AHP における 4 次の一対比較行列の最大固有値と Newton 法

Convergence of Newton's method for the characteristic equation of a fourth-order pairwise comparison matrix in the analytic hierarchy process and Newton's method

大分大学・理工学部 * 小畑 経史
広島工業大学・情報学部 † 白石 俊輔

Tsuneshi Obata
Faculty of Science and Technology, Oita University
Shunsuke Shiraishi
Faculty of Applied Information Science, Hiroshima Institute of Technology

§1. はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process, 階層化分析法）が広く使われる理由に，一対比較があげられる．一対比較によって，好ましいといった「選好」，役に立つといった「経験」，かっこいいといった「フィーリング」などが数値化され，質的データを量的データとして扱うことができるようになる．AHP では，n 個の比較対象を扱う際，意思決定者の主観的選択（言語表現）を，Saaty の離散スケール（表 1）を用いて数値化する．

表 1　Saaty の離散スケール

言語表現	値
同程度に重要	1
やや重要	3 or 1/3
ふつうに重要	5 or 1/5
かなり重要	7 or 1/7
絶対的に重要	9 or 1/9
中間の値	2, 4, 6, 8 or その逆数

こうしてできるのが一対比較行列である．いったん，一対比較行列 A が与えられれば，比較対象のウエイトは固有値法

$$Aw = \lambda_{\max} w$$

で求められる．ここで，$\lambda_{\max}$ は行列 A の最大固有値である．本論では，$n = 4$ のときに，最大固有値 $\lambda_{\max}$ が Newton 法で求まることを示す．あわせて，Newton 法と，二分法，セカント法の収束速度を比較したシミュレーションを提示する．

* 〒870-1192 大分市大字旦野原 700　t-obata@oita-u.ac.jp
† 〒731-5193 広島市佐伯区三宅 2-1-1　s.shiraishi.wx@it-hiroshima.ac.jp

§2. 一対比較行列

n 個の比較対象（本論では $n=4$），$C_i, i=1,\dots,n$ に対して，AHP においては一対比較を行う．C_i と C_j の比較は前述の Saaty の離散スケール（表 1）を用いる．

C_i と C_j の比較において，C_i が C_j よりやや重要という判断をした場合，ij 成分とその対象要素 ji 成分には $a_{ij}=3, a_{ji}=1/3$ を割り当てる．この比較を $n(n-1)/2$ 回繰り返すことにより，n 次の一対比較行列 A が得られる:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

出来上がった一対比較行列は，正値性 $a_{ij}>0$，と逆数性 $a_{ij}=1/a_{ji}$ を持つ．理想的に一対比較が行われた場合を考察することで，固有値法の考え方が得られる．もし，重さとか面積とかのように各比較対象の真の値 $w_1,\dots,w_n$ が分かっているなら，一対比較行列は，

$$W=\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

となるはずである．一方，AHP では Saaty の離散スケールを使うこともあり，かならずしも $A=W$ とはならないため[*1]，$A\approx W$ であるとみなすことになる．いっぽう，$w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^\top$ に対し，

$$\begin{pmatrix} 1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}=n\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

である．つまり，n は W の（最大）固有値である．$A\approx W$ なのだから，固有値問題

$$Aw=\lambda_{\max}w$$

を解けば，一対比較によって比較対象のウエイトが（近似的に）得られるだろうと考えるのが，AHP における固有値法である [3, 5, 10, 14]．ここで $\lambda_{\max}$ は A の最大固有値である．本論では Newton 法によって $\lambda_{\max}$ が求まることを示す．固有値法の数理最適化による理論づけについては [11] で確立された．

$\lambda_{\max}$ には次の性質がある．

Theorem 1（Saaty [10]）

1. $\lambda_{\max}\geq n$,
2. $\lambda_{\max}=n \Leftrightarrow A$ が整合的.

ここで A が整合的であるとは，$i,k,j=1,\dots,n$ に対し

$$a_{ik}a_{kj}=a_{ij}$$

[*1] $n=4$ のときに $A=W$ となるのは，Saaty の離散スケールで表現できる一対比較行列の 0.001421% にすぎない [7].

が成り立つときをいう．整合的であることと，$A = W$ となることは同値である．この事実をもとに提案された工夫が，AHP における整合度（consistency index）C.I. である．

$$\text{C.I.} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}.$$

C.I. ≤ 0.1 が Saaty による整合度の判定基準である [3, 5, 10, 14]．整合度の導入が，AHP をメジャーにした最も大きな理由であると考えられる．なお，AHP における多様な整合度指標については，[4] のサーベイを参照されたい．

§3. 一対比較行列の固有多項式

一対比較行列が正値逆数行列であることを使って，われわれは次の結果を得ている．

Theorem 2（Shiraishi-Obata-Daigo [13]） $P_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ を A の固有多項式とする．

1. $P_A(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1} + 0 \cdot \lambda^{n-2} + c_3\lambda^{n-3} + \cdots + (-1)^n \det A.$,
2. $c_3 = \displaystyle\sum_{i<k<j} \left(2 - \frac{a_{ik}a_{kj}}{a_{ij}} - \frac{a_{ij}}{a_{ik}a_{kj}}\right) \leq 0,$
3. C.I. $= 0 \Leftrightarrow c_3 = 0.$

Corollary 1（小畑・白石 [8]） $n = 3$ のとき，

1. $P_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \det A,$
2. $c_3 = -\det A \leq 0,$
3. C.I. $= 0 \Leftrightarrow \det A = 0.$

この事実を元に，われわれは，3 次の一対比較行列に対し，最大固有値が Newton 法でもとまることを示した [12]．3 次の一対比較行列の固有方程式 $P_A(\lambda) = 0$ の実数解は，次の Newton 法の反復を用いて求めることができる．

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 3, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

固有多項式が解析的表現を持つことがポイントである．Theorem 2 より，4 次の一対比較行列に対しても，固有多項式は解析的表現を持つ．次節ではこの事実を用いて，4 次の一対比較行列に対する，Newton 法の収束を示す．

Corollary 2（Obata-Shiraishi [7]） $n = 4$ のとき，

1. $P_A(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + c_3\lambda + \det A,$
2. C.I. $= 0 \Leftrightarrow c_3 = 0.$

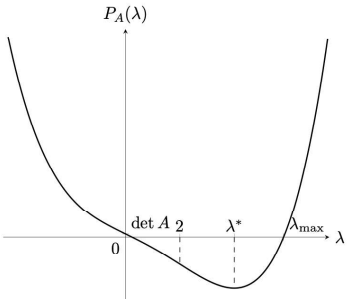

図 1　不整合な A に対する $P_A(\lambda)$ のグラフ

§4. Newton 法

3 次の場合に倣って，4 次の一対比較行列の固有方程式 $P_A(\lambda) = 0$ の実数解を，次の Newton 法の反復を用いて求めようとした．

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 4, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

しかし，この場合，初期点 $\lambda_0 = 4$ の取り方は必ずしも適切ではない．$\lambda_{\max}$ に収束せず，一般にふたつある $P_A(\lambda) = 0$ のうち，小さい方に収束してしまうことがある．

ここでいったん理論的技巧を行なった．$P_A(\lambda)$ は不整合な A に対しては，invex 関数になるので，停留点が最小点になる．この最小点を λ^* とすると次の事実が言える．

Theorem 3　十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda^* + \varepsilon, \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k - \frac{P_A(\lambda_k)}{P'_A(\lambda_k)}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

で生成される点列は，$\lambda_{\max}$ に収束する．

Remark 1　$P_A(\lambda^*) < 0, P'_A(\lambda^*) = 0$ なので，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し，$\lambda_1 > \lambda_{\max}$ となることが，この定理の技巧である．翻って，そもそも $\lambda_0 > \lambda_{\max}$ が取れればよいことに気付く．これを与えるのが次の Aupetit-Genest の上界である．

Theorem 4（Aupetit-Genest [1]）　$1/S \le a_{ij} \le S$ に対し，

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{upper}} &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)(S + 1/S), \\ n \le \lambda_{\max} &\le \lambda_{\text{upper}}. \end{aligned}$$

Remark 2　ここでは $n = 4$, $S = 9$ なので，$\lambda_{\text{upper}} = \dfrac{132}{9} = 14.66\ldots$

$\lambda_0 = \lambda_{\text{upper}}$ とすると次のことが言える．

Lemma 1　λ_k は下に有界である．

Lemma 2　λ_k は減少列である．

下に有界な減少列は収束するので[*2]，以下の結果が得られる．

Theorem 5　初期値 $\lambda_0 = \lambda_{\text{upper}}$ に対し，Newton 法で生成した点列は最大固有値 $\lambda_{\max}$ に収束する．

Newton 法によって，いったん $\lambda_{\max}$ が求まれば，連立 1 次方程式 $Aw = \lambda_{\max} w$ から，ウエイト w を求めるのには，次の最小二乗化問題を，たとえば Excel の Solver で，解けばよい [2].

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(a_{ij}w_j - \lambda_{\max}w_j)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{4} w_j = 1, \quad w_j \geq 0, j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

§5. 収束速度と数値実験

Newton 法なので，収束は 2 次収束である．

Proposition 1（Shiraishi-Obata [12] と同様）

$$\lambda_{k+1} - \lambda_{\max} \approx \frac{1}{2}\frac{P_A''(\lambda_{\max})}{P_A'(\lambda_{\max})}(\lambda_k - \lambda_{\max})^2.$$

Newton 法の収束速度を確認するために，二分法[*3]，セカント法[*4]と比較する数値実験も行った．表 2，図 2 に，Saaty の離散スケールによる 5,000 個のランダムな 4 次の一対比較行列に対する，各手法の収束までの反復回数の分布を示す．なお，ここでは，反復で得られた値と $\lambda_{\max}$ との差が 10^{-12} 以下になった時点で，収束した，とみなすことにした．

表 2　集計結果

	最小	中央値	最頻値	平均	最大
Newton	5	8	9	8.1720	10
secant	7	13	11	16.8810	100
bisection	28	42	42	41.3664	42

なお，セカント法では $\lambda_{\max}$ に収束しないケースがある（小さい方の実数解に収束）．その場合は反復を 100 回で打ち切ってあるので，そのデータとしてセカント法の最大反復数が 100 回となっている．

一例として，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 9 \\ 1/9 & 1/3 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

に対する各手法での収束の様子を図 3 に表している．この行列に対しては，Newton 法では 8 回，セカント法では 13 回，二分法では 42 回で解に収束した．これは各手法での反復回数のいずれも中央値であり，今回の数値実験での典型例といえる．

[*2] https://encyclopediaofmath.org/wiki/Decreasing_sequence
[*3] https://encyclopediaofmath.org/wiki/Dichotomy_method
[*4] https://encyclopediaofmath.org/wiki/Secant_method

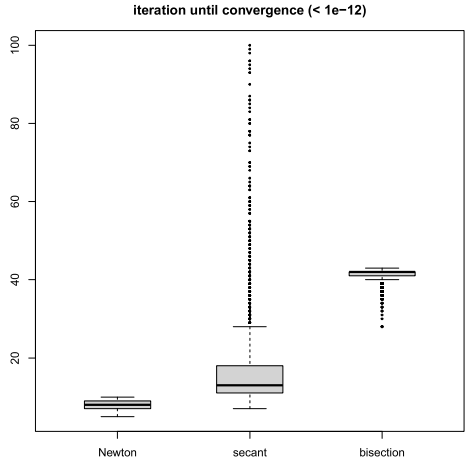

図 2　収束までの反復回数の分布（箱ヒゲ図）

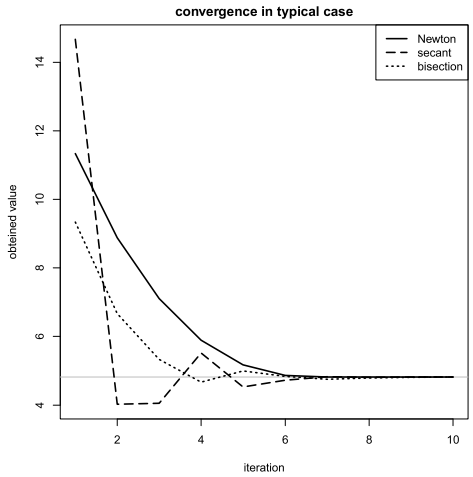

図 3　収束までの様子（典型例）

参考文献

[1] B. Aupetit, C. Genest: On some useful properties of the Perron eigenvalue of a positive reciprocal matrix in the context of the analytic hierarchy process, EJOR, Vol.70, Issue 2,1993, 263–268.

[2] S. Boyd, L. Vandenberghe: *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*, Cambridge University Press, 2018.

[3] M. Brunelli: *Introduction to the Analytic Hierarchy Process*, Springer, 2014.

[4] M. Brunelli: A survey of inconsistency indices for pairwise comparisons, International Journal of General Systems, 47, 2018, 751–771.

[5] K Kułakowski: *Understanding the Analytic Hierarchy Process*, CRC Press, 2021.

[6] T. Obata, S. Shiraishi: Consistency index less affected by the size of pairwise comparison matrix in AHP, Proceedings of the 18th Asia Pacific Management Conference, 2016, 369–377.

[7] T. Obata, S. Shiraishi: Computational study of characteristic polynomial of 4th order PCM in AHP,

Bulletin of Informatics and Cybernetics, 53(3), 2021, 1–12.

[8] 小畑経史, 白石俊輔: AHP の 3 次の一対比較行列の最大固有値の計算法—二分法，セカント法，ニュートン法の比較—, 大分大学理工学部研究報告, 69, 2022.

[9] T. Obata, S. Shiraishi, M. Daigo, N. Nakajima: Assessment for an incomplete comparison matrix and improvement of an inconsistent comparison: Computational experiments, Proceedings of The Fifth International Symposium on The Analytic Hierarchy Process, 1999, 200–205.

[10] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980.

[11] K. Sekitani, N. Yamaki: A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP, Journal of the Operations Research Society of Japan, 42(2), 1999, 219–232.

[12] S. Shiraishi, T. Obata: On a maximum eigenvalue of third-order pairwise comparison matrix in analytic hierarchy process and convergence of Newton's method, SN Operations Research Forum, 2(3), 2021, Article No. 30.

[13] S. Shiraishi, T. Obata, M. Daigo: Properties of positive reciprocal matrix and their application to AHP, Journal of the Operations Research Society of Japan, 41(3), 1998, 404–414.

[14] 刀根 薫: ゲーム感覚意思決定法, 日科技連, 1986.