたように、この非自明な零点は素数分布の情報を持ち、とても重要な研究対象である。

A. Speiser [Spe35] は $\zeta(s)$ の一階導関数 $\zeta'(s)$ が $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ で実数でない零点を持たないことが RH と同値であることを示した。この結果により、$\zeta(s)$ の零点の分布はその導関数の零点の分布と関係していることがわかり、$\zeta(s)$ の導関数の零点も研究され始めた。1960 年代から、R. Spira [Spi65, Spi70, Spi72, Spi73] が $\zeta(s)$ の k 階導関数 $\zeta^{(k)}(s)$ の零点分布についてたくさん調べ、特に、非零領域を示した。Spira [Spi65, Spi70] が示した非零領域により、$\zeta^{(k)}(s)$ の実数でない零点はすべてある帯領域 $\alpha_k < \mathrm{Re}(s) < \beta_k$ に含まれ、その外側には実数零点しか存在しない。より詳しく述べると、$\zeta^{(k)}(s)$ が $\mathrm{Re}(s) \geq \beta_k$ に零点を全く持たず、$\mathrm{Re}(s) \leq \alpha_k$ には実数零点しか持たない。また、それらの実数零点はそれぞれ $\zeta(s)$ 自身の自明な零点と一対一対応している。このことにより、$\zeta^{(k)}(s)$ の実数零点を自明な零点とし、実数でない零点を非自明な零点と見なして良い。$k = 1$ の場合に限れば、$\zeta'(s)$ は $\mathrm{Re}(s) \leq 0$ において、実数でない零点を持たない。つまり、$\alpha_1 = 0$ と取れる。しかし、この結果は $k \geq 2$ に対して成り立たない ([Spi65, Fig. 1 と Table II] を参照)。よって、Speiser [Spe35] の結果において「$\zeta'(s)$ が $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ で実数でない零点を持たない」と書き換えられる。残念ながら、現在も Speiser [Spe35] の結果はすべての導関数に対して拡張されていない。C. Y. Yıldırım [Yil96b, Yil20] は $\zeta''(s)$ と $\zeta'''(s)$ の零点に対して、[Spe35] に類似する結果に挑んだが、[Spe35] で示された同値条件は得られなかった。$\zeta(s)$ の場合と併用し、これから、$\zeta^{(k)}(s)$ の実数でない零点を「非自明な零点」と称する。

前段落で紹介した Speiser の結果 [Spe35] は N. Levinson と H. L. Montgomery [LM74, Theorem 1 とその Corollary] により解析的な手法で再証明された。特に、Levinson と Montgomery [LM74, Theorem 1] は $0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ における $\zeta(s)$ と $\zeta'(s)$ の零点の個数がほぼ

等しいことを示し、Speiser の結果 [Spe35] の量的な言い換えを与えた。正確に述べると、$N^{-}(T)$ を $\{\sigma+it \in \mathbb{C} : 0<\sigma<1/2,\, 0<t<T\}$ における $\zeta(s)$ の零点の重複度込みの個数とし、同様に、$N_1^{-}(T)$ を $\zeta'(s)$ の $\{\sigma+it \in \mathbb{C} : 0<\sigma<1/2,\, 0<t<T\}$ における零点の重複度込みの個数とする。$T \geq 2$ に対して、

$$N^{-}(T) = N_1^{-}(T) + O(\log T) \tag{1.1}$$

が成り立つ。ここで用いた O-記号は以降もよく用いられるが、正実関数 g に対して $f(z) = O(g(|z|))$ は、指定範囲において $|f(z)| \leq Cg(|z|)$ となる定数 $C>0$ が存在することを意味する。z の範囲として $|z| \to \infty$ と考えて良いが、以降よく使われるのが、例えば、$s=\sigma+it$ に対して、$t \to \infty$ のとき $f(s) = O(g(t))$ というような σ に関して一様の評価である。

高階導関数の場合は、以上で述べたように Speiser の結果に辿り着いていないが、$\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ において有限個の非自明な零点（実数でない零点）しか持たなければ、全ての導関数も同様に $\mathrm{Re}(s) < 1/2$ において有限個の非自明な零点（実数でない零点）しか持たない。これは Levinson と Montgomery [LM74, Theorem 7] の結果である。この講究録の主結果はこの結果のセルバーグクラスの L 関数に対して拡張したものである。

2 ディリクレ L 関数の場合

前節で述べた研究は $q>1$ を法とする主指標でない原始的指標 χ に付随するディリクレ L 関数 $L(s,\chi)$ に対しても拡張できる。まずは、$L(s,\chi)$ の零点について簡約に説明する。$\zeta(s)$ の場合と同様に、主指標でない原始的指標 χ に付随する $L(s,\chi)$ も類似の関数等式を満たし、

$$\kappa := \begin{cases} 0, & \chi(-1)=1, \\ 1, & \chi(-1)=-1 \end{cases}$$

と定めると、$L(s,\chi)$ は $s=-\kappa, -2-\kappa, -4-\kappa, -6-\kappa, \ldots$ において自明な零点を持つ。それ以外の零点は非自明な零点と呼ばれ、等差数列における素数定理も考慮すれば、$\zeta(s)$ と同じく臨界帯領域 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ の中のみに存在する。

C. Y. Yıldırım [Yil96a, Theorem 2 と Theorem 3] は $L(s,\chi)$ の k 階導関数 $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点について、非零領域を調べ、それに基づいて $L^{(k)}(s,\chi)$ の零点を次のように分類した：

- $\{\sigma+it : \sigma \leq -q^{K}, |t| \leq \varepsilon\}$ にある自明な零点、
- $\{s=\sigma+it : |s| \leq q^{K}, \sigma \leq -\varepsilon\}$ にある "放浪" 零点と
- $\{\sigma+it : \sigma > -\varepsilon\}$ にある非自明な零点。

ここで、$\varepsilon>0$ は任意であり、$K>0$ は k と ε に依存する大きな定数である。H. Akatsuka と筆者 [AS18, Theorem 1, Theorem 2 と Theorem 4] は、Yıldırım が示した非零領域を $k=1$ の場合に対して改良し、"放浪" 零点が存在しないことを示した。

定理 1 (Akatsuka と A.I.S. (2018) [AS18, Theorems 1–4]).

1. $\Theta(\chi) := \sup\{\mathrm{Re}(\rho) : \rho \in \mathbb{C},\ L(\rho,\chi)=0\}$ と

$$\mathcal{D}_1(\chi) := \left\{\sigma + it : \sigma \le 1 - \Theta(\chi),\ |t| \ge \frac{6}{\log q}\right\} \setminus \{\rho \in \mathbb{C} : L(\rho,\chi)=0\},$$
$$\mathcal{D}_2(\chi) := \left\{\sigma + it : \sigma \le -q^2,\ |t| \ge \frac{12}{\log|\sigma|}\right\}$$

としたとき、$s \in \mathcal{D}_1(\chi) \cup \mathcal{D}_2(\chi)$ に対して、$L'(s,\chi) \ne 0$ である。

2. $j \in \mathbb{N}$ に対して、次が成り立つ。

- $L'(s,\chi)$ は $-2j-\kappa-1 < \mathrm{Re}(s) < -2j-\kappa+1$ に唯一な零点

$$-2j-\kappa+O\left(\frac{1}{\log(jq)}\right)$$

を持つ。

- $\mathrm{Re}(s) = -2j-\kappa+1$ 上、$L'(s,\chi) \ne 0$ である。

3. $-\kappa-1 < \mathrm{Re}(s) < 0$ に対して、次が成り立つ。

- $\kappa = 0$ と $q \ge 7$ のとき、$-1 \le \mathrm{Re}(s) \le 0$ に $L'(s,\chi) \ne 0$ である。
- $\kappa = 1$ と $q \ge 23$ のとき、$-2 \le \mathrm{Re}(s) \le 0$ に $L'(s,\chi)$ は唯一な零点を持つ。

この新しい非零領域 (定理 1) により、$\mathrm{Re}(s) \le 0$ における $L'(s,\chi)$ の零点は、高々有限個を除いて $L(s,\chi)$ の自明な零点に一対一対応していることがわかる。また、それらの $L'(s,\chi)$ の零点は $L(s,\chi)$ の自明な零点の近くに存在する。よって、$L'(s,\chi)$ の $\mathrm{Re}(s) \le 0$ における零点を自明な零点とし、$\mathrm{Re}(s) > 0$ における零点を非自明な零点と分類してよい。その分類は $L(s,\chi)$ 自身の場合に一致することに注目。

補足 1 (Yıldırım (1996) [Yil96a, Theorem 2]). $k \ge 1$ に対して、$m := \min\{n \in \mathbb{Z}_{\ge 2} : \chi(n) \ne 0\}$ とおくと、

$$\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{m}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k^2}{m \log m}}\right)$$

において、$L^{(k)}(s,\chi) \ne 0$ である。

冒頭で述べた Speiser [Spe35] の結果は $L(s,\chi)$ と $L'(s,\chi)$ に対して拡張できる。Akatsuka と筆者 [AS18, Theorem 7] は前節で紹介した Levinson と Montgomery [LM74, Theorem 1] の結果 (1.1) を、$L(s,\chi)$ と $L'(s,\chi)$ に対して次のように拡張し、Speiser の結果 [Spe35] の $L(s,\chi)$ 類似を示した。

定理 2 (Akatsuka と A.I.S. (2018) [AS18, Theorem 5]). $N^-(T,\chi)$ と $N_1^-(T,\chi)$ をそれぞれ、$\{\sigma+it\in\mathbb{C} : 0<\sigma<1/2,\ |t|\le T\}$ における $L(s,\chi)$ と $L'(s,\chi)$ の重複度込みの個数とする。このとき、

$$N^-(T,\chi)=N_1^-(T,\chi)+O\left(m^{1/2}\log qT\right)$$

が成り立つ。

$\zeta'(s)$ の非零領域を用いれば、Speiser [Spe35] の結果は

(2.1)

$$\zeta'(s)\neq 0 \text{ が } 0<\mathrm{Re}(s)<1/2 \text{ に成立} \iff \zeta'(s)\neq 0 \text{ が } 0<\mathrm{Re}(s)<1/2 \text{ に成立つ}$$

に書き換えられる。定理 2 を用いて (2.1) が $L(s,\chi)$ に拡張できる。

定理 3 (Akatsuka と A.I.S. (2018) [AS18, Theorem 8 と Theorem 9]).

1. $\kappa=0$ と $q\ge 216$ であるとき、次の *(i)* と *(ii)* は同値である。

  (i) $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ において $L(s,\chi)\neq 0$ である。

  (ii) $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ において $L'(s,\chi)$ は唯一な零点を持つ。

2. $\kappa=1$ と $q\ge 23$ であるとき、次の *(i)* と *(ii)* は同値である。

  (i) $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ において $L(s,\chi)\neq 0$ である。

  (ii) $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ において $L'(s,\chi)\neq 0$ である。

補足 2. 一般リーマン予想の必要条件 (i)⇒(ii) は既に Yıldırım [Yil96a, Theorem 1] により示された。

$\kappa=0$ の場合に対して、$0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ に現れる $L'(s,\chi)$ の唯一な零点は、Akatsuka と筆者 [AS18] の分類により非自明な零点であるが、$s=0$ における $L(s,\chi)$ の自明な零点に対応するため、$L'(s,\chi)$ の自明な零点と見なしてよい。定理 3 が意味するのは、$L'(s,\chi)$ が $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ にそれ以外の零点を持たないことは一般リーマン予想の同値条件である。

前節の最後に紹介した Levinson と Montgomery [LM74, Theorem 7] の結果は $L(s,\chi)$ に対しても知られている。これは Yıldırım [Yil96a, Theorem 3 と Theorem 5] によって示された。

3　セルバーグクラスのの L 関数

いよいよ、本題の「セルバーグクラス」に移る。セルバーグクラス $\mathcal{S}$ とは次の 4 つの公理を満たす、$\mathrm{Re}(s)>1$ において絶対収束するディリクレ級数表示

$$\mathcal{L}(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

を持つ関数の集まりである。

I. 【ラマヌジャン予想】 $f(n) \ll_\epsilon n^\epsilon$.

II. 【解析接続】 $(s-1)^k\mathcal{L}(s)$ が有限オーダーの整関数となるような整数 $k \geq 0$ は存在する。

III. 【関数等式】 実数 $Q > 0$, $\lambda_j > 0$、$\Re(\mu)_j \geq 0$ を満たす $\mu_j \in \mathbb{C}$ 及び $|\omega| = 1$ を満たす $\omega \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathfrak{L}(s) := \mathcal{L}(s)Q^s \prod_{j \leq r} \Gamma\left(\lambda_j s + \mu_j\right)$$

とおくと、$\mathcal{L}(s)$ は関数等式

$$\mathfrak{L}(s) = \omega\overline{\mathfrak{L}(1-\overline{s})}.$$

を満たす。

IV. 【オイラー積】 $b(p^k) \ll p^{k\theta}$ となる $\theta < 1/2$ が存在するとし、

$$\mathcal{L}_p(s) = \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{b(p^k)}{p^{ks}}\right)$$

とおくと、$\mathcal{L}(s)$ は無限積表示

$$\mathcal{L}(s) = \prod_{p:\,\text{素数}} \mathcal{L}_p(s)$$

を満たす。

公理 II に関して、筆者らの補題 [CKS23, Lemma 4.2] でも示されたように、ディリクレ級数表示および関数等式により、オーダーは実際に 1 である。さらに、全ての導関数も同じくオーダー 1 の整関数に接続できる。即ち、任意の $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、$(s-1)^{\ell+\nu}\mathcal{L}^{(\ell)}(s)$ はオーダー 1 の整関数である。

関数等式（公理 III）に現れるパラメーターは一意的に決まると限らないが、

$$d_{\mathcal{L}} := 2\sum_{j\leq r}\lambda_j, \quad \lambda := \prod_{j\leq r}\lambda_j^{2\lambda_j}, \quad \xi := 2\sum_{j\leq r}\left(\mu_j - \frac{1}{2}\right) =: \eta + i\Theta.$$

とおくと、$d_{\mathcal{L}}$, λQ^2 と ξ は各 $\mathcal{L} \in \mathcal{S}$ に対して（実際は $\mathcal{S}$ に限らず拡張されたセルバーグクラスの L 関数に対しても）一意的に定まる。また、公理 III の関数等式を次の非対称的な形に書き換えられる：

$$\Delta_{\mathcal{L}}(s) := \omega Q^{1-2s} \prod_{j\leq r} \frac{\Gamma\left(\lambda_j(1-s) + \overline{\mu_j}\right)}{\Gamma\left(\lambda_j s + \mu_j\right)}$$

とおくと、

$$\mathcal{L}(s) = \Delta_{\mathcal{L}}(s)\overline{\mathcal{L}(1-\overline{s})}.$$

補足 3. 我々が興味を持っている L 関数の性質に最も影響するのが公理 II と公理 III であり、それのみを満たすディリクレ級数で定まる関数の集まりを「拡張されたセルバーグクラス」と通称される。

前の節で紹介したリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と $q>1$ を法とする主指標でない原始的指標 χ に付随するディリクレ L 関数 $L(s,\chi)$ もセルバーグクラス $\mathcal{S}$ の元である。$\zeta(s)$ は

$$\begin{aligned} &\text{I. } f(n)=1\ (\forall n\in\mathbb{N}), && \text{III. } \omega=1,\ Q=\pi^{-1/2},\ r=1,\ \lambda_1=1/2,\ \mu_1=0,\\ &\text{II. } \nu=1, && \text{IV. } b(1)=0,\ b(n)=\Lambda(n)/\log n\ (\forall n\in\mathbb{N}_{\geq 2}) \end{aligned}$$

の場合であり、$L(s,\chi)$ は

$$\begin{aligned} &\text{I. } f(n)=\chi(n)\ (\forall n\in\mathbb{N}), && \text{III. } \omega=\tfrac{\tau(\chi)}{i^{\kappa}q^{1/2}},\ Q=(\pi/q)^{-1/2},\ r=1,\ \lambda_1=1/2,\ \mu_1=\kappa/2,\\ &\text{II. } \nu=0, && \text{IV. } b(1)=0,\ b(n)=\chi(n)\Lambda(n)/\log n\ (\forall n\in\mathbb{N}_{\geq 2}) \end{aligned}$$

の場合である。

4　主結果

講演でも紹介した筆者ら [CKS23] の主結果の一つ目は $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$ の導関数の自明な零点の位置に関するものである。これは定理 1（原文 [AS18, Theorems 1–4]）の一般化である。

定理 4 (Chaubey, Khurana と A.I.S. (2023) [CKS23, Theorem 1.1])**.** $\mathcal{L}\in\mathcal{S}$ 対して

$$T_{\mathcal{L}}:=\max_{j}\left|\frac{\mathrm{Im}(\mu_j)}{\lambda_j}\right|$$

とく。

1. $\mathrm{Re}(s)<-\alpha_{\mathcal{L},k}$, $|\mathrm{Im}(s)|>T_{\mathcal{L}}$ において、$\mathcal{L}^{(k)}(s)\neq 0$ となるような $\alpha_{\mathcal{L},k}>0$ が存在する。
2. 更に、$|\mathrm{Im}(s)|\leq T_{\mathcal{L}}$ において、小さな定数 $c_k, t_{\mathcal{L},k}>0$ に対し、

$$\max_{1\leq j\leq r}\frac{\pm c_k-2\mu_j-2N_{\mathcal{L},k}}{2\lambda_j}<-\alpha_{\mathcal{L},k}$$

となる $N_{\mathcal{L},k}\in\mathbb{N}$ が存在し、全ての $1\leq j\leq r$, $n\geq N_{F,k}$ に対して、$\dfrac{\pm c_k-2\mu_j-2n}{2\lambda_j}\pm it_{\mathcal{L},k}$ を頂点とする長方形 $\mathcal{R}_{n,j}$ で囲まれる領域内においては $\mathcal{L}^{(k)}(s)$ がちょうど一つの零点

$$z_{n,j}^{(k)}=-\frac{n}{\lambda_j}+O_k(1)$$

を持つ。

上記の結果により、$\mathcal{L}(s) \in \mathcal{S}$ は $\mathrm{Re}(s) < -\alpha_{\mathcal{L},k}$ において自明な零点 $z_{n,j}^{(k)}$ しか持たない。証明には、関数等式（公理 III）を用いて、左半平面 $\mathrm{Re}(s) < 0$ において $\mathcal{L}^{(k)}(s) \neq 0$ となる領域を探す。次に、$\mathcal{L}^{(k)}(s)$ の自明な零点をそれぞれ一つの長方形で囲むように、適切な長方形を定める。

最後に、上記の定理 4（原文 [CKS23, Theorem 1.1]）を用いて、第 1 節で記述した Levinson と Montgomery の結果 [LM74, Theorem 7] は次のように一般化できる。

定理 5 (Chaubey, Khurana と A.I.S. (2023) [CKS23, Theorem 1.2])**.** $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。$\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 1/2,\ |\mathrm{Im}(s)| > T_{\mathcal{L},\ell}\}$ において $\mathcal{L}^{(\ell)}(s)$ が高々有限個の零点しか持たないような $T_{\mathcal{L},\ell} > 0$ が存在すれば、全ての $j \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathcal{L}^{(\ell+j)}(s)$ も $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) < 1/2,\ |\mathrm{Im}(s)| > T_{\mathcal{L},\ell}\}$ において高々有限個の零点しか持たない。

証明の主なポイントは各導関数 $\mathcal{L}^{(\ell)}(s)$ に対して、その対数微分を評価し、$\mathcal{L}^{(\ell+1)}(s)$ の零点と $\mathcal{L}^{(\ell)}(s)$ の零点の関係を明らかにする。前節で述べたように、全ての $\ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して、$(s-1)^{\ell+\nu}\mathcal{L}^{(\ell)}(s)$ はオーダー 1 の整関数であるが、それを用いて、$(s-1)^{\ell+\nu}\mathcal{L}^{(\ell)}(s)$ に対してアダマールの因数分解定理を適用する。そこで、対数微分を取れば、

$$\frac{\mathcal{L}^{(\ell+1)}}{\mathcal{L}^{(\ell)}}(s)$$

に対して、評価しやすい $\mathcal{L}^{(\ell)}(s)$ の零点からなる級数表示が得られる。その表示を用いて評価を行う。

参考文献

[AS18] H. Akatsuka and A. I. Suriajaya, *Zeros of the first derivative of Dirichlet L-functions*, J. Number Theory **184** (2018), 300–329.

[CKS23] S. Chaubey, S. Khurana, A. I. Suriajaya, *Zeros of derivatives of L-functions in the Selberg class on* $\mathrm{Re}(s) < 1/2$, Proc. Amer. Math. Soc. **151** (2023), no. 5, 1855–1866.

[Kor58a] N. M. Korobov, *Weyl's estimates of sums and the distribution of primes*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **123** (1958), 28–31. (in Russian)

[Kor58b] N. M. Korobov, *Estimates of trigonometric sums and their applications*, Uspehi Mat. Nauk **13** (1958), no. 4 (82), 185–192. (in Russian)

[LM74] N. Levinson and H. L. Montgomery, *Zeros of the derivative of the Riemann zeta-function*, Acta Math. **133** (1974) 49–65.

[Rie59] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie (Nov. 1859), 671–680.

[Spe35] A. Speiser, *Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion*, Math. Ann. **110** (1935), 514–521.

[Spi70] R. Spira, *Another zero-free region for $\zeta^{(k)}(s)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), 246–247.

[Spi65] R. Spira, *Zero-free regions of $\zeta^{(k)}(s)$*, J. Lond. Math. Soc. **40** (1965), 677–682.

[Spi73] R. Spira, *Zeros of $\zeta'(s)$ and the Riemann hypothesis*, Illinois J. Math. **17** (1973), 147–152.

[Spi72] R. Spira, *Zeros of $\zeta'(s)$ in the critical strip*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 59–60.

[Tit86] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, 2nd ed. (revised by D. R. Heath-Brown), Oxford Science Publications, Oxford, 1986.

[Vin58] I. M. Vinogradov, *A new estimate of the function $\zeta(1+it)$*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **22** (1958), 161–164. (in Russian)

[Yil96a] C. Y. Yıldırım, *Zeros of derivatives of Dirichlet L-functions*, Turkish J. Math. **20** (1996), 521–534.

[Yil96b] C. Y. Yıldırım, *A Note on $\zeta''(s)$ and $\zeta'''(s)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), no. 8, 2311–2314.

[Yil20] C. Y. Yıldırım, *Zeros of $\zeta''(s)$ & $\zeta'''(s)$ in $\sigma < \frac{1}{2}$*, Turkish J. Math. **24** (2000), no. 1, 89–108.

Faculty of Mathematics, Kyushu University
744 Motooka, Nishi-ku, Fukuoka 819-0395
JAPAN

E-mail address: adeirmasuriajaya@math.kyushu-u.ac.jp

九州大学 数理学研究院　Ade Irma Suriajaya

以上