数学の歴史と数学教育[1]

東北大学名誉教授 森田康夫

Yasuo Morita
Tohoku University

§0. 私と数学教育

私は保型関数や p 進解析を専門とする整数論の研究者であるが，平成元年告示の学習指導要領への対応を検討する日本数学会の検討会の世話役を務めたのをきっかけとして，以降飯高茂氏主催の**数学教育の会**に出席するようになり，数学教育に興味を持つようになった。

私は，東北大学入学試験研究委員会の委員として東北大学入学試験の研究を行い，また倉元直樹氏ら教育学の研究者と共同研究を行い，査読付き論文を何編か書いている。また 1995 年頃，少子化により大学の入学試験が緩和すると聞き，**少子化が教育に与える影響**の研究を始めた。私は，東北大学大学院理学研究科退職後 7 年間東北大学教養教育院で働き，**数学の歴史**や**科学技術**について大学初年次の学生に教えるとともに，数学以外の分野の人と**教養教育**について研究を行った。

私は日本数学会の理事長として，儀俄美一氏らと**数学の評価のあり方**を日本数学会理事会で検討し，日本数学会の声明を出した。

私は，学術会議の**大学教育の質保証**に関する委員会の委員と，数理科学分野の参照基準を作る分科会の委員長を務め，**数理科学分野の参照基準**を作った。また，日本学術会議の数学教育分科会の委員長を務め，**高等学校の学習指導要領**について提言をまとめた。

その他，科学技術振興機構の**理数学生応援プロジェクト**や**科学の甲子園ジュニア**などの推進委員を務め，現在は**数学オリンピック**のために働いている。

§1. 古代ギリシャの数学[2]

数と図形に関する数学の研究は，メソポタミアやエジプトを初めとする多くの古代文明で生まれたが，その中でも古代ギリシャの数学は**論証により命題が成り立つことを確かめる**という優れた特色を持ち，その後の人類文化の発展に大きな影響を与えた。

古代ギリシャで最初に論証を行ったのはタレス（Thales，前 624 頃前 547）であり，円周角の定理を発見したとされるなど，いろいろな逸話が伝わっている。ピタゴラス（Pythagoras，前 572 頃-前 497 ）はタレスの後を継ぎ，ピタゴラス学派を作り，数学・音楽・哲学などの研究を行い初等幾何学を発展させたが，本人について正確なことは分かっていない。

ユークリッド (Euclid， 前 390 頃-前 275 頃）はそれまでの研究をまとめ，著書『**原論**』を書いた。ユークリッドの原論の初等幾何に関する部分は，定義からはじめ，公理・公

---

[1]This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

[2]古代ギリシャの数学とは，小アジア，イタリア，エジプトなどを含む地中海一帯で，ギリシャ語を使って行われた古代の数学研究を指す。

準[3]から 論証により結果を導いており，その後の数学体系の原型となった。

古代ギリシャの数学ではユークリッドの原論が頂点をなすが，それ以降のヘレニズム期にも，それ以降の数学の発展に繋がった優れた研究を行った人が何人かいる。

例えば，シシリー島のシラクーザの住民であるアルキメデス（Archimedes， 前 287 頃-前 212）は，放物線・球などの求積に成功し，後の求積法（**定積分**）誕生への示唆を与えたが，数学以外のいろいろなことにも優れた才能を持っていたため，ローマとの戦争に巻き込まれて亡くなった。小アジアのアポロニオス（Apollonius， 前 250 頃-175 頃）は著書『円錐曲線論』を著し，後に解析幾何学を生むきっかけを作ったが，その生涯はほとんど不明である。ディオファントス（Diophantus，3 世紀頃 (?)，アレクサンドリアで活動）は，著書『数論』を著し，不定方程式の有理数解や整数解を研究した。ディオファントスは「整数の平方 2 つの和が整数の平方となるための条件」などを研究し,「代数学の父」と呼ばれている。

これらの研究は非常にすばらしかったが,「古代ギリシャの数学は，一般性と操作可能性を兼ね備えた記号がなかったので行き詰まった」（数学辞典の「ギリシャ・ローマの数学」参照） 。

数学と教育との関連では，プラトン（Platon， 前 427-前 347）は，アカデミアという学園を作ったが，ピタゴラス学派の思想を受け学園の入り口に「幾何学を知らぬ者，くぐるべからず」との額を掲げ，**教育面での数学の価値**を重視した。

§2. インド・アラビアでの数学の発展と中世ヨーロッパの大学

古代ギリシャの数学は，アレクサンダー大王の東征（前 334-前 323）により東方世界に伝わり，**インド・アラビアでの数学研究**を経て，ルネッサンス期のヨーロッパに還流した。

古代ギリシャで扱った数は正の数のみだったが，インド・アラビアでゼロと負の数が発見され，数学が扱う範囲が広がった。また，未知数を含む式の変形と方程式の分類など，**代数学**が研究されたほか，組み合わせ論，球面三角法などが発達した。しかし中世のインド・アラビアでは，例外を除き，すべての主張は平文で記され，数式や記号は使われなかった。

現在の大学の原型は，ボローニャ大学（11 世紀末〜）やパリ大学（12 世紀半〜）などの中世ヨーロッパの大学であり，神学・法学・医学の**専門教育**を目的とし，学士や博士の学位を与えていた。また中世ヨーロッパの大学では，古代ギリシャ・ローマの伝統にしたがい，専門科目を学習するための準備教育（**教養教育**[4]）として，自由 7 科（文法，論理，修辞の三学と幾何，数論，天文，音楽の四科[5]）と哲学が教えられていた。

中世ヨーロッパの大学では，アラビアの数学書のラテン語訳などが教科書として使われていた。

§3. 17 世紀の数学と近代科学の誕生

[3]公理・公準はいずれも当然成り立つと思われる命題だが，そのうち平行線に関する公準はやや複雑であり，後に別の命題に入れ替えた非ユークリッド幾何が作られた。

[4]ギリシャ・ローマには奴隷がおり，教養の英訳 Liberal Arts は「自由人の技」を指し，社会の指導者である自由人に必要な能力を指した。

[5]これらは，古代ローマ時代から使われていた用語である。

16 世紀後半，ガリレオ・ガリレイ（Galileo, G. 1564-1642）は物の落下・振り子の周期・望遠鏡を使った天体観測などの**実験**を行い，数値を使って自然現象を記述し，自然法則を確認するという手法を発明した。

古代ギリシャの数学は，インド・アラビアでの方程式の研究を経てイタリアに伝わり，近代初期のヨーロッパで徐々に数式や演算記号が使われるようになり，15 世紀末から 16 世紀前半には，3 次･4 次の方程式の研究が行われた。また，ヴィエート（Viet, F. 1540-1603）は未知数だけではなく係数も文字で表し，解と係数の関係などを記述できるようにした。このようにして長い時間を掛けて徐々に進化した**文字式の体系**は，デカルト（Descartes, R. 1596-1650）により変数 x の n 乗を表す記号 x^n が使われるようになり，ほぼ現在使われているようなものとなった[6]。

これにより， 多項式や関数の概念が明らかになると共に，デカルトとフェルマは平面や空間に座標を入れ，文字式を使って幾何を研究する**解析幾何学**を作った。

フェルマ（Fermat, P. 1601-1665）はディオファントスの『数論』のラテン語訳を参考にして，**近代的整数論**の礎を築いた[7]。

また，フェルマとパスカル（Pascal, B. 1623-1662）は,「途中でやめた賭けの掛け金は，どう返還すべきか」という問題の研究から，**確率**の概念を発見した。ここで生まれた確率論は，18 世紀になり国家統計と結びつき,「不確定な事象」や「複雑な事象」を扱う**統計学**を生んだ。

ニュートン（Newton, I. 1642-1727）は物体の運動を文字式で記述し（運動方程式），ライプニッツと共に微分積分学を作り，物体の運動を研究した。このニュートンの研究により，現実世界の問題を数学の問題に翻訳し，数学を使って研究する方法が確立された。ニュートンの研究方法はガリレオの研究方法と結びつき，**実験と理論**からなる近代的な**自然科学**や**科学技術**が生まれ，産業革命につながった。

§4. 18 世紀から 19 世紀の数学ー数学研究の専門化と厳密化ー

18 世紀には，オイラー（Euler, L. 1707-1783）などにより微分積分学の研究が行われ，自然科学や工学への数学の応用が研究された。

複素数を介して指数関数と三角関数を結びつけるオイラーの公式が発見され，ガウス(Gauss,C.L. 1777-1855）により代数学の基本定理が証明され，**複素数**が広く使われるようになった。

また，ニュートンやオイラーの頃には曖昧であった**収束の概念**が，コーシー（Cauchy, A. 1789-1857）やワイエルシュトラス（Weierstras，K.T.W. 1815-1897）などにより明確になり，デデキンド（Dedekind, J. W. R. 1831-1916）により**実数**の理論的研究も行われた。

幾何学では,『原論』の平行線公準の研究から非ユークリッド幾何学が生まれ，オイラーやリーマン（Riemann, G. 1826-1866）により**多様体**の研究が行われ，アインシュタイン（Einstein, A. 1879-1955）の相対性理論につながった。

その他，オイラーやリーマンにより，素数や組み合わせ数がゼータ関数を使って研究され，無限集合を関数を使って研究する解析的整数論が誕生した。

[6] 古代ギリシャで欠けていた一般性と操作可能性を兼ね備えた記号が完成した。

[7] フェルマがディオファントスの『数論』のラテン語訳の欄外にに「ファルマの最終定理」を書いた話は有名であり，以降の数論研究の強い動機となった。

デデキンドは素因数分解の一意性を一般化するため，イデアルの概念を考え，無限集合を扱うようになったが，素朴な**集合論**はすぐ矛盾が生じる[8]。19 世紀後半には，数学者の中でも集合の取り扱いについて意見が分かれていた。

カントール（Cantor, G. 1845-1918）は集合の元の多さについて考え，2 つの集合は 1 対 1 対応をつけられるとき，同じ**濃度**を持つと定義した。カントールは，自然数全体の濃度より実数全体の濃度の方が真に大きいことを証明したが，自然数全体の濃度より真に大きく，実数全体の濃度より真に小さな濃度を持つ無限集合はないと考え，その予想を**連続体仮説**と呼んだ。

§5. 大学の歴史の続きー職業としての数学研究の成立と大学改革ー

大学で数学研究が行われたのは 17 世紀後半（例：ニュートン）からであり，それ以前は例外を除き，知識階級の趣味として数学は研究された[9]。

しかし，17 世紀から 18 世紀にかけ各国でアカデミーが作られ，オイラーはアカデミーで数学を研究した。また，大学でも数学研究は行われるようになり，数学研究が職業として成立するようになった。

中世に生まれた大学は，1810 年フンボルトがベルリン大学を設立し，大学教育は自然科学・歴史学・社会学・教育学などの**理論的学問**にまで広げられた。

米国の大学はこの頃まで教養教育を行っていたが，1876 年ジョンズ・ホプキンス大学が研究大学院大学として設立され，**大学院での教育・研究**が始まった。

なお，経営学（1908 年ハーバード大学）や工学（1873 年工部大学校，1913 年ジョンズ・ホプキンス大学）などの**実用的学問**は，19 世紀末から 20 世紀初めに大学での研究・教育に加わった。

§6. 計算機と情報科学の誕生

18 世紀～19 世紀にかけて数学は分野を広げ，厳密さを増し，抽象的になりながら，20 世紀の数学につながって行った。

ヒルベルト（Hilbert, D. 1862-1943）は**数学の基礎**（数学の無矛盾性の証明）に興味を持ち，初等幾何学の公理の再構成などを行ったが，カントールの**連続体仮説**の証明を「20 世紀の解かれるべき問題」（ヒルベルトの 23 問題）の第一に挙げた。

これを受けて，ゲーデル（Godel，Kurt, K. 1906-1978）は数学の基礎を研究し，帰納的関数を定義し，不完全性定理を証明するなどして，**数学基礎論**を建設した[10]。

同じ頃，チューリング（Turing, A. 1912-1954）は「計算するとは何か」を考え，**チューリング・マシーン**を考案し，チューリング・マシーンを使って「計算可能だとは何か」を研究した[11]。

第二次世界大戦により暗号解読や核兵器の研究が進み，フォン・ノイマン（Neumann, J. 1903-1957）らは，真空管を使ってチューリング・マシーンを実現する**電子計算機**を作り，実世界への応用を始めた。

---

[8] $X = \{x | x \notin x\}$ という“集合”を考えると，$X \in X$ でも $X \notin X$ でも矛盾を生じる。

[9] 例えば，デカルトは哲学者，フェルマは法律家，ライプニッツは政治家・外交官であった

[10] 連続体仮説については，他の集合論の公理系から独立なことが証明された。

[11] 数学基礎論における帰納的関数と チューリング・マシーンで計算可能な関数とは一致する。

その後，真空管に代わる半導体の進歩に伴って計算機は急速に発展し，科学技術だけではなく，人々の生活に必要欠くべからざるものとなり，**情報科学**が生まれたが，今でも計算機の理論（計算機科学）は数学と密接な関係がある。

§7. 数学の進歩と数学の評価[12]

数学は科学と技術の基盤であり，私たちの生活のために非常に役立っており，数学の研究は重要である。しかし，ギリシャの 3 大問題[13]，フェルマの最終定理，ヒルベルトの第 10 問題（不定方程式の可解性）など，歴史上有名な数学の難問は解けるまで長い時間がかかった。またこれらの難問を解くためには新しい理論を必要としたが，背後にある理論が見えてくるまでには，長い時間がかかり，予想外のこと（否定的解決）も起こった[14]。

要約すると，数学の難問は予想外の形で解かれることが多く，将来どのように数学が役立つかは解けるまで分からない。したがって,「世の中に役に立つ数学」に限定して研究を行うことは不可能である。そのため，数学の研究は数学者の知的好奇心に基づき行うしかなく，その評価は数学者によるピア・レビューで行うべきである。

§8. 数学教育の役割と在り方

- **算数**を知らないと，お金や時間の計算や地図の理解ができないなどのことが起こり，現代社会で快適に生きてゆくのが困難となる。
- 数学を学習することは，論理力・理解力・発想力などを培うために有用である（**教養教育**，古代ギリシャに起源を持つ）。
- 数学はいろいろな分野で使われるので，数学教育は専門教育の基礎（**専門基礎教育**）としても重要である。例えば，理学や工学は物理学が基礎となっており，線形代数学や微分積分学が使われる。生命科学は生物を対象とするため複雑であり，統計学が使われる。社会科学・人文科学は，人や社会を対象とするため，論理力と統計学が使われる。

注意. 数学者は自分が研究している分野の研究・教育をする人の養成に適した内容を教えたがる傾向があるが，受講者が必要とすることを教えるべきである。例えば，数学者にとって微分方程式では解の存在や一意性が重要であるが，天気予報では近未来の解が重要であり，変数や境界条件が複雑で，数値解析が使われる。また，代数学・幾何学・解析学・その他などの研究分野の利害にこだわる人が多いが，そのようなことにこだわるべきではない。

注意. 限られた時間で教えられることには限度がある。教える内容を増やすなら，スクラップする内容も検討する必要がある。また課題学習などは，数学の時間内ですべて行うのではなく，部活などの時間を使うこともできるのではないか？

---

[12] この節の内容は， Philippe Tondeur 氏と儀我美一氏から強い影響を受けている。

[13] 与えられた立方体の 2 倍の体積を持つ立方体を作図する，与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図する，任意の与えられた角を 3 等分する，の 3 つの問題を指す。いずれも定規とコンパスのみで作図することが求められており，19 世紀に体の理論を使って不可能なことが証明された。

[14] ヒルベルトの第 10 問題「任意の与えられた不定方程式が整数解を持つかどうかを有限回で判定するアルゴリズムを求めよ」は，そのようなアルゴリズムは存在しないことが証明された（Matiyasevich）。

注意. 日本では，統計を使っている人は多いが，統計を研究している人は少ない。数学者にとって，統計学を研究することは難しいが,（専門基礎教育の）統計学を教えることは難しくない。

§9. 数学教育への私の提言

- 初等・中等教育では，教える児童・生徒の特性や成長状況に応じて柔軟な教え方をすべきであり，少人数教育が必要である。
- 大学では，各分野で必要な数学を教えるべきである。そのために，教員は各分野のことをある程度知る必要がある。
- 生命科学では，もっと統計学を教える必要がある。
- 社会科学・人文科学では，論理力・発想力を培うことを意識して教えると共に，統計学を教える必要がある。
- 経済学・経営学・教育学は，社会科学の中では数学を使うことが多い。しかし統計学は教える必要がある。

【参考文献】

[1] 森田康夫，東北大学の 1 年生向け授業,「数学を俯瞰する」,「教育と科学技術」, 2009-2016.

[2] 東北大学教養教育院編，教養と学問，東北大学教養教育院叢書，大学と教養 1，2018（森田は，第 1 章，教養教育の歴史，pp.3-31 を執筆）.

[3] 日本学術会議，大学教育の分野別質保証のための教育課程編成上の参照基準：数理科学分野，2013，http://www.scj.go.jp/ja/info/kohyo/division-16.html.

[4] 日本数学会編集，岩波数学事典第 4 版，2007.