零点問題における許容範囲を持つ縮小射影法とその応用
(A SHRINKING PROJECTION METHOD WITH ALLOWABLE RANGE FOR ZERO POINT PROBLEMS AND ITS APPLICATIONS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育学部
(COLLEGE OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

梶葉駿介 (SHUNSUKE KAJIBA)
横浜国立大学大学院 環境情報学府
(GRADUATE SCHOOL OF ENVIRONMENT AND INFORMATION SCIENCES, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

中野龍治 (RYUJI NAKANO)
横浜国立大学大学院 先進実践学環
(ADVANCED PRACTICAL GRADUATE SCHOOL, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1 はじめに

H を実ヒルベルト空間とし, $A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする. 零点問題とは,

$$0 \in Ax$$

を満たす H の元 x を求める問題をいう. また, このような x を A の零点といい, 零点全体の集合は $A^{-1}0$ を用いて表す. 零点問題は, 凸最小化問題, 変分不等式問題, 相補性問題等の多くの非線形問題を一般化した問題であり, 零点問題を解く代表的な手法に近接点法がある. 近接点法は 1970 年に Martinet [5] によって提案され, 1976 年に Rockafellar [10] が弱収束定理を示した.

定理 1.1 (Rockafellar [10])**.** H を実ヒルベルト空間とし, $A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする. $\{r_n\}$ を有界な正の実数列とする. x_1 を H の元とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n$$

とする. ここで, $J_{r_n} = (I + r_n A)^{-1}$ である. このとき, $\liminf_n r_n > 0$ かつ $A^{-1}0 \neq \emptyset$ とすると, 点列 $\{x_n\}$ は A の零点に弱収束する.

一方, 不動点近似法に関する研究において高橋-竹内-窪田 [12] は, 非拡大写像の不動点を求める手法として縮小射影法と呼ばれる近似法を提案し, ヒルベルト空間において不動点への強収束定理を得た.

定理 1.2 (高橋-竹内-窪田 [12]). H を実ヒルベルト空間とし, $C \subset H$ を空でない閉凸集合とする. $T : C \to C$ を $F(T) \coloneqq \{p \in C : p = Tp\}$ が空でない非拡大写像とする. $0 < a < 1$ とし, $\{\alpha_n\} \subset [0, a[$ を実数列とする. x_0 を H の元とし, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する. $C_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\} \cap C_n, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0 \end{cases}$$

とする. このとき, $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x_0$ に強収束する. ここで, P_K は H から H の空でない閉凸集合 K の上への距離射影である.

なお, 高橋-竹内-窪田 [12] では, 定理 1.2 よりも一般的な非拡大写像族の共通不動点への強収束定理を得ている. 定理 1.2 が示されてから, この手法は多くの研究者によってヒルベルト空間やバナッハ空間で研究が行われ, さらに近接点法の研究においてもこの手法が活発に用いられてきた. しかし, 縮小射影法では点列を構成する際に, 距離射影の正確な値を求める必要があるが, このことは一般的に容易ではない. 木村 [2] はこの問題を解決するために, 距離射影の値に誤差を認める縮小射影法を測地距離空間で提案し, 不動点への近似定理を得た ([3, 4] 等も参照). また, 茨木 [1] はこの誤差を認める手法と近接点法を融合させ, 零点問題の解への近似定理を得た. さらに, 竹内 [13] は木村 [2] とは違うアプローチでこの問題を解決する許容範囲を認める縮小射影法をバナッハ空間で提案し, 不動点への収束定理を得た. 本論文では, 許容範囲を認める手法と近接点法を融合させた零点問題の解への収束定理（主結果）を示す.

2 準備

本論文では H を実ヒルベルト空間とし, 内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表し, この内積から導かれるノルムを $\| \cdot \|$ で表す. 以降, 本論文では常に H は実ヒルベルト空間とし, C は H の空でない部分集合とすることとする. また, $\mathbb{N}$ は正の整数全体の集合を表すこととする. $C \subset H$ を閉凸集合とする. このとき, H の任意の元 x に対して

$$\|z - x\| = \inf_{y \in C} \|y - x\|$$

を満たす C の元 z が一意に存在するが, この H から C の上への写像を P_C で表し, H から C の上への距離射影と呼ぶ. $A \subset H \times H$ が単調作用素であるとは, 任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して, 常に

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

が成り立つときをいう. 単調作用素 $A \subset H \times H$ がすべての $r > 0$ に対して

$$R(I + rA) = H$$

が成り立つとき, A は極大であるという. $A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする. このとき, $A^{-1}0$ は閉凸集合である. さらに, $(a, b) \in H \times H$ とするとき, 任意の $(x, y) \in A$ に対して

$$\langle x - a, y - b \rangle \geq 0$$

が成り立つならば, $(a, b) \in A$ である. また, $r > 0$ と H の元 x に対して

$$J_r x \coloneqq \{z \in H : x \in z + rAz\}$$

を考える．このとき, $J_r x$ は一価である．このような J_r は A のリゾルベントと呼ばれ,

$$J_r = (I + rA)^{-1}$$

で表される (例えば, [11] 等を参照)．ヒルベルト空間では, 以下の二つの補助定理が成立する ([6, 13] を参照).

補助定理 2.1 (Martinez-Yanesa and Xu [6], 竹内 [13])**.** $C \subset H$ を閉凸集合とする．x_0 を H の元とし, $\{x_n\}$ を H の点列とし,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_0 - x_n\| \le \|x_0 - P_C x_0\| \tag{2.1}$$

を満たすとする．このとき,

(1) 部分列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ が C の元 u に弱収束するならば, $u = P_C x_0$ であり, $\{x_{n_i}\}$ は $P_C x_0$ に強収束する.

(2) $\{x_n\}$ のすべての弱収積点が C の元であるならば, $\{x_n\}$ は $P_C x_0$ に強収束する.

補助定理 2.2 (竹内 [13])**.** $\{C_n\} \subset 2^H$ をすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $C_{n+1} \subset C_n$ および $C_0 \coloneqq \bigcap_n C_n \neq \emptyset$ を満たす空でない閉凸集合列とする．x_0 を H の元とし, 点列 $\{x_n\}, \{z_n\}$ を次のように構成する．$x_1 = P_{C_1} x_0$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, \\ K_n = \{z \in C_n : \|x_0 - z\| \le \|x_0 - x_{n+1}\|\}, \\ z_n \in K_n \end{cases}$$

とする．このとき, $\{x_n\}, \{z_n\}$ は共に $P_{C_0} x_0$ に強収束する.

注意 2.3 (竹内 [13])**.** 補助定理 2.1 の式 (2.1) は, 以下のように置き換えても成立する.

$$\|x_0 - x_n\| \le \|x_0 - x_{n+1}\| \le \|x_0 - P_C x_0\| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

また, 補助定理 2.2 は竹内 [13] ではバナッハ空間の命題として示されているが, 本論文ではヒルベルト空間に限定した形で引用した.

3 縮小射影法

本節では, 誤差付きの縮小射影法と許容範囲を持つ縮小射影を紹介し, 主結果である零点問題の解への収束定理を証明する.

3.1 誤差付きの縮小射影法

2012 年に木村 [2] は縮小射影法に誤差を認める手法を提案し, 2014 年にヒルベルト空間において非拡大写像の不動点に関する近似定理を示した ([3] を参照).

定理 3.1 (木村 [3])**.** $C \subset H$ を有界な閉凸集合とし, $D = \operatorname{diam} C = \sup_{x,y\in C} \|x - y\| < \infty$ とする．$T : C \to H$ を $F(T)$ が空でない非拡大写像とし, $\{\epsilon_n\}$ を $\epsilon_0 = \limsup_n \epsilon_n < \infty$ を満たす非負の実数列とす

る. u を H の元, x_1 を $\|u-x_1\| < \epsilon_1$ を満たす C の元, $C_1 = C$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_{n+1} = \{z \in C : \|z - Tx_n\| \leq \|z - x_n\|\} \cap C_n, \\ x_{n+1} \in \{z \in C_{n+1} : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \epsilon_{n+1}^2\} \end{cases}$$

とする. このとき,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| \leq 2\epsilon_0$$

となる. さらに $\epsilon_0 = 0$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}u$ に強収束する.

なお, 木村 [3] では, 定理 3.1 よりも一般的な非拡大写像族の共通不動点への近似定理を得ている. これらの結果を受けて, 茨木 [1] は縮小射影法に誤差を認める手法を, ヒルベルト空間における極大単調作用素の零点問題へ適用して近似定理を示した.

定理 3.2 (茨木 [1]). $A \subset H \times H$ を $A^{-1}0$ が空でない極大単調作用素とする. $\{\delta_n\}$ を $\delta_0 = \limsup_n \delta_n < \infty$ を満たす非負の実数列とし, $\{r_n\}$ を $\liminf_n r_n > 0$ を満たす正の実数列とする. u を H の元, $x_1 = x \in H$, $C_1 = H$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = J_{r_n} x_n, \\ C_{n+1} = \{z \in H : \langle y_n - z, x_n - y_n \rangle \geq 0\} \cap C_n, \\ x_{n+1} \in \{z \in H : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}^2\} \cap C_{n+1} \end{cases}$$

とする. このとき,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \leq \delta_0$$

となる. さらに $\delta_0 = 0$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}u$ に強収束する.

3.2 許容範囲を持つ縮小射影法

誤差付きの縮小射影法とは異なるアプローチで縮小射影法の問題を解決する手法として, 2019 年に竹内 [13] は許容範囲を持つ縮小射影法を提案した. さらに, バナッハ空間において非拡大型非線形写像に対して, 不動点への強収束定理を得た.

定理 3.3 (竹内 [13]). $C \subset H$ を閉凸集合とする. $T : C \to H$ を $F(T)$ が空でない堅非拡大写像とする. x_0 を H の元とし, 点列 $\{x_n\}, \{u_n\}$ を次のように構成する. $C_1 = D_1 = C$, $x_1 = P_{C_1}x_0$, $u_1 \in D_1$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle u_n - Tu_n, Tu_n - z \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, \\ D_{n+1} = \{z \in C_n : \|x_0 - z\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|,\ z \neq u_n\}, \\ u_{n+1} \in D_{n+1} \end{cases}$$

とすると, 以下のいずれかが成立する.

(1) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して D_n が空でないとき, $\{x_n\}, \{u_n\}$ は共に $P_{F(T)}x_0$ に強収束する.
(2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して D_k が空のとき, $u_{k-1} \in F(T)$ となる.

注意 3.4. 本論文ではヒルベルト空間で近似理論を議論するため, 竹内 [13] の結果を他の結果と比較しやすくなるように, ヒルベルト空間に限定し, さらに点列の構成方法等の一部を簡略化した定理 3.3 の形で引用した. もちろん, [13] の証明を確認すれば定理 3.3 が導けることが分かる.

許容範囲を持つ縮小射影法に関しては, 不動点近似法における成果は知られていたが, 零点問題に関する成果は知られていない. 本論文ではこれらの先行研究を受けて, 許容範囲を持つ縮小射影法をヒルベルト空間における極大単調作用素の零点問題に適用する. まず, 主結果の証明に必要な補助定理を示す.

補助定理 3.5. $A \subset H \times H$ を $A^{-1}0$ が空でない極大単調作用素とする. $\{r_n\}$ を $\liminf_n r_n > 0$ を満たす正の実数列とする. H の点列 $\{u_n\}$ と集合列 $\{C_n\}$ を次のように構成する. $u_1 \in H$, $C_1 = H$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} \quad y_n = J_{r_n} u_n, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \langle y_n - z, u_n - y_n \rangle \geq 0\}, \\ u_{n+1} \in C_{n+1} \end{cases}$$

とする. ここで, $C_0 \coloneqq \bigcap_n C_n$ とする. このとき, 以下を得る.

(1) すべての $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して C_n は閉凸集合であり, かつ $A^{-1}0 \subset C_n$ が成立する.
(2) $\{u_n\}$ が C_0 の元 u_0 に強収束するならば, $u_0 \in A^{-1}0$ となる.

証明. まず, (1) を示す. すべての $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, C_n が閉凸集合となることは自明. そこで, すべての $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $A^{-1}0 \subset C_n$ となることを示す. $A^{-1}0 \subset H = C_1$ である. 次に, ある $k \in \mathbb{N}$ について $A^{-1}0 \subset C_k$ が成り立つとする. $y_k = J_{r_k} u_k$ とリゾルベントの定義より, $(y_k, \frac{u_k - y_k}{r_k}) \in A$ である. A が単調作用素であることより, 任意の $z \in A^{-1}0$ に対して

$$0 \leq \left\langle y_k - z, \frac{u_k - y_k}{r_k} - 0 \right\rangle = \frac{1}{r_k} \langle y_k - z, u_k - y_k \rangle$$

を得る. したがって,

$$0 \leq \langle y_k - z, u_k - y_k \rangle$$

となる. 仮定より, $A^{-1}0 \subset C_k$ なので $z \in C_{k+1}$ を得る. つまり, $A^{-1}0 \subset C_{k+1}$ である. したがって, 帰納法より, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $A^{-1}0 \subset C_n$ が言える. これより, $A^{-1}0 \subset \bigcap_n C_n = C_0$ となり, (1) は示された.

次に, (2) を示す. $\{u_n\}$ が C_0 のある元 u_0 に強収束するとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $C_0 \subset C_n$ より,

$$0 \leq \langle y_n - u_0, u_n - y_n \rangle = \langle y_n - u_n, u_n - y_n \rangle + \langle u_n - u_0, u_n - y_n \rangle$$

を得る. これより,

$$\|u_n - y_n\|^2 \leq \langle u_n - u_0, u_n - y_n \rangle \leq \|u_n - u_0\| \|u_n - y_n\|$$

である. したがって,

$$\|u_n - y_n\| \leq \|u_n - u_0\|$$

を得る. $\{u_n\}$ は u_0 に強収束するため, $\|u_n - y_n\| \to 0$ となる. これと $\liminf_n r_n > 0$ より,

$$\left\| \frac{u_n - y_n}{r_n} \right\| = \frac{1}{r_n} \|u_n - y_n\| \to 0$$

となる. また,

$$\|y_n - u_0\| \leq \|y_n - u_n\| + \|u_n - u_0\| \to 0$$

となり, $y_n \to u_0$ を得る．さらに, A が単調作用素であることより, 任意の $(s,t) \in A$ に対して

$$0 \le \left\langle s - y_n, t - \frac{u_n - y_n}{r_n} \right\rangle$$

である．したがって,

$$0 \le \langle s - u_0, t - 0 \rangle$$

となる．A の極大性より, $u_0 \in A^{-1}0$ を得る． □

次に, 許容範囲を持つ縮小射影法を用いて, ヒルベルト空間における極大単調作用素の零点問題の解への強収束定理（主結果）を証明する．

定理 3.6. $A \subset H \times H$ を $A^{-1}0$ が空でない極大単調作用素とする．$\{r_n\}$ を $\liminf_n r_n > 0$ を満たす正の実数列とする．x_0 を H の元とし, 点列 $\{x_n\}, \{u_n\}$ を次のように構成する．$C_1 = D_1 = H$, $x_1 = P_{C_1}x_0$, $u_1 \in D_1$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = J_{r_n}u_n, \\ C_{n+1} = \{z \in H : \langle u_n - y_n, y_n - z \rangle \ge 0\} \cap C_n, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \\ D_{n+1} = \{z \in H : \|x_0 - z\| \le \|x_0 - x_{n+1}\|,\ z \ne u_n\} \cap C_n, \\ u_{n+1} \in D_{n+1} \end{cases}$$

とすると, 以下のいずれかが成立する．

(1) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して D_n が空でないとき, $\{x_n\}, \{u_n\}$ は共に $P_{A^{-1}0}x_0$ に強収束する．
(2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して D_k が空のとき, $u_{k-1} \in A^{-1}0$ となる．

証明．まず, (1) を示す．$\{x_n\}, \{u_n\}$ は共に $P_{A^{-1}0}x_0$ に強収束することを示す．すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, D_n が空でないとすると, 空でない集合列 $\{C_n\}, \{D_n\}$ と点列 $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ を定義することができる．補助定理 3.5 (1) より, $\{C_n\}$ はすべての $n \in \mathbb{N}$ で $C_{n+1} \subset C_n$ および $C_0 \coloneqq \cap_n C_n \ne \emptyset$ を満たす閉凸集合列である．ここで, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, K_n を補助定理 2.2 で定義された集合とする．すなわち,

$$K_n = \{z \in C_n : \|x_0 - z\| \le \|x_0 - x_{n+1}\|\}$$

とする．このとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $u_{n+1} \in D_{n+1} \subset K_n$ である．したがって, 補助定理 2.2 より $\{x_n\}, \{u_n\}$ は共に $P_{C_0}x_0$ に強収束する．また, 補助定理 3.5 (2) より $P_{C_0}x_0 \in A^{-1}0 \subset C_0$ となる．すなわち, $P_{C_0}x_0 = P_{A^{-1}0}x_0$ である．したがって, $\{x_n\}, \{u_n\}$ は共に $P_{A^{-1}0}x_0$ に強収束する．

次に, (2) を示す．$D_1 \ne \emptyset$ より, $u_1 \in D_1$ が存在し, y_1, C_2, x_2, D_2 が定義できる．このとき, C_2 は空でない閉凸集合であるが, D_2 は空になる可能性がある．もし, $D_2 \ne \emptyset$ ならば, $u_2 \in D_2$ が存在し, y_2, C_3, x_3, D_3 に同様のことが言える．この手順を進め, ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して, $D_k = \emptyset$ になったとする．このとき, $D_{k-1}, u_{k-1}, y_{k-1}, C_k, x_k$ まで定義でき, C_k, C_{k-1} は空でない閉凸集合で, $u_{k-1} \in D_{k-1}$ である．ここで, K_n の定義より, $x_k, x_{k-1} \in K_{k-1}$ であるから, $K_{k-1} \ne \emptyset$ となる．また, $K_{k-1} \setminus \{u_{k-1}\} = D_k = \emptyset$ より, K_{k-1} は一元集合となるため, $x_k = x_{k-1} = u_{k-1}$ である．$u_{k-1} = x_k \in C_k$ と C_n の定義より,

$$0 \le \langle u_{k-1} - y_{k-1}, y_{k-1} - u_{k-1} \rangle = -\|u_{k-1} - y_{k-1}\|^2$$

となり, $y_{k-1} = u_{k-1}$ を得る. ここで, リゾルベントの定義より,

$$u_{k-1} = y_{k-1} = J_{r_{k-1}} u_{k-1} \Leftrightarrow 0 \in A u_{k-1}$$

となり, $u_{k-1} \in A^{-1}0$ を得る. $\square$

4 応用

本節では, 主結果 (定理 3.6) を用いて凸最小化問題, 変分不等式問題, 相補性問題の解への近似法を扱う.

4.1 凸最小化問題

$f : H \to]-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このとき, 凸最小化問題とは

$$f(x_0) = \min_{z \in H} f(z)$$

を満たす H の元 x_0 を求める問題をいう. f の劣微分 ∂f を, $x \in H$ に対して

$$\partial f(x) \coloneqq \{z \in H : f(x) + \langle y - x, z \rangle \leq f(y), \ {}^{\forall} y \in H\}$$

と定義する. このとき, $\partial f \subset H \times H$ は極大単調作用素であり, $(\partial f)^{-1}0 = \operatorname{argmin}\{f(z) : z \in H\}$ であることが知られている ([7, 8] を参照). また, $r > 0$ とし, J_r を ∂f のリゾルベントとすると, $x \in H$ に対して

$$J_r x = \operatorname*{argmin}_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r} \|z - x\|^2 \right\}$$

が成立する. この式と定理 3.6 の直接的な結果として, 凸最小化問題の解への強収束定理を得る.

系 4.1. $C \subset H$ を閉凸集合とし, $f : H \to]-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0$ が空でない下半連続な真凸関数とする. $\{r_n\}$ を $\liminf_n r_n > 0$ を満たす正の実数列とする. x_0 を H の元とし, 点列 $\{x_n\}, \{u_n\}$ を次のように構成する. $C_1 = D_1 = H$, $x_1 = P_{C_1} x_0$, $u_1 \in D_1$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = \operatorname*{argmin}_{z \in H} \left\{ f(z) + \dfrac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 \right\}, \\ C_{n+1} = \{z \in H : \langle u_n - y_n, y_n - z \rangle \geq 0\} \cap C_n, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, \\ D_{n+1} = \{z \in H : \|x_0 - z\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, \ z \neq u_n\} \cap C_n, \\ u_{n+1} \in D_{n+1} \end{cases}$$

とすると, 以下のいずれかが成立する.

(1) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して D_n が空でないとき, $\{x_n\}, \{u_n\}$ は共に $P_{(\partial f)^{-1}0} x_0$ に強収束する.
(2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して D_k が空のとき, $u_{k-1} \in (\partial f)^{-1}0$ となる.

4.2 変分不等式問題

$C \subset H$ を閉凸集合とし, $T : C \to H$ を写像とする. 変分不等式問題とは, すべての $y \in C$ に対して

$$\langle T x_0, y - x_0 \rangle \geq 0$$

を満たす C の元 x_0 を求める問題をいい, 変分不等式問題の解全体の集合を $VI(C,T)$ で表す. $x \in C$ に対して, C の正規錘 $N_C(x)$ を

$$N_C(x) \coloneqq \{z \in H : \langle y-x, z\rangle \leq 0,\ {}^\forall y \in C\}$$

で定義する. ここで, $N_C(x)$ は閉凸錘となる. $T : C \to H$ を単調でヘミ連続な写像とする. このとき, $A \subset H \times H$ を

$$Az \coloneqq \begin{cases} Tz + N_C(z) & (z \in C) \\ \emptyset & (z \notin C) \end{cases}$$

で定義すると, A は極大単調作用素であり, $VI(C,T) = A^{-1}0$ であることが知られている ([9] を参照). また, $r > 0$ とし, J_r を A のリゾルベントとする. 任意の $x \in C$ に対して

$$J_r x = (I + rA)^{-1}x = VI(C, T_{r,x})$$

である. ただし, 任意の $z \in C$ に対して, $T_{r,x}z \coloneqq Tz + \frac{z-x}{r}$ である. この式と定理 3.6 の直接的な結果として, 変分不等式問題の解への強収束定理を得る.

系 4.2. $C \subset H$ を閉凸集合とし, $T : C \to H$ を $VI(C,T)$ が空でないヘミ連続な一価の単調作用素とする. $\{r_n\}$ を $\liminf_n r_n > 0$ を満たす正の実数列とする. x_0 を H の元とし, 点列 $\{x_n\}, \{u_n\}$ を次のように構成する. $C_1 = D_1 = H$, $x_1 = P_{C_1}x_0$, $u_1 \in D_1$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = VI(C, T_{r_n, x_n}), \\ C_{n+1} = \{z \in H : \langle u_n - y_n, y_n - z\rangle \geq 0\} \cap C_n, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, \\ D_{n+1} = \{z \in H : \|x_0 - z\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|,\ z \neq u_n\} \cap C_n, \\ u_{n+1} \in D_{n+1} \end{cases}$$

とすると, 以下のいずれかが成立する.

(1) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して D_n が空でないとき, $\{x_n\}, \{u_n\}$ は共に $P_{VI(C,T)}x_0$ に強収束する.
(2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して D_k が空のとき, $u_{k-1} \in VI(C,T)$ となる.

4.3 相補性問題

$C \subset H$ を閉凸錘とする. C のポーラー C^* を

$$C^* \coloneqq \{y \in H : \langle u, y\rangle \geq 0,\ {}^\forall u \in C\}$$

で定義する. $T : C \to H$ を写像とする. 相補性問題とは

$$Tx_0 \in C^*, \quad \langle x_0, Tx_0\rangle = 0$$

を満たす C の元 x_0 を求める問題をいい, 相補性問題の解全体の集合を $CP(C,T)$ で表す. このとき, $CP(C,T) = VI(C,T)$ であることが知られている (例えば, [11] 等を参照).

また, 変分不等式問題と同様に $r > 0$, $x \in H$ とし, $T_{r,x} \coloneqq T + \frac{(\cdot - x)}{r}$ とおくことで, $J_r x = CP(C, T_{r,x})$ となる. これらの事実と系 4.2 の直接的な結果として, 相補性問題の解への強収束定理を得る.

系 4.3. $C \subset H$ の閉凸錘とし, $T : C \to H$ を $CP(C, T)$ が空でないヘミ連続な一価の単調作用素とする. $\{r_n\}$ を $\liminf_n r_n > 0$ を満たす正の実数列とする. x_0 を H の元とし, 点列 $\{x_n\}, \{u_n\}$ を次のように構成する. $C_1 = D_1 = H$, $x_1 = P_{C_1} x_0$, $u_1 \in D_1$ とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} y_n = CP(C, T_{r_n, x_n}), \\ C_{n+1} = \{z \in H : \langle u_n - y_n, y_n - z \rangle \geq 0\} \cap C_n, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, \\ D_{n+1} = \{z \in H : \|x_0 - z\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, \ z \neq u_n\} \cap C_n, \\ u_{n+1} \in D_{n+1} \end{cases}$$

とすると, 以下のいずれかが成立する.

(1) すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して D_n が空でないとき, $\{x_n\}, \{u_n\}$ は共に $P_{CP(C,T)} x_0$ に強収束する.
(2) ある $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対して D_k が空のとき, $u_{k-1} \in CP(C, T)$ となる.

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 19K03632, 19H01479 ,23H00815 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] T. Ibaraki, *Iterative approximation with errors of zero points of maximal monotone operators in a Hilbert space*, Linear Nonlinear Anal., **3** (2017), 171–178.

[2] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonexpansive mapping with nonsummable errors in a geodesic space*, Proceedings of the 10th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, 2012, 157-164.

[3] Y. Kimura, *Approximation of a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings with nonsummable errors in a Hilbert space*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis 15 (2014), 429-436.

[4] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonlinear mappings with nonsummable errors in a Banach space*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces IV (Kitakyushu, Japan), (L. Maligranda, M. Kato, and T. Suzuki eds.), 2014, 303–311.

[5] B. Martinet, *Régularsation d'inéquations variationnells par approximations successives* (in French), Rev. Francaise Informat. Recherche Opérationnelles 4 (1970), 154-158. 383-390.

[6] C. Martinez-Yanesa, H. K. Xu, *Strong convergence of the CQ method for fixed point Heration processes*, Nonlinear Anal., **64** (2006), 2400-2411.

[7] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497-510.

[8] R. T. Rockafellar, *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings*, Pacific J. Math. **33** (1970), 209-216.

[9] R. T. Rockafellar, *On the maximality of sums of nonlinear Monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 75-88.

[10] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and proximal point algorithm*, SIAM J. Control. Optim. **14** (1976), 877-898.

[11] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.

[12] W. Takahashi, Y Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341** (2008), 276–286.

[13] Y. Takeuchi, *Shrinking projection method with allowable ranges*, J. Nonlinear Anal. Optim., **10**(2019), 83–94.