The convergence of the sequence of conditional expectations

岩手大学　本田　卓
Takashi Honda
Faculty of Education, Iwate University, Japan
E-mail address: thonda7@iwate-u.ac.jp

概　要　確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ において、$\mathscr{F}$ の部分代数の列 $\{\mathscr{G}_n\}$ が単調なら、任意の実数値確率変数 $X \in L^p(\Omega)$ の条件付き期待値の列 $\{\mathrm{E}[X|\mathscr{G}_n]\}$ が L^p ノルムに関して収束することが知られている。（ここで、$1 \le p < \infty$ を定数とする。）これは、Lévy の定理といわれている。$1 < p < \infty$ のとき、$L^p(\Omega)$ は滑らかで, 厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間とみなすことができる。従って、そのような Banach 空間での線形射影の収束定理より、Lévy の定理の一般化が可能であるように思われる。本論文では、筆者の最新の研究 [7] での厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間での線形射影の収束定理に触れ、Lévy の定理の一般化とその具体例について言及する。

1　はじめに

本論文では, 基本的に実 Banach 空間を扱う. また, 特に断りがなければ, 滑らかで, 厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間とする. 筆者の研究より, Banach 空間の直交補空間分解を用いて示すことにする。以下では、E を実 Banach 空間とする。E を滑らかな Banach 空間、J を正規化双対写像 (normalized duality mapping) とすると、以下のような汎関数 $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ を定義できる。

$$\phi(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2.$$

正規化双対写像 J は

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義される共役空間 E^* に値を持つ集合値写像で、どんな Bnach 空間 E でも一般にすべての要素 $x \in E$ で定義できる。さらに、E が滑らかな Banach 空間の場合は一価写像である。その他詳細は [15] を参照。C を E の閉凸部分集合とし、写像 $T : C \to C$ が不動点を持ち、不等式

$$\phi(Tx, y) \le \phi(x, y)$$

をすべての C の要素 x と T の不動点 $y \in F(T)$ とにおいて満たすとき、この写像を一般化非拡大 (generalized nonexpansive) 写像と呼ぶ。茨木-高橋 [10] を参照。もし E の、空でないある部分集合の上への冪等写像 R がこの性質を持つとき、R を一般化非拡大射影 (generalized nonexpansive retraction) と呼ぶ。さらに、すべての $x \in E$、$t \ge 0$ において等式 $R(Rx + t(x - Rx)) = Rx$ が成り立つとき、R を sunny generalized nonexpansive retraction と呼ぶ。E の非空閉部分集合 C の上への冪等写像 R_C が sunny generalized nonexpansive retraction であることと、任意の $x \in E$, $y \in C$ において、不等式 $\langle x - R_C x, Jy - JR_C x\rangle \le 0$ が成り立つこととが同値である。逆に、E のある部分集合が E からその集合上への sunny generalized nonexpansive retraction を持つとき、その集合を E

の sunny generalized nonexpansive retract と呼ぶ。E が滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間のとき、E の非空部分集合 C が E の sunny generalized nonexpansive retract になるための必要十分条件は、高阪-高橋 [11] により、C の正規双対写像 J による像 JC が E の共役空間 E^* での閉凸集合であることが知られている。またこれは E の一般化非拡大レトラクト (generalized nonexpansive retract) である必要十分条件でもあり、このとき、E の C の上への sunny generalized nonexpansive retraction R_C は、$R_C = J^{-1}\Pi_{JC}J$ と表現できる。ここで、Π_{JC} は E^* の JC の上への一般化射影である。

そこで、滑らかで、厳密に凸なノルムを持つ反射的 Banach 空間 E の非空部分集合 C において、$JC = Y^*$ が E^* での閉部分空間である場合を考える。このとき、任意の $x \in E$ は、

$$x = P_{Y^*_\perp}x + R_{J^{-1}Y^*}x$$

と表現できる。ここで、$Y^*_\perp = \{x \in E : 任意の\ y^* \in Y^*\ において\ \langle x, y^* \rangle = 0\}$、$P_{Y^*_\perp}$ は E の $Y^*_\perp$ の上への距離射影を表す。また逆に、Y を E の閉部分空間とすると、任意の $x \in E$ は、

$$x = P_Y x + R_{J^{-1}Y^\perp}x$$

と表現できる。ここで、$Y^\perp = \{x^* \in E^* : 任意の\ y \in Y\ において\ \langle y, x^* \rangle = 0\}$ とし、$Y^\perp$ は E^* の閉部分空間なので、E の $J^{-1}Y^\perp$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction $R_{J^{-1}Y^\perp}$ が存在する。これを、Banach 空間における直交補空間分解と呼び、Hilbert 空間では通常の直交補空間分解になっている。詳細は [2, 3, 8, 9] を参照。

さらに以下の定理より、ノルムが 1 の線形射影は sunny generalized nonexpansive retraction であることが言える。

Theorem 1.1 ([8]). *Y^* を共役空間 E^* の閉部分空間とする。もし、E の $J^{-1}Y^*$ の上への sunny generalized nonexpansive retraction が quasi-nonexpansive ならば、それは線形射影である。逆に、すべての縮小線形射影は sunny generalized nonexpansive かつ quasi-nonexpansive である射影である。*

従って、E 上の任意のノルムが 1 の線形射影 T において、$I - T$ は $Y^*_\perp$ の上への距離射影である。ここで、Y^* は線形射影 T による E の像 Y において、

$$Y^* = JY$$

をみたす E^* の部分集合（部分空間）である。

2 Banach 空間での線形射影の収束条件

E を Banach 空間とし、$\{C_n\}$ を E の非空閉凸部分集合の列とする。$\text{s-}\liminf_{n\to\infty} C_n$ で、各 $n \in \mathbb{N}$ において $x_n \in C_n$ をみたす点列 $\{x_n\} \subset E$ の強収束による極限で構成される集合とし、$\text{w-}\limsup_{n\to\infty} C_n$ で、各 $n \in \mathbb{N}$ において $y_n \in C_n$ をみたす点列 $\{y_n\} \subset E$ の弱収束する部分列 $\{y_{n_i}\}$ の極限で構成される集合とする。一般に、

$$\liminf_{n\to\infty} C_n \subset \text{s-}\liminf_{n\to\infty} C_n \subset \text{w-}\limsup_{n\to\infty} C_n \subset \limsup_{n\to\infty} C_n$$

が成り立つ。集合 C が

$$\text{s-}\liminf_{n\to\infty} C_n = C = \text{w-}\limsup_{n\to\infty} C_n$$

を満たすとき、$\{C_n\}$ が C に Mosco 収束すると言い、

$$C = \text{M-}\lim_{n\to\infty} C_n$$

と書く。一般に C が $\{C_n\}$ の Mosco 極限であるとき、C は E の閉凸部分集合である。詳細は [4, 13, 16] を参照。

1984 年に以下の定理より、Banach 空間の距離射影の収束定理が得られた。

Theorem 2.1 ([16])**.** *E を E^* が Frechét 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とし、$\{C_n\}$ を E の非空閉凸部分集合の列とする。このとき、以下は同値である。*

(i) $\{C_n\}$ *が E の非空部分集合に Mosco 収束する;*

(ii) *E の非空閉凸部分集合 C が存在し、すべての $x \in E$ において、$d(x, C_n)$ が $d(x, C)$ に収束する;*

(iii) *すべての $x \in E$ において、$\{P_{C_n}x\}$ がノルム収束する,*

ここで、$d(x,C) = \inf_{y\in C}\|x-y\|$、$P_{C_n}$ は E の C_n の上への距離射影を表す。さらにこのとき、$C = \text{M-}\lim_{n\to\infty} C_n$ で、すべての $x \in E$ において、$\{P_{C_n}x\}$ は $P_C x$ にノルム収束する。

この定理と、前節の線形射影による Banach 空間の直行補空間分解を用いると、以下の定理が得られる。

Theorem 2.2 ([7])**.** *E を Banach 空間とし、P_n, $n \in \mathbb{N}$ を E のノルムが 1 の線形射影とし、M_n を E のその像とする。今、E と E^* が Frechét 微分可能なノルムを持つと仮定する。*

もし、$\{JM_n\}$ が閉部分空間 JM に E^* で Mosco 収束するなら ($JM = \text{M-}\lim_{n\to\infty} JM_n$)、$M$ は E の 1-complemented subspace であり、各 $x \in E$ において $\{P_n x\}$ は Px に強収束する。ここで、P は E のノルムが 1 の線形射影で M は E のその像である。

逆に、各 $x \in E$ において $\{P_n x\}$ が強収束するなら、$\{JM_n\}$ は E^* の閉部分空間 JM に Mosco 収束する ($JM = \text{M-}\lim_{n\to\infty} JM_n$)。また、$Px$ に強収束する。$\{P_n x\}$ の極限は Px である。ここで、P は E の M の上へのノルムが 1 の線形射影である。

3　条件付き期待値への応用

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間とし、E を実 $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ とする。このとき、E と E^* を Frechét 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とみなすことができる。詳細は [6] を参照。また、正規化双対写像 $J : E \to E^*$ は $x(\omega) \in E$ において、以下のように表現される。

$$Jx(\omega) = |x(\omega)|^{p-1}\frac{\text{sign}\, x(\omega)}{\|x\|^{p-2}} :$$

[5] を参照。$x \in E$ を $\mathscr{F}$ の部分代数 $\mathscr{G}$ に関して可測な関数とすると、$Jx \in E^*$ も $\mathscr{G}$ 可測である。M^p を E での $\mathscr{G}$ 可測な関数で構成された E の閉部分空間、M^q を E^* での $\mathscr{G}$ 可測な関数で構成さ

れた E^* の閉部分空間とする。このとき、$JM^p = M^q$ が成り立つ。$x \in E$ の $\mathscr{G}$ に関する条件付き期待値 $\mathrm{E}[x|\mathscr{G}]$ は、E の M^p の上へのノルムが 1 の線形射影である。よって、上の定理 2.2 より、以下の定理が得られる。

Theorem 3.1 ([7])**.** $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ を確率空間、$\mathscr{G}_n$, $n \in \mathbb{N}$ を $\mathscr{F}$ の部分代数とする。$1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とすると、 M_n^q は実 $L^q(\Omega)$ の閉部分空間である。ここで、M_n^q は実 $L^q(\Omega)$ の $\mathscr{G}_n$ 可測関数すべての集合とする。

もし $\{M_n^q\}$ が実 $L^q(\Omega)$ のある閉部分空間 M^q に *Mosco* 収束するなら *(*$M^q = \text{M-}\lim_{n\to\infty} M_n^q$*)*、任意の実数値確率変数 $X \in L^p(\Omega)$ において、 条件付き期待値の列 $\{\mathrm{E}[X|\mathscr{G}_n]\}$ は $L^p(\Omega)$ のある確率変数に L^p ノルムで収束する。

逆に、もし、任意の実数値確率変数 $X \in L^p(\Omega)$ において、条件付き期待値の列 $\{\mathrm{E}[X|\mathscr{G}_n]\}$ が $L^p(\Omega)$ のある確率変数に L^p ノルムで収束するなら、$\{M_n^q\}$ は実 $L^q(\Omega)$ のある閉部分空間 M^q に *Mosco* 収束する *(*$M^q = \text{M-}\lim_{n\to\infty} M_n^q$*)*。

もし $\{\mathscr{G}_n\}$ がフィルターなら、$\{M_n^q\}$ は単調列になり $L^q(\Omega)$ のある閉部分空間に Mosco 収束する。 [13] を参照。一方、$\{\mathrm{E}[X|\mathscr{G}_n]\}$ は L^p 有界なマルチンゲールとなり、$\{\mathrm{E}[X|\mathscr{G}_n]\}$ は $L^p(\Omega)$ のある確率変数に L^p ノルムで収束する。詳細は [17] を参照。つまり、この定理は Lévy の定理の一般化になっている。

Example 3.1. 可測集合 $A_n \in \mathscr{F}$, $P(A_n) > 0$, $P(A_n^c) > 0$, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ と A_n により生成された $\mathscr{F}$ の部分代数 $\mathscr{G}$ を考える。ここで、A_n^c は A_n の補集合を表すとする。確率変数 $X \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ において、条件付き期待値 $E[X|\mathscr{G}_n]$ は

$$X_n = E[X|\mathscr{G}_n] = \frac{\int_{A_n} XdP}{P(A_n)} \mathbf{1}_{A_n} + \frac{\int_{A_n^c} XdP}{P(A_n^c)} \mathbf{1}_{A_n^c}$$

と表現される。ここで、$\mathbf{1}_{A_n}$ と $\mathbf{1}_{A_n^c}$ は各々 A_n と A_n^c の特性関数である。もし $\omega \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ なら、十分大きな自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在し、 任意の $n > N$ において、 $\omega \in A_n^c$ が成り立つようにできる。そのような $n > N$ において、

$$X_n(\omega) = \frac{\int_{A_n^c} XdP}{P(A_n^c)}$$

が成り立つ。$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n^c} XdP = \int XdP$ と $\lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = 1$ が成り立つので、

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = \int XdP$$

が言える。よって、

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \int XdP \mathbf{1}_\Omega \ a.s.$$

が得られる。つまり、$\mathscr{G}_\infty = \{\Omega, \emptyset\}$ とすると、列 $\{E[X|\mathscr{G}_n]\}$ は $E[X|\mathscr{G}_\infty]$ にほとんど確実に収束する。

また、$|X|^p$ は可積分なので、任意の $\varepsilon > 0$ において、$\delta > 0$ が存在し、

$$\int_F |X|^p dP < \varepsilon$$

が任意の $F \in \mathscr{F}$, $P(F) < \delta$ で成り立つようにできる。$K > 0$, $K^{-1}\int |X|^p dP < \delta$ とすると、*Jensen* の不等式より、

$$|X_n|^p = |E[X|\mathscr{G}_n]|^p \leq E[|X|^p|\mathscr{G}_n]$$

が得られる。それ故、

$$\int |X_n|^p dP \leq \int |X|^p dP$$

が、任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ。

$$KP(|X_n|^p > K) \leq \int |X_n|^p dP \leq \int |X|^p dP$$

より、

$$P(|X_n|^p > K) < \delta$$

が、任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ。これは、列 $\{|X_n|^p\}$ 一様可積分であることを意味し、上と合わせて、列 $\{E[X|\mathscr{G}_n]\}$ が $E[X|\mathscr{G}_\infty]$ に L^p ノルムで収束することが得られた。

M_n^q は $\mathscr{G}_n$ 可測な関数で構成された $L^q(\Omega)$ の閉部分空間である。よって、定理 *3.1* より、列 $\{M_n^q\}$ は $L^q(\Omega)$ の閉部分空間に *Mosco* 収束する。

Acknowledgment

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] Ya. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Dekker, New York, 1996, 15–50.

[2] Ya. I. Alber, *Generalized Projections, Decompositions, and the Pythagorean-Type Theorem in Banach Spaces*, Appl. Math. Lett. **11** (1998), 115–121.

[3] Ya. I. Alber, *James orthogonality and orthogonal decompositions of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), 330–342.

[4] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[5] I. Cioranescu *Geometry of Banach spaces, duality mappings, and nonlinear problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1990.

[6] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. M. Santalucía, J. Pelant, V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] T. Honda, *Convergence theorems of conditional expectations by using contractive projections on Banach spaces*, to appear.

[8] T. Honda and W. Takahashi, *Norm One Projections and Generalized Conditional Expectations*, Sci. Math. Jpn. **69** (2009), 303–313.

[9] T. Honda and W. Takahashi, *Nonlinear projections and generalized conditional expectations in Banach spaces*, Taiwanese J. Math., **15** (2011), 2169–2193.

[10] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Generalized nonexpansive retractions and a proximal-type algorithm in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 197–209.

[12] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1998.

[13] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. Math. **3** (1969), 510–585.

[14] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis – Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[15] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points* (in Japanese), Yokohama Publishers, 2000.

[16] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.

[17] D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge University Press, 1991.