

Palais-Smale 列の収束性と大域的最適化

Convergence of Palais-Smale sequences and global optimization

国立研究開発法人産業技術総合研究所・安全科学研究部門
竹下潤一

Jun-ichi Takeshita

Research Institute of Science for Safety and Sustainability, National Institute of
Advanced Industrial Science and Technology (AIST)

Abstract

Auslender provided a necessary and sufficient condition for the existence of a global optimal solution for a general class of nonlinear optimization problems. On the other hand, the variational method for elliptic equations deals with infinite-dimensional optimization problems with constraints, and the convergence of the so-called “Palais-Smale (PS)” sequence plays an essential role in discussing the existence of weak solutions; however, the (PS) sequence does not appear in Auslender’s condition. Therefore, in this paper, we discuss Auslender’s necessary and sufficient condition in terms of the convergence of the (PS) sequence.

1 はじめに

$D \subset \mathbb{R}^n$ を必ずしも有界ではない閉集合, $f_0 : D \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下に有界で適切な下半連続関数とし, 本稿では次の制約付き非線形最適化問題 $(MP)_0$ を考える.

$$(MP)_0 \quad \inf\{f_0(x) \mid x \in D\} =: m.$$

もし D がコンパクト集合, すなわち有界閉集合であれば, Weierstrass の定理より問題 $(MP)_0$ は大域的最適解をもつため, 本稿の主な興味は D が非有界の場合である. ここで,

$$\delta_D(x) = 0 \text{ if } x \in D, \quad \delta_D(x) = \infty \text{ if } x \notin D$$

で定義される集合 D の指示関数 δ_D を用いて, 関数 $f := f_0 + \delta_D$ を定義すると, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ も下に有界で適切な下半連続関数となる. さらに, 制約のない非線形最適化問題

$$(MP) \quad \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

を考えると, 明らかに $(MP)_0$ と (MP) の大域的最適解は一致する. そのため, 本稿では以後 (MP) を考えることとする.

一方で, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を必ずしも有界でない滑らかな領域とし, 次の半線形楕円型方程式 (EE) を考える.

$$(EE) \quad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + u|u|^{p-2} & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで, $\lambda \in \mathbb{R}, p > 2$ である.

(EE) の解の存在について議論するひとつの方法として, 変分法によるアプローチがある. それは方程式 (EE) の解が, $M := \{u \in X \mid \|u\|_p = 1\}$ 上の汎関数

$$I(u) := \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + \lambda|u(x)|^2) dx$$

の最小点に対応することが Lagrange の未定乗数法からわかるため, この最小点の存在問題 (VP) を考えるアプローチである:

$$(VP) \quad \inf\{I(u) \mid u \in M\}.$$

(VP) について最小点の存在を議論する際には, Palais-Smale (パレ-スメール) 列 (第 3 節で述べる) とよばれるある種の近似解の列を構成し, その列のコンパクト性を示すアプローチが偏微分方程式の分野では標準的な方法のひとつである (石渡 [8] などに詳しい解説がある). 一方で, (MP) に対する大域的最適解 (最小点) の存在の必要十分条件は, Auslender [1] によりかなり一般的なクラスに対して与えられている (第 2 節で述べる). しかし, Auslender の必要十分条件の中には, Palais-Smale 列は一見出てこない. そこで, 本稿では Auslender の必要十分条件を Palais-Smale 列の収束性の観点から考察を行う.

2 Auslender による必要十分条件

まずはじめに, 漸近錐と漸近関数なる概念を導入する.

定義 2.1 (漸近錐 (Asymptotic cone), Auslender and Teboulle [2, Definition 2.1.2]) 非空な集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ に対して, C の**漸近錐** C_{∞} を次で定義する:

$$C_{\infty} := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \rightarrow \infty, \exists x_k \in C \text{ with } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{t_k} = d \right\}.$$

定義 2.2 (漸近関数 (Asymptotic function), Auslender and Teboulle [2, Definition 2.1.5]) 適切な関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に対応する**漸近関数** $f_{\infty} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を次で定義する:

$$\text{epi } f_{\infty} := (\text{epi } f)_{\infty}.$$

ここで, $\text{epi } f$ は関数 f のエピグラフを表す. すなわち,

$$\text{epi } f := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \alpha \geq f(x)\}$$

である.

注意 2.1 漸近錐と漸近関数について, 次が容易にわかる.

- $\|x_k\| \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$ のときは, d は x_k の発散方向と原点とを結ぶ半直線であるため, C_{∞} は C の無限遠に発散している方向を示す錐を表現している. (図 1 を参照せよ.) また, C が有界であることと $C_{\infty} = \{O\}$ とが必要十分である.

- f_∞ はその定義から f の発散する方向とそのレートを表現する関数である. (図 2 を参照せよ.) 例えば, $f(x^*) = \alpha$ とすると,

$$\begin{cases} \alpha > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(tx^*) = \infty, \\ \alpha < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(tx^*) = -\infty. \end{cases}$$

であり, $\alpha = 0$ のときは図 3 のようなケースがあり得る.

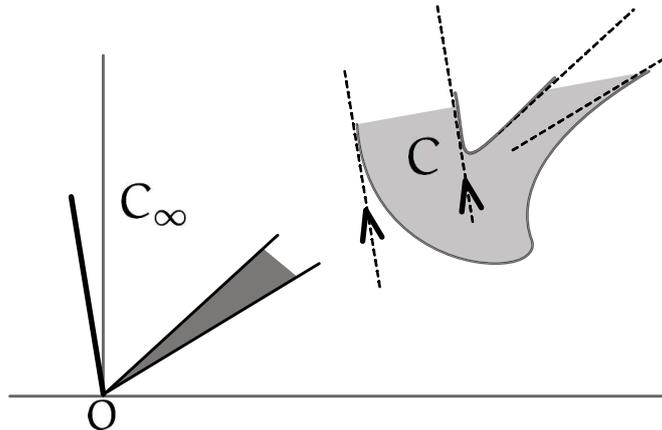


図 1 漸近錐の例. 薄グレーの集合 C に対応する漸近錐 C_∞ は, 第 1 象限にある濃いグレーの錐と第 2 象限にある半直線との和集合である.

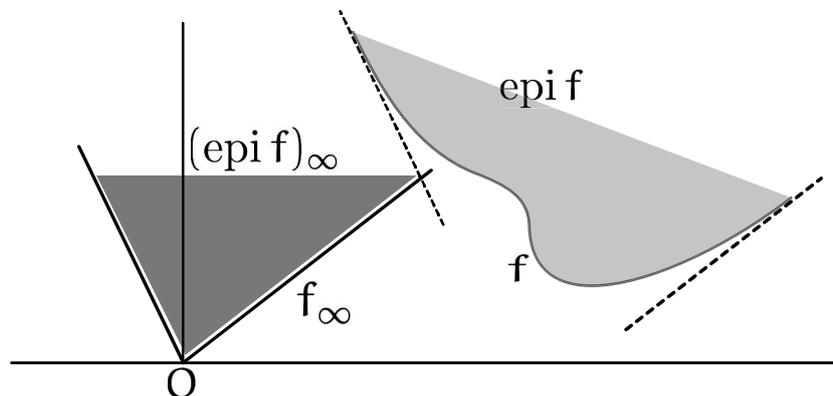


図 2 漸近関数の例. 薄グレーの関数 f に対応する漸近関数 f_∞ は, 第 1 象限では正の, 第 2 象限では負の傾きを持つ線形関数である.

以上の準備のもとで, Auslender による (MP) の大域的最適解が存在するための必要十分条件を述べる.

命題 2.1 (Auslender [1, Theorem 13]) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下に有界で適切な下半連続関数とし,

$$S_f := \left\{ (x_k) \subset \mathbb{R}^n \mid \|x_k\| \rightarrow \infty \text{ かつ } f(x_k) < \infty \text{ かつ } \frac{x_k}{\|x_k\|} \rightarrow \bar{x} \in \text{Ker } f_\infty \right\}$$

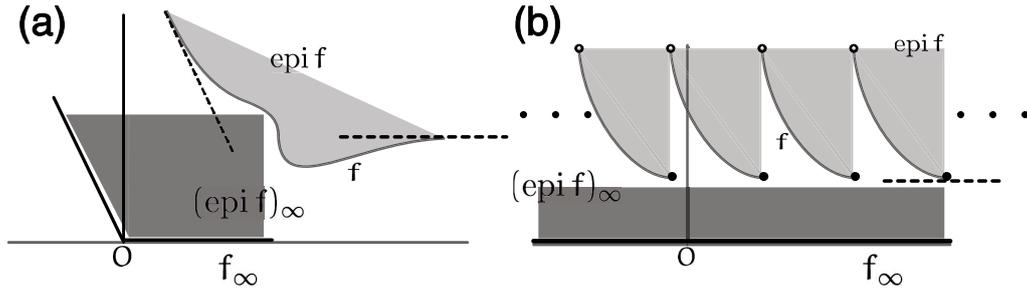


図3 漸近関数の傾きが0になる例. (a)は関数 f が x 軸と平行な漸近線を持つ場合, (b)は関数 f が漸近線を持たないものの $f(x) = 0$ が漸近関数となる場合.

で点列の集合 S_f を定義する. このとき (MP) が大域的最適解をもつ必要十分条件は, 次の (i) または (ii) が成立することである.

- (i) $S_f = \emptyset$;
- (ii) 任意の $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ について, ある $(z_k) \subset \mathbb{R}^n$ と $\|\bar{x} - \bar{z}\| < 1$ をみたすある $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ と, ある $\rho_k \in (0, \|x_k\|]$ があって, 十分大きい k について

$$f(x_k - \rho_k z_k) \leq f(x_k) \text{ かつ } z_k \rightarrow \bar{z}$$

をみたす.

注意 2.2 Auslender [1, Theorem 13] や Auslender and Teboulle [2, Theorem 3.4.1] では, 関数 f が下に有界であることを仮定していない. そのため, 必要十分条件として, (i) または (ii) が成立することに加えて, 条件

$$f_\infty(d) \geq 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

を課している. この条件は, 関数 f が下に有界であれば成立する.

3 一般化微分と Palais-Smale 列

本節では適切な下半連続関数に対して定義されている微分の一般化概念である弱勾配 (weak slope) を導入した上で, 弱勾配の意味での Palais-Smale 列を導入する.

定義 3.1 (弱勾配 (weak slope), Milbers and Schuricht [6]) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下半連続関数とし, $x \in \text{dom}(f)$ とする. このとき, f の点 x における**弱勾配** $|df|(x)$ は次をみたす $\sigma \in [0, \infty)$ の上界で定義する:

ある $\delta > 0$, $\beta > f(x)$ と連続写像 $\mathcal{K} : (B(x, \delta) \cap [f \leq \beta]) \times [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ があって, 任意の $y \in (B(x, \delta) \cap [f \leq \beta])$ と任意の $t \in [0, \delta]$ について

$$\|\mathcal{K}(y, t) - y\| \leq t \quad \text{and} \quad f(\mathcal{K}(y, t)) \leq f(y) - \sigma t$$

をみたす.

ここで, $[f \leq \beta] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \beta\}$ は f のレベル集合を表す.

注意 3.1 弱勾配は, 点 x の近傍のレベル ($f(x)$ の値) を同時に減少させられる単位あたりの最大量を表している (図4を参照のこと). 点 x' が閉集合 C の境界点であつ

ても（もちろん内点であっても），点 x' が関数 f の極小点であれば $|df|(x') = 0$ となる特徴を有する．そのため，弱勾配を用いることで (MP) の極小点が関数 f_0 の定義域 C の内点である場合と境界点である場合を，場合分けせずに統一的に記述することが可能となる．

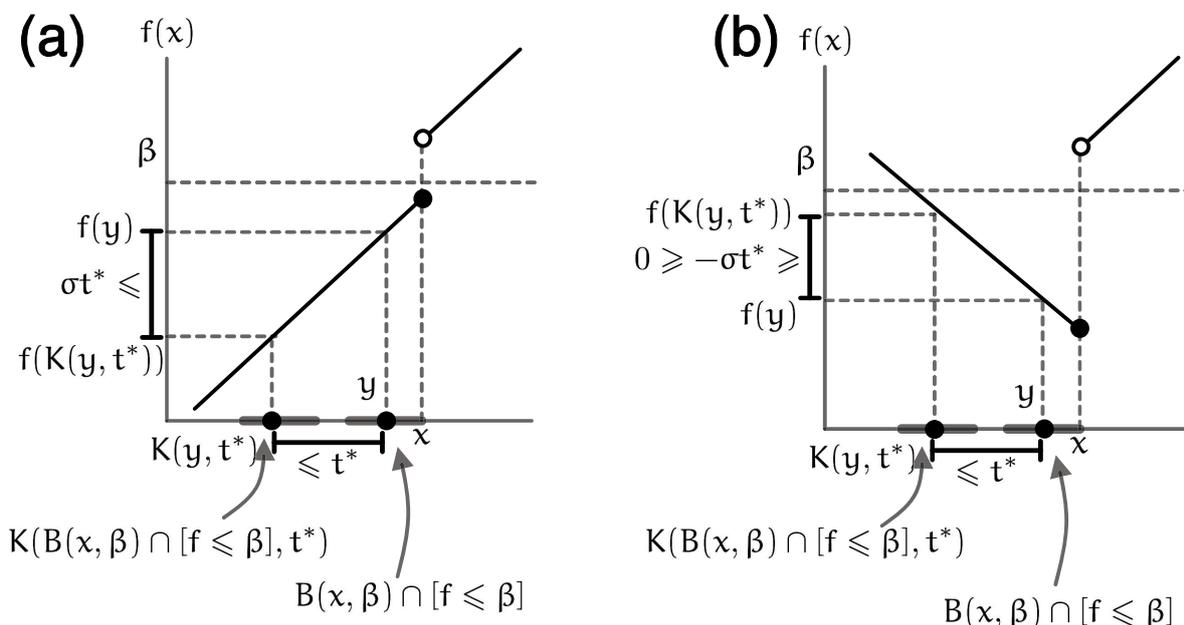


図4 弱勾配のイメージ図. (a) 点 x が極小点ではない場合. 点 x の近傍でレベルが β 以下の集合に対応する値域を連続的にある程度同時に減少させることができる. (b) 点 x が極小点である場合. 点 x の近傍でレベルが β 以下の集合に対応する値域を連続的に同時に減少させることはできない.

注意 3.2 弱勾配について，いくつかの注意を述べる．

- 「弱勾配」は “weak slope” の定訳ではなく，本稿で筆者が暫定的に用いた訳語である．筆者の知る限り，日本において weak slope はそれほど利用されていなく，今のところの定訳はない．
- 弱勾配は元々 Degiovanni and Marzocchi [4] により，連続関数に対して直接的な定義が導入され，同文献では適切な下半連続関数に対しては間接的な定義により導入された．しかし，下半連続関数に対する Degiovanni らによる定義は非常に扱いにくく，理解もしにくい．そこで本稿では Milbers and Schuricht [6] によって証明された，レベル集合を用いた下半連続関数の弱勾配の記述を定義として採用することとした．
- 弱勾配は下半身連続性をもつ．すなわち， $x_k \rightarrow x$ のとき

$$|df|(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |df|(x_k)$$

をみます．

弱勾配は次の命題で述べる意味で，通常の微分や従来的一般化微分の拡張概念になっている．なお，従来的一般化微分概念である劣微分 (subdifferential) や Clark

の劣微分の定義は本稿では改めて述べない。詳しくは、福島 [9, 2.10, 2.11]などを参照されたい。

命題 3.1 (Degiovanni and Marzocchi [4, (2.11) Theorem, (2.12) Corollary, (2.17) Theorem])
 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を適切な下半連続関数とする。

(i) f が C^1 級であるとする。このとき、

$$|df|(x) = \|f'(x)\|$$

をみます。ここで、 f' は f の勾配ベクトルを表す。

(ii) f が凸であるとし、 $\partial f(x)$ で f の点 x における劣微分を表すとする。このとき

$$|df|(x) < \infty \Rightarrow \partial f(x) \neq \emptyset \text{ かつ } |df|(x) \geq \min\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \partial f(x)\}$$

をみます。すなわち、 $|df|(x) = 0$ であれば $0 \in \partial f(x)$ が成立するため、弱勾配の意味での臨界点は、劣微分の意味での臨界点となる。

(iii) f が局所 Lipschitz 連続であるとし、 $\partial_C f(x)$ で f の点 x における Clarke の劣微分を表すとする。このとき

$$|df|(x) < \infty \Rightarrow \partial_C f(x) \neq \emptyset \text{ かつ } |df|(x) \geq \min\{\|\alpha\| \mid \alpha \in \partial_C f(x)\}$$

をみます。すなわち、 $|df|(x) = 0$ であれば $0 \in \partial_C f(x)$ が成立するため、弱勾配の意味での臨界点は、Clarke の劣微分の意味での臨界点となる。

次に、臨界点の近似列なる概念で、変分法によるアプローチの解析で重要な役割をはたす Palais-Smale 列 ((PS) 列) と Palais-Smale 条件 ((PS) 条件) について述べる。

定義 3.2 ((PS)_c 列, (PS)_c 条件, (PS) 条件) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を適切な下半連続関数とする。

- $f(x_k) \rightarrow c \neq \pm\infty$ と $|df|(x_k) \rightarrow 0$ をみます点列 $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ を f のレベル c の **Palais-Smale 列** といい、**(PS)_c 列** とかく。
- 任意の (PS)_c 列が (強) 収束する部分列をもつとき、 f は **(PS)_c 条件をみたす** という。
- 任意のレベル c において f が (PS)_c 条件をみたすとき、 f は **(PS) 条件をみたす** という。

(PS)_m 列の定義より、もし (\mathcal{H}_1) : f のある (PS)_m 列が存在し、かつ、 (\mathcal{H}_2) : その (PS)_m 列が収束する部分列を持てば、その収束先の点が (MP) の大域的最適解となり、(MP) は大域的最適解をもつことがわかる。すなわち、(ほぼ自明ではあるが) 改めて記載すると次の命題が成立する。

命題 3.2 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下に有界で適切な下半連続関数とする。このとき、(MP) が大域的最適解をもつことの必要十分条件は、「 f のある (PS)_m 列が存在して収束する部分列をもつ」ことである。

□ **証明.** (\Rightarrow) $x^* \in \mathbb{R}^n$ を f の大域的最適解とする。このとき、 $x_k := x^* (\forall k)$ なる点列は f の (PS)_m 列となり、明らかに収束する部分列ももつ。

(\Leftarrow) (x_k) を x^* に収束する部分列をもつ $(PS)_m$ 列とする. このとき, f と $|df|$ の下半連続性より, $f(x^*) = m$ かつ $|df|(x^*) = 0$ をみたす. よって, x^* は (MP) の大域的最適解である. ■

f が $(PS)_m$ 条件や (PS) 条件をみたすことは, (\mathcal{H}_2) の十分条件であることは容易に理解できる. 一方, (\mathcal{H}_1) の $(PS)_m$ 列の存在は, 次に示す弱勾配を用いた Ekeland の変分原理より導かれる.

命題 3.3 (Degiovanni and Marzocchi [4, (3.4) Corollary]) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を適切な下半連続関数とする. また $r > 0$, $\sigma > 0$ と空でない集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ が

$$\inf_{x \in E} f(x) < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + r\sigma$$

をみたすとする. このとき, ある $y \in \mathbb{R}^n$ があって,

$$f(y) < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + r\sigma, \quad \inf_{z \in E} \|y - z\| < r, \quad |df|(y) < \sigma$$

をみたす.

命題 3.3 において, $E = \mathbb{R}^n$, $r = \sigma = 1/k$ ととれば, ある $x_k \in \mathbb{R}^n$ があって

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) < f(x_k) < \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \frac{1}{k^2}, \quad \inf_{z \in E} \|x_k - z\| < \frac{1}{k}, \quad |df|(x_k) < \frac{1}{k}$$

をみたすため,

$$f(x_k) \rightarrow m \quad |df|(x_k) \rightarrow 0$$

をみたす点列 $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ を構成することができる. この点列は f の $(PS)_m$ 列に他ならない.

本節の最後に, 関数 f の強圧性, レベル有界性なる概念を導入し, これら概念と (PS) 条件の成立, 大域的最適解の存在との関係性についてにまとめる.

定義 3.3 (レベル有界 (level bounded), Rockafellar and Wets [7, 1.8 Definition]) 関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が**レベル有界**であるとは, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ についてレベル集合 $[f \leq \lambda]$ が有界であるときをいう.

定義 3.4 (強圧的 (coercive), Caklovic et al. [3, p.799]) 関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が**強圧的**であるとは

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

をみたすときをいう.

注意 3.3 本稿での強圧的の定義は, Rockafellar and Wets [7] などによる定義よりも弱いものである. Rockafellar and Wets [7] による定義では, $f(x)$ が無限遠で ∞ に発散することに加え, その発散のスピードについても仮定がある.

命題 3.4 (Auslender and Teboulle [2, Corollary 3.1.1, pp.83-85]) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下に有界で適切な下半連続関数とする. このとき, 次は同値である.

- (a) f は強圧的である.
- (b) f はレベル有界である.
- (c) f は (PS) 条件をみたす.

さらに, (a)-(c) のいずれかが成立するとき, (MP) の大域的最適解の集合は非空かつコンパクトである.

4 Auslander の必要十分条件の考察

本節では, 命題 2.1 の条件 (i) 及び (ii) それぞれについて, (PS) 列, (PS) 条件の観点から考察する.

必要十分条件 (i) の考察

$S_f = \emptyset$ より, 任意の $(\text{PS})_m$ 列 (x_k) について, $(x_k) \notin S_f$ である. すなわち, (a) $\|x_k\| < \infty (\forall k)$, (b) $f(x_k) \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$, (c) $f_\infty(\bar{x}) \neq 0$ のいずれかが成立する. (a) をみたす $(\text{PS})_m$ 列は有界列であり, (b) をみたす $(\text{PS})_m$ は有界な部分列をもつため, いずれの場合も $(\text{PS})_m$ は収束する部分列をもつ. また, (c) をみたす $(\text{PS})_m$ 列についても, f が下に有界であることから $f_\infty(\bar{x}) > 0$, すなわち, $f(x_k) \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty)$ をみたすため (b) と同様である. 以上から, 任意の $(\text{PS})_m$ 列は収束する部分列をもつとわかる. よって, 必要十分条件の (i) $S_f = \emptyset$ は, f が $(\text{PS})_m$ 条件をみたしていることを意味している.

必要十分条件 (ii) の考察

$S_f \neq \emptyset$ かつ, ある $(\text{PS})_m$ 列 $(x_k) \in S_f$ が存在すると仮定する. このとき, 各 x_k について, ある $z_k \in \mathbb{R}^n$ と $\rho_k \in (0, \|x_k\|]$ があって, 十分大きい k については

$$f(x_k - \rho_k z_k) \leq f(x_k) \quad \text{かつ} \quad z_k \rightarrow \bar{z} \text{ with } \|\bar{x} - \bar{z}\| < 1$$

をみたす. いま, $m \leq f(x_k - \rho_k z_k) \leq f(x_k) \rightarrow m$ であるから, $f(x_k - \rho_k z_k) \rightarrow m$ を得る.

ここでもし, ある定数 $\mu > 0$ があって $\rho_k = r_k \|x_k\|$ ($r_k = 1 - (\mu/\|x_k\|)$) かつ $z_k := x_k/\|x_k\|$ ととれると仮定すると, 十分大きい k について, $r_k \in (0, 1]$ かつ

$$\|x_k - \rho_k z_k\| = \|(1 - r_k)x_k\| = \mu < \infty$$

となる. すなわち, $(x_k - \rho_k z_k)$ が有界な最小化列である. さらに, Ekeland and Ghoussoub [5, Proposition 9.1] より, 任意の最小化列 (y_k) について, ある最小化列 (x'_k) があって, $\|x'_k - y_k\| \rightarrow 0$ かつ $|df|(x'_k) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ をみたす. 以上から, (i) の考察より f が $(\text{PS})_m$ 条件をみたさないときは, $(\text{PS})_m$ 列が S_f の要素であることがわかり, (ii) の考察よりその $(\text{PS})_m$ 列から新しい有界な $(\text{PS})_m$ 列が構成でき, その収束する部分列の収束先として (MP) は大域的最適解をもつ場合があることがわかった.

注意 4.1 S_f の要素である $(\text{PS})_m$ 列 (x_k) は非有界であるが, (x_k) から構成できる新たな $(\text{PS})_m$ 列 (x'_k) (最小化列 $(x_k - \rho_k z_k)$ の近くに存在する $(\text{PS})_m$ 列) は有界であるため, これら 2 つの点列は図 5 のような関係にあると考えられる. なお, 変分法によるアプローチにおいて, 点列 (x_k) のような現象を (PS) 列の**逃げ去り現象**とよばれて

おり，必要十分条件 (ii) は逃げ去り現象がおきた際に，その逃げ去る点列を有界領域内に引き戻せる構造を f が有していることを仮定していると考えられる．ただし現状では，(ii) の条件よりも強い条件の下で， f が $(PS)_m$ 列の逃げ去り現象を回復できる構造を f が有していることを示したにすぎず，(ii) の条件の一般的な考察を行うためには，より詳細な解析が必要となる．これは今後の課題である．

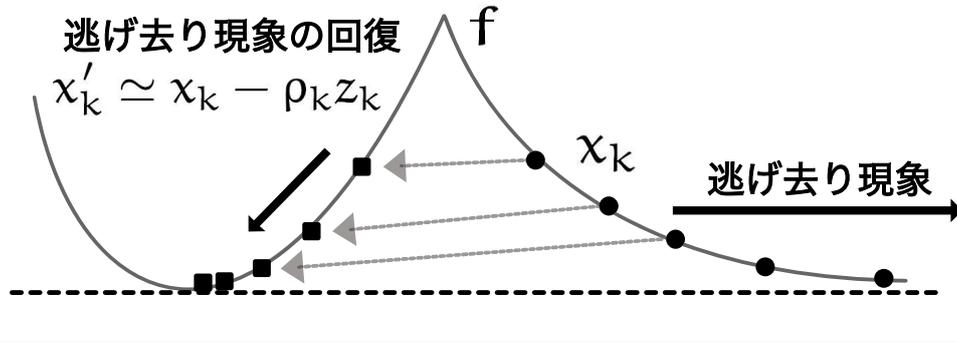


図 5 $(PS)_m$ 列の逃げ去り現象と，その回復のイメージ図． (x_k) は逃げ去り現象が起きている $(PS)_m$ であり， $(x_k - \rho_k z_k)$ は必要十分条件 (ii) の仮定から構成できる有界な最小化列である． (x'_k) はその有界な最小化列の近くに存在する有界な $(PS)_m$ であり，収束する部分列をもつ．

謝辞

毛利裕昭教授（早稲田大学・商学学術院）には，本研究の遂行にあたり多大なご助言やご協力を頂きました．ここに誠意の意を表します．

参考文献

- [1] A. AUSLENDER, *How to deal with the unbounded in optimization: Theory and algorithms*, Mathematical Programming, 79 (1997), pp. 3–18.
- [2] A. AUSLENDER AND M. TEBoulLE, *Asymptotic Cones and Functions in Optimization and Variational Inequalities*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [3] L. CAKLOVIC, S. LI, AND M. WILLEM, *A note on Palais-Smale condition and coercivity*, Differential and Integral Equations, 3 (1990), pp. 799–800.
- [4] M. DEGIOVANNI AND M. MARZOCCHI, *A critical point theory for nonsmooth functionals*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 167 (1994), pp. 73–100.
- [5] I. EKELAND AND N. GHOUSSOUB, *Selected new aspects of the calculus of variations in the large*, Bulletin of the American Mathematical Society, 39 (2002), pp. 207–265.
- [6] Z. MILBERS AND F. SCHURICHT, *Necessary condition for eigensolutions of the 1-Laplace operator by means of inner variations*, Mathematische Annalen, 356 (2013), pp. 147–177.
- [7] R. T. ROCKAFELLAR AND R. J.-B. WETS, *Variational Analysis*, no. 317 in Die Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Springer, Dordrecht, corr. 3. print ed., 2009.

- [8] 石渡通徳, *Existence of positive solutions for semilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent in unbounded domains (Variational Problems and Related Topics)*, 数理解析研究所講究録, 1025 (1998), pp. 20–34.
- [9] 福島雅夫, *非線形最適化の基礎*, 朝倉書店, 東京, 2001.