

Borsuk-Ulam の定理の最適化への応用

An application of Borsuk-Ulam's theorem to optimization

川崎英文, 九州大学大学院数理学研究院*

HIDEFUMI KAWASAKI †

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

Abstract

Borsuk-Ulam の定理は n 次元球面 S^n から n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n への任意の連続写像 f に対して, $f(x) = f(-x)$ を満たす点 $x \in S^n$ が存在することを主張する. 応用としては, ハムサンドイッチ定理, ネックレス定理, Lovász による Kneser 予想の解決等が有名である. 本稿では Borsuk-Ulam の定理の最適化への応用を図る.

1 序

Borsuk-Ulam の定理 [1] は代数トポロジーの重要な定理であり, n 次元球面 S^n から n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n への任意の連続写像 f に対して, $f(x) = f(-x)$ を満たす点 $x \in S^n$ が存在することを主張する. Borsuk-Ulam の定理と同値な定理がいくつかある. 組合せ版の Tucker の補題や, 集合被覆版の LSB 定理などである (Matoušek [4]). Brouwer の不動点定理にも組合せ版の Sperner の補題や集合被覆版の KKM 補題などがあり, Borsuk-Ulam の定理から Brouwer の不動点定理を導くことはできるが, その逆は知られていない.

Borsuk-Ulam の定理の応用としては, ハムサンドイッチ定理, ネックレス定理, Lovász [3] による Kneser 予想の解決等が有名であり, 本研究ではハムサンドイッチ定理の手法を取り入れる.

μ を \mathbb{R}^n の Lebesgue 測度とし, $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$) を有限の測度をもつ集合とする. ハムサンドイッチ定理は A_i ($i = 1, \dots, n$) の体積を同時に 2 等分する超平面 H が存在することを主張する. すなわち, H で定まる閉半空間を H^+, H^- とするとき

$$\mu(A_i \cap H^+) = \mu(A_i \cap H^-) \quad (i = 1, \dots, n)$$

が成立する.

本論文では, Borsuk-Ulam の定理の最適化への応用を図る. 2 節でパラメータ $\mathbf{u} \in S^n$ のパラメトリックな非線形計画問題を導入し, 最適値関数の \mathbf{u} に関する連続性を議論する. 3 節で 2 節の結果を検証し, 最適値関数の改良をおこない, Borsuk-Ulam の定理を適用する. 4 節で目的関数が内積で与えられる場合を考察し, A_1, \dots, A_n の幅を同時に 2 等分する超平面の存在を示す. 本稿を通して A_i の内部を $\text{int } A_i$, 凸包を $\text{co } A_i$ で表す.

*kawasaki.hidefumi.245@m.kyushu-u.ac.jp

†本研究は科研費 JSPS KAKENHI Grant Number 20K03751 の助成を受けている.

2 パラメトリックな非線形計画問題

パラメータ $\mathbf{u} \in S^n$ をもつパラメトリックな非線形計画問題を以下のように与える.

S^n の元 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ に対し, 最初の n 次元ベクトルを $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ で表すと, $\mathbf{u} = (u, u_{n+1})$ と書くことができる. $\langle u, x \rangle$ を \mathbb{R}^n の内積 $u_1x_1 + \dots + u_nx_n$ として, 各 $\mathbf{u} \in S^n$ に対して, 超平面 $H_{\mathbf{u}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = u_{n+1}\}$ と 2 つの閉半空間

$$H_{\mathbf{u}}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \geq u_{n+1}\}, \quad H_{\mathbf{u}}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq u_{n+1}\}$$

をとると, $H_{-\mathbf{u}}^+ = H_{\mathbf{u}}^-$ が成立することが容易に分かる. $u \neq \mathbf{0}$ の場合は $H_{\mathbf{u}}^+$ も $H_{\mathbf{u}}^-$ も非空であり, $u = \mathbf{0}$ の場合は $H_{\mathbf{u}}^+$ と $H_{\mathbf{u}}^-$ の一方は \mathbb{R}^n で, 他方は空である.

$A_i \subset \mathbb{R}^n$ を空でないコンパクト凸集合, $f_i: \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. パラメトリックな最適値関数

$$F_i(\mathbf{u}) := \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u})$$

は, $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ が非空から空に変わる点で連続性を保証できない (図 1). Borsuk-Ulam の定理を

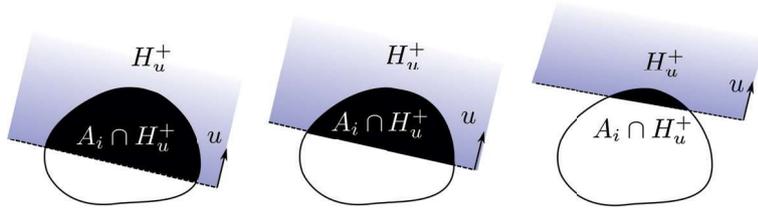


図 1: 最適値関数 $F_i(\mathbf{u})$ の不連続性.

適用するには S^n 全体での連続性が必要なので, 次の写像 $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n): S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を考える.

$$\psi_i(\mathbf{u}) := \begin{cases} \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ \neq \emptyset), \\ 0 & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ = \emptyset). \end{cases} \quad (1)$$

定理 1 $i = 1, \dots, n$ として, $A_i \subset \mathbb{R}^n$ を内部が非空なコンパクト凸集合, $f_i: \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. A_i の任意の境界点 x とその点での A_i の任意の支持超平面 H に対して, $A_i \cap H$ は 1 点集合と仮定する. このとき, ψ は S^n 全体で連続である.

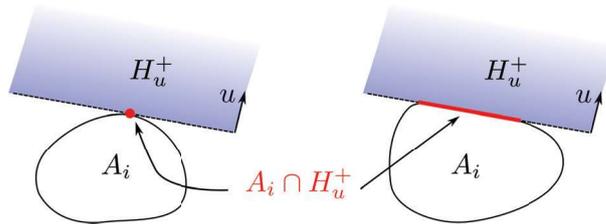


図 2: 左は狭義凸性の仮定を満たす. 右は満たさないので ψ_i は不連続になる.

本定理を含めて, 本稿の命題の証明は Kawasaki [2] にある. なお, 定理 1 の A_i の境界点に関する仮定を集合 A_i の狭義凸性の仮定とよぶことにする.

3 最適値関数の改良

本節では例を挙げて最適値関数 ψ が十分でないことを示し、その改良版を提示する。

例 1 $n = 1$. 関数 $f : \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ として $f(x_1, \mathbf{u}) = u_1 x_1$ をとり、コンパクト凸集合として $A = [-1, 1]$ をとる. 点 $\mathbf{u} \in S^1$ を $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta) = (u_1, u_2)$ と極座標表示すると、

$$A \cap H_{\mathbf{u}}^+ = \{x_1 \in [-1, 1] \mid x_1 \cos \theta \geq \sin \theta\} = \begin{cases} \emptyset & (\theta = \pi/2) \\ [-1, 1] & (\theta = 3\pi/2) \\ [-1, 1] \cap [\tan \theta, \infty) & (\cos \theta > 0) \\ [-1, 1] \cap (-\infty, \tan \theta] & (\cos \theta < 0). \end{cases}$$

よって、 $A \cap H_{\mathbf{u}}^+ = \emptyset \Leftrightarrow \tan \theta \notin [-1, 1] \Leftrightarrow \pi/4 < \theta < 3\pi/4$. $A \cap H_{\mathbf{u}}^+$ が空でないとき、

$$A \cap H_{\mathbf{u}}^+ = \begin{cases} [\tan \theta, 1] & (-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4) \\ [-1, \tan \theta] & (3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4) \\ [-1, 1] & (5\pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4). \end{cases}$$

最適値関数は以下のようになる。

$$\max_{x \in S(\mathbf{u})} f(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in S(\mathbf{u})} f(x, \mathbf{u}) = \begin{cases} \cos(\theta) - \sin(\theta) & (-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4) \\ \sin(\theta) - \cos(\theta) & (3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4) \\ 2|\cos(\theta)| & (5\pi/4, 7\pi/4). \end{cases}$$

$$\psi(\mathbf{u}) = \begin{cases} |\cos(\theta) - \sin(\theta)| & \text{on } [-\pi/4, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \\ 0 & \text{on } [\pi/4, 3\pi/4] \\ 2|\cos(\theta)| & \text{on } [5\pi/4, 7\pi/4]. \end{cases} \quad (2)$$

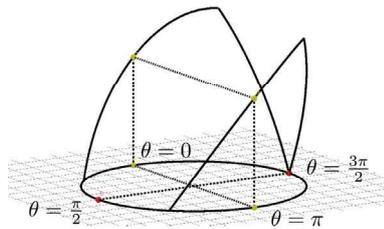


図 3: ψ の S^1 上でのグラフ.

この例では、 $\psi(\mathbf{u}) = \psi(-\mathbf{u})$ を満たす点 $\mathbf{u} \in S^1$ が 2 組存在する. ひとつは $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\psi(\mathbf{u}) = \psi(-\mathbf{u}) = 1$, 極座標は $\theta = 0, \pi$ である. 他方は $\mathbf{u}^* = (0, 1)$, $\psi(\mathbf{u}^*) = \psi(-\mathbf{u}^*) = 0$ で、極座標は $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ である. この 2 対を詳しく見ていこう.

- $\mathbf{u} = (1, 0)$ で $S(\mathbf{u}) = A \cap H_{\mathbf{u}}^+ = [0, 1]$ かつ $S(-\mathbf{u}) = A \cap H_{-\mathbf{u}}^+ = [-1, 0]$ なので, 等式 $\psi(1, 0) = \psi(-1, 0) = 1$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} \max_{x_1 \in A \cap H_{\mathbf{u}}^+} u_1 x_1 - \min_{x_1 \in A \cap H_{\mathbf{u}}^+} u_1 x_1 &= \max_{x_1 \in A \cap H_{-\mathbf{u}}^+} (-u_1 x_1) - \min_{x_1 \in A \cap H_{-\mathbf{u}}^+} (-u_1 x_1) \\ &= \max_{x_1 \in A \cap H_{\mathbf{u}}^-} u_1 x_1 - \min_{x_1 \in A \cap H_{\mathbf{u}}^-} u_1 x_1 = 1 \end{aligned}$$

- $\mathbf{u}^* = (0, 1)$ で $S(\mathbf{u}^*)$ は空なので, ψ が連続になるように $\psi(0, 1) = 0$ と定義した. さらに, $u_1^* = 0$ と $A \cap H_{-\mathbf{u}^*}^+ = A$ から, $\psi(0, -1) = 0$ は自明な等式

$$\max_{x_1 \in A \cap H_{-\mathbf{u}^*}^+} (-u_1^* x_1) - \min_{x_1 \in A \cap H_{-\mathbf{u}^*}^+} (-u_1^* x_1) = \max_{x_1 \in A} 0 - \min_{x_1 \in A} 0 = 0$$

になる. この意味で, $(\mathbf{u}^*, -\mathbf{u}^*)$ は自明な対である.

そこで, 自明な対を排除するために ψ を改良する. 写像 $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$\varphi_i(\mathbf{u}) := \begin{cases} \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ \neq \emptyset), \\ (1 - \varepsilon - u_{n+1})/\varepsilon & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ = \emptyset, u_{n+1} > 1 - \varepsilon), \\ 0 & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ = \emptyset, u_{n+1} \leq 1 - \varepsilon) \end{cases} \quad (3)$$

で定義する. ここで, $\varepsilon > 0$ は十分小さいものとする. φ_i と ψ_i の違いは第 2 の場合分けである. また, $N_\varepsilon := \{\mathbf{u} \in S^n \mid u_{n+1} > 1 - \varepsilon\}$ を北極 $\mathbf{u}^* := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ の ε -近傍とよぶことにする.

補題 1 ε を十分小さな正数とする. 定理 1 の仮定の下で以下が成り立つ.

- (1) φ_i の北極 $\mathbf{u}^* = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ における値は -1 である.
- (2) 任意の $\mathbf{u} \in N_\varepsilon$ で $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ は空である.
- (3) φ_i の境界 ∂N_ε 上での値は 0 である.
- (4) φ_i の N_ε 上での値は負である.
- (5) φ_i は S^n 上で連続である.

補題 2 各 $f_i(x, \mathbf{u})$ は \mathbf{u} に関して対心的とする. すなわち, $f_i(x, -\mathbf{u}) = -f_i(x, \mathbf{u})$ がすべての $(x, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n \times S^n$ で成立すると仮定する. このとき,

$$\varphi_i(-\mathbf{u}) = \begin{cases} \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-} f_i(x, \mathbf{u}) & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^- \neq \emptyset), \\ (1 - \varepsilon + u_{n+1})/\varepsilon & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^- = \emptyset, -u_{n+1} > 1 - \varepsilon), \\ 0 & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^- = \emptyset, -u_{n+1} \leq 1 - \varepsilon). \end{cases} \quad (4)$$

Borsuk-Ulam の定理を $\varphi : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ に適用することにより, 次の定理を得る.

定理 2 定理 1 と補題 2 の仮定の下で, ある $\mathbf{u} \in S^n$ が存在して, 各 $i = 1, \dots, n$ に対して (i) か (ii) のいずれかが成立する.

(i) $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-$ は非空で,

$$\max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) = \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-} f_i(x, \mathbf{u}). \quad (5)$$

(ii) $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-$ の一方は空で, 他方は A_i であり, $f_i(\cdot, \mathbf{u})$ は A_i 上で定数関数である.

$f_i(x, \mathbf{u})$ として双線形関数をとると, 定理 2 の (ii) は排除される.

定理 3 定理 1 の仮定が満たされているとする. Q_i を n 次の正則行列として, $f_i(x, \mathbf{u}) = \langle u, Q_i x \rangle$ とする. このとき, ある $\mathbf{u} \in S^n$ が存在して, $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-$ は非空で, 次の等式がすべての $i = 1, \dots, n$ で成立する.

$$\max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) = \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-} f_i(x, \mathbf{u}). \quad (6)$$

4 特別な $f_i(x, \mathbf{u})$

2 節と 3 節において A_i の狭義凸性を仮定したが, $f_i(x, \mathbf{u}) = \langle u, x \rangle = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ をとると, その仮定は不要になる.

補題 3 $f_i(x, \mathbf{u}) = \langle u, x \rangle$ とすると, φ_i は S^n 全体で連続である.

定理 4 $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$) を内部が非空なコンパクト凸集合とすると, ある $\mathbf{u} \in S^n$ が存在して, $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-$ は非空であり

$$\delta^*(u \mid A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+) - \delta_*(u \mid A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+) = \delta^*(u \mid A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-) - \delta_*(u \mid A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-) \quad (7)$$

がすべての $i = 1, \dots, n$ で成立する. ただし, $\delta^*(u \mid X) := \max_{x \in X} \langle u, x \rangle$, $\delta_*(u \mid X) := \min_{x \in X} \langle u, x \rangle$.

コンパクト集合の凸包はコンパクト凸集合なので, A_i の凸包をとることにより, A_i から凸性の仮定を外すことができる. そのため, A_i は有限集合でもよいことになる.

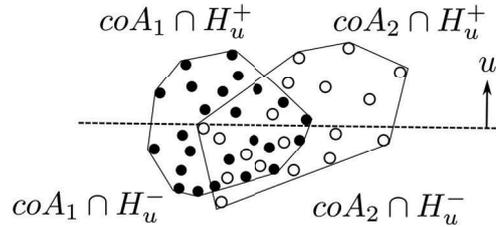


図 4: 2次元データ A_1, A_2 の幅の等分割. A_1 は黒丸. A_2 は白丸.

系 1 $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$) をコンパクト集合で, その凸包の内部は非空とすると, ある $\mathbf{u} \in S^n$ が存在して, すべての $i = 1, \dots, n$ で $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-$ は非空であり, 次の等式が成立する.

$$\delta^*(u \mid \text{co } A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+) - \delta_*(u \mid \text{co } A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+) = \delta^*(u \mid \text{co } A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-) - \delta_*(u \mid \text{co } A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-). \quad (8)$$

5 謝辞

本研究は科学研究費 JSPS KAKENHI Grant Number 16K05278 の支援を受けている。

参 考 文 献

- [1] K. Borsuk, Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Mathematicae*, **20** (1933), 177–190.
- [2] H. Kawasaki, An application of Borsuk-Ulam's theorem to nonlinear programming, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.13748> (2023).
- [3] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. A*, **25** (1978), 319–324.
- [4] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer, Berlin Heidelberg, (2008).