

推移確率行列の区間型推定アルゴリズムの 改良について (On an improvement of algorithms for interval estimated stochastic transition matrices)

長崎総合科学大学・総合情報学部・王琦
Qi Wang⁽¹⁾
上智大学・経済学部・來島愛子
Aiko KURUSHIMA⁽²⁾
神奈川大学・理学部・堀口正之
Masayuki HORIGUCHI⁽³⁾

⁽¹⁾Lecturer of Department of Applied Information Technology,
Faculty of Applied Information Technology,
Nagasaki Institute of Applied Science,
⁽²⁾Professor of Department of Economics,
Faculty of Economics, Sophia University
⁽³⁾Professor of Department of Mathematics,
Faculty of Science, Kanagawa University

Abstract

避難経路問題の研究に, [Wang et al. 2021](New evaluation criteria in the Markov decision processes, Qi Wang, Masayuki Kageyama, Jingyao Zhang, Journal of Statistics and Management Systems, 24(3),625-632,2021.) がある. ここでは, 最適避難経路に関する導出の問題に対して, 有限期間割引総期待利得を評価関数にもつマルコフ決定過程として数理モデルを定式化した問題の解決を行っている. このような実際的问题(practical problem)を解く場合に, それぞれの位置間(状態間)での人の移動量観測データに基づいた推移確率法則の推定を区間型ベイズ推定によって行い, それらの推定値による推移確率行列は避難行動のシミュレーション分析(Simulation-Based Analysis)に用いることができる. 一方で, 適用される推移法則の区間ベイズ推定アルゴリズムにおいては, 解かれる非線形方程式の構造によっては, ニュートン・ラフソン法ではうまく求解に至らない場合が起こり得る. そこで, 本報告では, 非線形方程式の解法について, その対象とする関数の構造から, 求解方法の改良について報告する.

1 はじめに

避難経路問題の研究に, [Wang et al. 2021](New evaluation criteria in the Markov decision processes, Qi Wang, Masayuki Kageyama, Jingyao Zhang, Journal of Statistics

and Management Systems, 24(3),625-632,2021.) がある. そこでは, 例えば, 図1のような施設配置における最適避難経路(位置(1, 1)から位置(4, 3)への経路)の導出を, 有限期間割引総期待利得を評価関数にもつマルコフ決定過程として定式化して, 最適避難経路問題の解決を行っている. このような実際的问题(practical problem)を解く場合に, それぞれの位置間での人の移動量観測に基づいた推移確率法則の推定方法とその推定はシミュレーション分析(simulation-Based Analysis)を行うことができる. 本報告では, そこで必要となる推移法則の区間ベイズ推定アルゴリズムの改良について報告する.

In this case, (2, 2) is blocked, (4, 3) is an exit, and (4, 2) is a fire point.

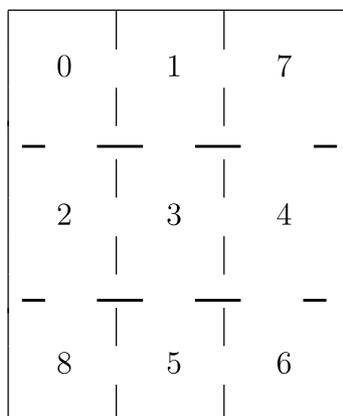
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
(1,2)		(3,2)	(4,2)
(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)

Figure 1: evacuation routes problem([4])

2 マルコフ連鎖における経路問題

ここでは, 次のような経路問題をもとに, 状態観測に基づく推移法則の区間ベイズ推定法の改良について考える.

[マルコフ連鎖による経路問題] Maze Problem (Taylor & Karlin, An Introduction to Stochastic Modeling, revised edition, 1994,[3])



上の図のように, 番号0から番号8の部屋がある. ロボットは, 各部屋から, 隣の部屋に等確率で推移できるとする.

例えば, 部屋0からは, 確率 $\frac{1}{2}$ ずつで, とよりの部屋1または部屋2に移動する.

部屋7には, 報酬があり, 部屋8には報酬がない. 部屋7または部屋8に一旦, 入室すると, そのままその部屋にとどまり続ける. マルコフ連鎖をなす確率過程において, 部屋7, 8は, それぞれ吸収状態と考えることができる.

この数理モデルは、次のようなマルコフ連鎖による確率過程として構成できる。状態空間は $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ であり、推移確率行列は

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

である。状態番号7および8は、吸収状態である。このいずれかの吸収状態に到達されるまでの各状態の滞在回数を、真の確率行列を上記の推移確率行列 P としたマイクロシミュレーションによる観測度数を次に示す。

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1711 & 1709 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 696 & 0 & 0 & 744 & 0 & 0 & 0 & 771 & 0 \\ 724 & 0 & 0 & 713 & 0 & 0 & 0 & 0 & 720 \\ 0 & 500 & 448 & 0 & 514 & 508 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 267 & 0 & 0 & 244 & 248 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 246 & 0 & 0 & 256 & 0 & 261 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 245 & 255 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1019 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 981 \end{pmatrix} \quad (2)$$

上の観測度数は、状態番号7あるいは8に到達する合計数が2000回になるまで観測した結果である。次の節では、この観測度数をもとにした区間型ベイズ推定手法の概略を述べる。

3 推移法則の区間ベイズ推定法

文献[1]を参照して、式(2)の観測度数行列 M から、式(1)の真の確率行列の区間型ベイズ推定手法を、以下のようにまとめる。

有限状態マルコフ決定過程は $\{S, A, Q, \mathbf{r}\}$ の4つから成り立つ。状態空間を $S :=$

$\{1, 2, \dots, n\}$, 決定空間を $A := \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ とする. 次の集合を定義する:

$$P(S) := \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{i \in S} p_i = 1\}, \quad (3)$$

$$P(S|S) := \{q = (q_{ij} : i, j \in S) \in \mathbb{R}_+^{n \times n} \mid \sum_{j \in S} q_{ij} = 1 \ (i \in S)\}, \quad (4)$$

$$P(S|S \times A) := \{Q = (q_{ij}(a) : i, j \in S, a \in A) \in \mathbb{R}_+^{kn \times n} \mid q_i \cdot(a) \in P(s) \ (i \in S, a \in A)\}. \quad (5)$$

ただし, $\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^{m \times n}$ は, それぞれ非負の n 次元実ベクトルと (m, n) 実行列を表す. 推移確率行列を $Q = (q_{ij}(a)) \in P(S|S \times A)$, 利得関数を $\mathbf{r} = (r(i, a)) \in B_+(S \times A)$ で表す. ただし, $B_+(D)$ は集合 D 上の非負実数値関数の全体を表す. 我々は, 推移確率行列 $Q = (q_{ij}(a)) \ (i, j \in S, a \in A)$ が未知であるマルコフ決定過程(Uncertain MDPs)を考える. 区間推定MDPsの構成を簡単にするために, 確定的(deterministic)かつ定常(stationary)な政策のもとでのマルコフ決定過程について考察する. 従って, 以後, ある固定されたdeterministic stationary policyでの推定される推移確率行列を $P = (p_{ij})$ と表すことにする.

S から A への写像 f の全体を F で表す. 任意の $f \in F$ に対して, 割引率 $\beta \ (0 < \beta < 1)$ によって割り引かれた総期待利得ベクトル $\phi(f|Q) \in \mathbb{R}_+^n$ を確率行列 $Q \in P(S|S \times A)$ の関数として次で定める:

$$\phi(f|Q) = \sum_{t=0}^{\infty} (\beta Q(f))^t \mathbf{r}(f), \quad (6)$$

ただし, $\mathbf{r}(f) = (r(1, f(1)), r(2, f(2)), \dots, r(n, f(n)))' \in \mathbb{R}_+^n$, $Q(f) = (q_{ij}(f(i))) \in P(S|S)$. ここで, 特に, 吸収マルコフ連鎖をなす行列 P に対して, 過渡的集合の推移確率行列を Q とすれば, 状態 i から吸収されるまでに状態 k を訪問する平均回数 m_{ik} を求めるには, 上記の $\phi(f|Q)$ に関して, 変則的ではあるが, $\beta = 1, r(k, f(k)) = 1, r(i, f(i)) = 0 \ (\forall i \neq k)$ と考えれば良い.

区間推定MDPsの構成について, 推移確率行列は各行ごとに区間ベイズ推定を行う. 従って, ここでは, ある固定された状態から次の期に推移する確率 $\{p_i\}_{i \in S}$ について議論して行く.

$P_n := P(S) = \{p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$ とおく. \mathbb{R}^n のルベグ可測集合の全体を \mathcal{B} で表す. \mathcal{B} 上の2つの測度 L, U が任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $L(A) \leq U(A)$ であるとき, 単に $L \leq U$ と表すことにする. このような $L \leq U$ である2つの測度を用いて, 事前区間測度を $[L, U]$ と表す.

ここで, P_n 上のルベグ測度 $L(\cdot)$ から, 上側の測度 U は, $U(\cdot) = kL(\cdot)$ となるような測度 L の $k \ (k \geq 1)$ に関する比例測度(proportional measure)と仮定する, すなわち, 事前区間測度を, $[L, kL] = [dp, k dp]$ とする.

独立試行実験を $\hat{\sigma}$ 回行い, 次の期に状態 i へ推移した回数を σ_i で表すとする. この時, それぞれの状態に関するデータを $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ と表すと $\hat{\sigma} = \sum_{k=1}^n \sigma_k$ である. 状態 i へ推移する確率を p_i とするとき, σ の確率密度関数はパラメータ $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ に関する多項分布で表されて

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n | p) = \frac{(\sigma_1 + \dots + \sigma_n)!}{\sigma_1! \dots \sigma_n!} p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \dots p_n^{\sigma_n} \quad (7)$$

となる.

ここで, (DeRobertis/Hartigan 1981 [2])の区間ベイズ推定の手法を事前区間 $[L, kL]$ に適用すると, 事後測度区間 $[L_\sigma, U_\sigma] := [L_\sigma, kL_\sigma]$ は多次元ベータ関数によって表され, さらに p_i に関する事後測度区間 $[\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i]$ (簡単のため $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ と表すことにする)は, 事後区間測度 $Q \in [L_\sigma, kL_\sigma]$ による次のような p_i との積分比の範囲から作られる:

$$\left\{ \frac{\int_{P_n} p_i Q(dp)}{\int_{P_n} Q(dp)} \middle| L_\sigma \leq Q \leq U_\sigma \right\} \quad (8)$$

さらに, $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ はそれぞれ次の方程式の一意の解である.

$$U_\sigma(p_i - \underline{\lambda})^- + L_\sigma(p_i - \underline{\lambda})^+ = 0 \quad (9)$$

$$U_\sigma(p_i - \bar{\lambda})^+ + L_\sigma(p_i - \bar{\lambda})^- = 0 \quad (10)$$

ただし, $x^+ = \max\{0, x\}$, $x^- = x - x^+ = \min\{0, x\}$ である.

ここで, $U_\sigma = kL_\sigma$ であることと多次元ベータ関数(ディリクレ関数)を用いれば, 上述の (9),(10)は次のようにディリクレ積分による方程式として表すことができる:

(lower bound $\underline{\lambda}$):

$$k \int_{0 \leq p_i \leq \underline{\lambda}, p \in P_n} (p_i - \underline{\lambda}) p_1^{\sigma_1} \cdots p_n^{\sigma_n} dp + \int_{\underline{\lambda} \leq p_i \leq 1, p \in P_n} (p_i - \underline{\lambda}) p_1^{\sigma_1} \cdots p_n^{\sigma_n} dp = 0 \quad (11)$$

(upper bound $\bar{\lambda}$):

$$k \int_{\underline{\lambda} \leq p_i \leq 1, p \in P_n} (p_i - \bar{\lambda}) p_1^{\sigma_1} \cdots p_n^{\sigma_n} dp + \int_{0 \leq p_i \leq \bar{\lambda}, p \in P_n} (p_i - \bar{\lambda}) p_1^{\sigma_1} \cdots p_n^{\sigma_n} dp = 0 \quad (12)$$

ガンマ関数 $\Gamma(x)$ ($x > 0$), ベータ関数 $B(x, y)$ ($x, y > 0$), 不完全ベータ関数 $B(x, y|\lambda)$ ($x, y > 0, 0 \leq \lambda \leq 1$)をそれぞれ次のように定義する:

$$\text{ガンマ関数: } \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

$$\text{ベータ関数: } B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x, y > 0)$$

$$\text{不完全ベータ関数: } B(x, y|\lambda) = \int_0^\lambda t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x, y > 0, 0 \leq \lambda \leq 1)$$

また, ディリクレ積分 $D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1})$ および $D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}|\lambda)$ ($k \geq 1, 0 \leq \lambda \leq 1$)を次のように定める.

$$D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1})$$

$$:= \int \cdots \int_{S_k} x_1^{\nu_1-1} x_2^{\nu_2-1} \cdots x_k^{\nu_k-1} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_k)^{\nu_{k+1}-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_k$$

$$D(\nu_1, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}|\lambda)$$

$$:= \int \cdots \int_{S_k \cap \{0 \leq x_1 \leq \lambda\}} x_1^{\nu_1-1} \cdots x_k^{\nu_k-1} (1 - x_1 - \cdots - x_n)^{\nu_{k+1}-1} dx_1 \cdots dx_k$$

ただし, $S_k := \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k x_i \leq 1\}$.

ここで, デイリクレ積分とベータ関数の関係から

$$D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}) = B(\nu_1, \nu_2 + \dots + \nu_{k+1})D(\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}) \quad (13)$$

$$D(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k; \nu_{k+1} | \lambda) = B(\nu_1, \nu_2 + \dots + \nu_{k+1} | \lambda)D(\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_k; \nu_{k+1}) \quad (14)$$

であって, さらにベータ関数の性質を利用して, 式(11)と式(12) は次の λ に関する多項方程式の解であることが示される.

$$K(s, t, \lambda) := \left(\frac{s}{s+t} - \lambda \right) B(s, t) + (k-1) (B(s+1, t | \lambda) - \lambda B(s, t | \lambda)) = 0 \quad (15)$$

$$G(s, t, \lambda) := k \left(\frac{s}{s+t} - \lambda \right) B(s, t) - (k-1) (B(s+1, t | \lambda) - \lambda B(s, t | \lambda)) = 0 \quad (16)$$

と表される. ただし, $\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^n \sigma_i, s = \sigma_1 + 1, t = \hat{\sigma} - \sigma_1 + n - 1$ である. この式(15)と(16)は, 具体的には $(\hat{\sigma} + n)$ 次多項方程式である ($s + t = \hat{\sigma} + n$). 以下に定理としてまとめておく:

Theorem 1. パラメータ $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ について, 各 p_i に関する事後測度区間 $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ は次の多項方程式の解として得られる.

$$K(s, t, \underline{\lambda}) := B(s+1, t) - \underline{\lambda} B(s, t) + (k-1) (B(s+1, t, \underline{\lambda}) - \underline{\lambda} B(s, t, \underline{\lambda})) = 0 \quad (17)$$

$$G(s, t, \bar{\lambda}) := k(B(s+1, t) - \bar{\lambda} B(s, t)) - (k-1) (B(s+1, t, \bar{\lambda}) - \bar{\lambda} B(s, t, \bar{\lambda})) = 0 \quad (18)$$

ただし, $s = \sigma_i + 1, t = \hat{\sigma} - \sigma_i + n - 1$ である.

$K(s, t, \lambda), G(s, t, \lambda)$ は, 変数 λ に関して, とともに狭義単調関数で $K(s, t, \lambda)$ は上に凸, $G(s, t, \lambda)$ は下に凸であり, K, G はともに $[0, 1]$ に1つの解をもつことが容易に示される.

不完全ベータ関数 (原始関数) は, 次のように有限多項式展開できることが知られているが, n が大きな高次多項式の場合に, 方程式(17)と(18)の解を次に述べるニュートン・ラフソン法 (Algorithm A) とともに別の方法でも求めることについて考える.

$$\begin{aligned} B(m, n | \lambda) &= \int_0^1 (\lambda \theta)^{m-1} (1 - \lambda \theta)^{n-1} \lambda d\theta \\ &= \lambda^m \int_0^1 \theta^{m-1} (1 - \lambda \theta)^{n-1} d\theta \\ &= \lambda^m \int_0^1 \theta^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-\lambda \theta)^i \right) d\theta \\ &= \lambda^m \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-\lambda)^i \int_0^1 \theta^{m+i-1} d\theta \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i \lambda^{m+i} \frac{1}{m+i}. \end{aligned}$$

Algorithm A:

- Step 1. Set $n := 0$ and specify $\varepsilon > 0$. Select $\lambda (0 < \lambda < 1)$ such that $K(s, t, \lambda) < 0$. Set $x_n := \lambda$.
2. Let $W(s, t, x_n) := \frac{K(s, t, x_n)}{K'(s, t, x_n)}$. Compute $x_{n+1} := x_n - W(s, t, x_n)$.
3. If $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, set $\lambda_i := x_{n+1}$ and stop. Otherwise increase n by 1 and go back to Step 2.

ただし,

$$W(s, t, x_n) := -\frac{\left(\frac{s}{s+t} - x_n\right)B(s, t) + (k-1)\left(\frac{s}{s+t} - x_n\right)B(s, t, x_n) - \frac{k-1}{s+t}x_n^s(1-x_n)^t}{B(s, t) + (k-1)B(s, t, x_n)} \quad (19)$$

一般に, Newton-Raphson法の漸化式 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ について, $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ とすれば $f'(\alpha) \neq 0$ である α について, $f(\alpha) = 0$ であることと $\phi(\alpha) = \alpha$ であることは同値である. さらに, K について次の性質を得る:

Proposition 1.

$$K(s, t, \lambda) = \lambda K'(s, t, \lambda) - K'(s+1, t, \lambda) \quad (20)$$

$$\frac{K(s, t, \lambda)}{K'(s, t, \lambda)} = \lambda - \frac{K'(s+1, t, \lambda)}{K'(s, t, \lambda)} \quad (21)$$

上述の命題から,

$$\phi(\lambda) = \frac{K'(s+1, t, \lambda)}{K'(s, t, \lambda)} \quad (22)$$

であって,

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \frac{K'(s+1, t, x_n)}{K'(s, t, x_n)} = \frac{B(s+1, t) + (k-1)B(s+1, t, x_n)}{B(s, t) + (k-1)B(s, t, x_n)} \quad (23)$$

を得る.

また, $\phi(\lambda)$ の1次導関数について

$$\phi'(\lambda) = \frac{-(k-1)\lambda^{s-1}(1-\lambda)^{t-1}}{K'(s, t, \lambda)}(\lambda - \phi(\lambda)) \quad (24)$$

であることから, 次の命題と定理を得る:

Proposition 2. $\phi(\lambda) = K'(s+1, t, \lambda)/K'(s, t, \lambda)$ とするとき, 次が成り立つ.

- (i) $\phi(0) = \phi(1) = B(s+1, t)/B(s, t)$

(ii) $\phi'(\lambda) = 0$ となる λ は $\lambda = 0, 1$ と $\phi(\alpha) = \alpha$ を満たす α である, すなわち, この α は $K(s, t, \lambda) = 0$ の解である.

(iii) $\phi(\lambda)$ の増減は $0 < \lambda < \alpha$ で狭義単調減少, $\alpha < \lambda < 1$ で狭義単調増加である.

問題点: 計算機(ソフトウェア)によっては, $a, b > 100$ くらいでも, 正確に反復が行えない場合が起きている.

考えられる理由: ニュートン-ラフソン法を適用する関数の傾きが大きい(y 軸に平行に近い), あるいは x 軸にほぼ平行(極値をとり得る関数値の変化する区間, 高さが極めて小さい)

次に, ニュートン-ラフソン法や不動点探索アルゴリズムの適用が必ずしもうまくいかない場合の例を図示する(図2, 3).

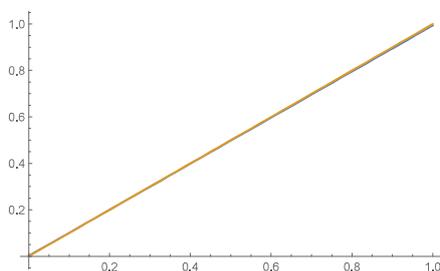


Figure 2: 式 $H_G(s, t, \lambda) = G(s, t, \lambda) + \lambda = \psi(\lambda)$ についての不動点探索の例, ただし $s = 2, t = 11, k = 2$ で上限値 $\bar{\lambda} \doteq 0.181606$ を求める問題の関数 $\phi(\lambda)$ と λ のグラフ

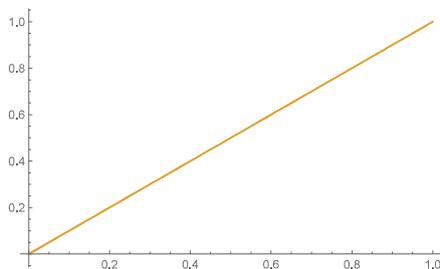


Figure 3: 式 $H_G(s, t, \lambda) = G(s, t, \lambda) + \lambda = \psi(\lambda)$ について, $s = 798, t = 788, k = 2$ のときの上限値 $\bar{\lambda} \doteq 0.506617$ を探索したいが $G(s, t, \lambda)$ と λ の軌跡がほとんど重なっており不動点探索がうまく行かない例

そこで, つぎのようにいくつかの改善方法の検討とその結果について考察する.
改良のアイデアとして次を挙げる:

(1) 単純に不動点探索の問題として考える.

例: 式(22)による反復計算による不動点探索を行う.

- (2) 最尤法のように, 極大値探索に置き換えて考える.
例:

$$\phi'(\lambda) = \frac{-(k-1)\lambda^{s-1}(1-\lambda)^{t-1}(\lambda K'(s, t, \lambda) - K'(s+1, t, \lambda))}{K'(s, t, \lambda)^2} \quad (25)$$

$$= \frac{-(k-1)\lambda^{s-1}(1-\lambda)^{t-1}(\lambda - \phi(\lambda))}{K'(s, t, \lambda)} \quad (26)$$

であるので, これらの場合の区間ベイズ推定法では $\phi(\lambda)$ の不動点探索($\lambda^* = \phi(\lambda^*)$)をしていることと同等な問題であることにも気づく.

改良のアイデア:

- (3) (今後の課題): 分数計画問題としての変形問題をさらに考察する.

Fractional programming problem: (P) $\min_{\lambda \in [0,1]} \frac{K'(s+1, t, \lambda)}{K'(s, t, \lambda)}$,

Parametric problem: (P_q) $F(q) = \min_{\lambda \in [0,1]} (K'(s+1, t, \lambda) - qK'(s, t, \lambda))$

さらに, 本報告での関数 $\phi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ に対して不動点探索法が適用可能であることを示す図を挙げておく (図4, 5).

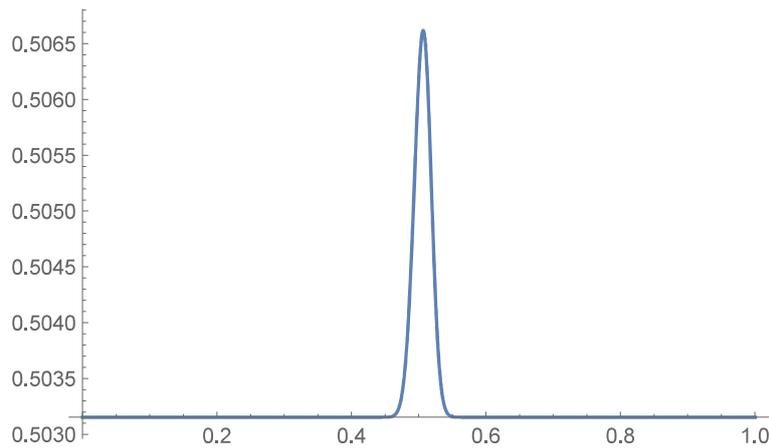


Figure 4: $s = 798, t = 788, k = 2$ での上限値 $\bar{\lambda}$ を求めるときの $\psi(\lambda)$ のグラフ

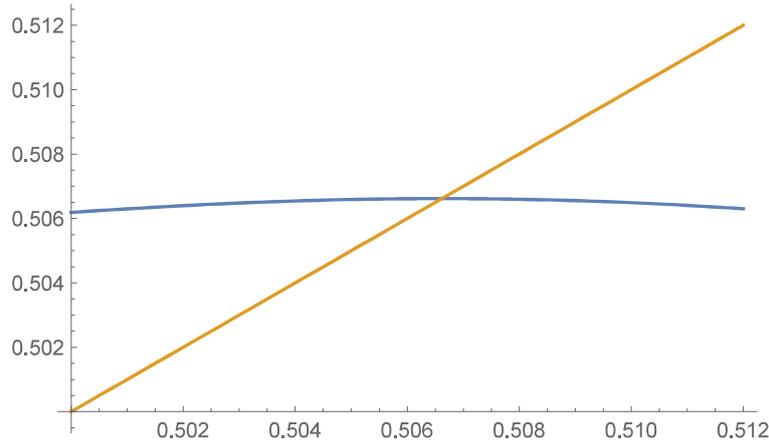


Figure 5: $\lambda = \psi(\lambda)$ の不動点探索で $s = 798, t = 788, k = 2$ についての上限値 $\bar{\lambda} \doteq 0.506617$ を求めるときのグラフ

4 数値例

吸収マルコフ連鎖である真の推移確率行列 P に対して、状態推移の観測度数から、推移確率行列の区間推定と、その推定された行列の下界および上界内の確率行列に対する平均滞在時間、吸収されるまでの平均到達時間（平均停止時間）について、結果をまとめておく。

式(2)をもとに、 $k = 2$ のときの区間型ベイズ推定による式(1)の区間型確率行列を定める下界行列 \underline{A} と上界行列 \bar{A} は以下ようになる。

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.497933 & 0.497349 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.320955 & 0 & 0 & 0.343203 & 0 & 0 & 0 & 0.327907 & 0 \\ 0.332848 & 0 & 0 & 0.327766 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.331 \\ 0 & 0.251103 & 0.230068 & 0 & 0.25817 & 0.255141 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.346943 & 0 & 0 & 0.316866 & 0.322095 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.317806 & 0 & 0 & 0.330813 & 0 & 0.337318 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.483885 & 0.503804 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0.502651 & 0.502067 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.326522 & 0 & 0 & 0.348862 & 0 & 0 & 0 & 0.333504 & 0 \\ 0.338456 & 0 & 0 & 0.333353 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.336601 \\ 0 & 0.256509 & 0.22486 & 0 & 0.263625 & 0.260576 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.356489 & 0 & 0 & 0.326203 & 0.331471 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.327126 & 0 & 0 & 0.340227 & 0 & 0.346776 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.496196 & 0.516115 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

上記の下界行列 \underline{A} と上界行列 \overline{A} は、一般に非負値行列であって、それぞれにおいて行和が1とは限らないことに注意する。

ここで、行列 $\underline{A} \leq \hat{P} \leq \overline{A}$ の条件を満足するような推移確率行列 \hat{P} で、状態番号7に推移する確率が大きくなるようなものとして、次のような確率行列に対して、平均滞在時間、吸収されるまでの平均到達時間（平均停止時間）を求めてみる。

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.502651 & 0.497349 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.323293 & 0 & 0 & 0.343203 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333504 & 0 \\ 0.3370515 & 0 & 0 & 0.3319485 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.331 \\ 0 & 0.2538375 & 0.230068 & 0 & 0.2609535 & 0.255141 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.349303 & 0 & 0 & 0 & 0.319226 & 0.331471 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3247905 & 0 & 0 & 0 & 0.3378915 & 0 & 0.337318 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.496196 & 0.503804 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

このとき、 $i \in S$ から吸収されるまでの過渡的状态 $k \in S$ の平均訪問回数 w_{ik} と、吸収状態へ到達するまでの平均停止時間 v_i をまとめると、次のようになる。

$$w_{00} = 1.73627, w_{01} = 0.727094, w_{02} = 0.745546, w_{03} = 0.483008, w_{04} = 0.251772, \\ w_{05} = 0.239932, w_{06} = 0.245807$$

$$w_{10} = 1.13207, w_{11} = 1.62592, w_{12} = 0.632968, w_{13} = 0.757349, w_{14} = 0.394775, \\ w_{15} = 0.376211, w_{16} = 0.385422$$

$$w_{20} = 1.09858, w_{21} = 0.597673, w_{22} = 1.60484, w_{23} = 0.706604, w_{24} = 0.368324, \\ w_{25} = 0.351003, w_{26} = 0.359598$$

$$w_{30} = 1.02166, w_{31} = 1.02602, w_{32} = 1.01726, w_{33} = 2.02714, w_{34} = 1.05667, \\ w_{35} = 1.00698, w_{36} = 1.03163$$

$$w_{40} = 0.400124, w_{41} = 0.401829, w_{42} = 0.398399, w_{43} = 0.79391, w_{44} = 1.66705, \\ w_{45} = 0.647594, w_{46} = 1.15345$$

$$w_{50} = 0.396232, w_{51} = 0.397922, w_{52} = 0.394525, w_{53} = 0.786189, w_{54} = 0.666913, \\ w_{55} = 1.64764, w_{56} = 1.16101$$

$$w_{60} = 0.269082, w_{61} = 0.270229, w_{62} = 0.267922, w_{63} = 0.533902, w_{64} = 0.788628, \\ w_{65} = 0.775541, w_{66} = 1.78203$$

$$v_0 = 6.05403, v_1 = 5.04668, v_2 = 5.06146, v_3 = 6.0881, v_4 = 5.19413, v_5 = 5.0449, v_6 = 6.11895.$$

真の推移確率行列 P のもとの平均停止時間は、状態番号の順に、 $v_0 = 6, v_1 = 5, v_2 = 5, v_3 = 6, v_4 = 5, v_5 = 5, v_6 = 6$ であるから、一方の吸収状態（番号7）へ推移する確率を増大させようとする作用（シナリオ）は、平均滞在時間も増大することが確認できる。本報告のような区間型ベイズ推定モデルは、避難誘導のシナリオ分析として有効な手法となりうる示唆が得られていると考えている。

References

- [1] 堀口正之, 未知の推移確率行列の事前・事後区間表現とマルコフ決定過程について, 京都大学数理解析研究所講究録1682「不確実・不確定性下での意思決定過程」, pp. 70-77, 2010.04
- [2] Lorraine De Robertis and J. A. Hartigan. Bayesian inference using intervals of measures. *Ann. Statist.*, 9(2):235–244, 1981.
- [3] Taylor, H.M. and Karlin, S. : An Introduction to Stochastic Modeling. Academic Press (1994)
- [4] Wang, Q., Kageyama, M. and Jingyao, Z. New evaluation criteria in the Markov decision processes, *Journal of Statistics and Management Systems*, 24(3), pp. 625-632, 2021.
- [5] Dynkin, E.B., Yushkevich, A.A.: Controlled Markov Processes Springer, New York (1979)

Qi Wang
Department of Applied Information Technology,
Faculty of Applied Information Technology,
Nagasaki Institute of Applied Science

Aiko KURUSHIMA
Department of Economics,
Faculty of Economics,
Sophia University

Masayuki Horiguchi
Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Kanagawa University

長崎総合科学大学・総合情報学部・王琦
上智大学・経済学部・來島愛子
神奈川大学・理学部 堀口正之