

高種数の向き付け不可能な極大曲面について

弓削商船高等専門学校 金田 伸

Shin Kaneda

National Institute of Technology, Yuge College

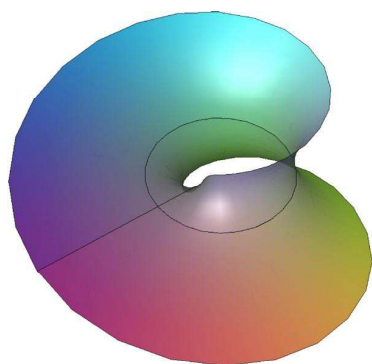
概要

3次元 Lorentz-Minkowski 空間の向き付け不可能な極大曲面で高種数なものの構成法を紹介する. 本稿の内容は藤森祥一氏 (広島大学) との共同研究 [FK] に基づく.

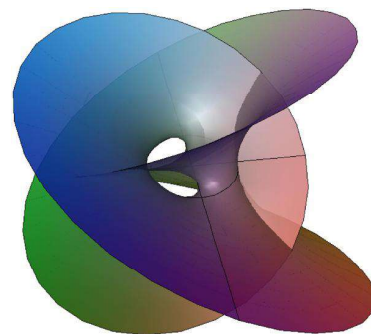
1 導入

3次元 Euclid 空間の極小曲面と 3次元 Lorentz-Minkowski 空間の極大曲面は共に平均曲率が恒等的に零になる曲面であり, 類似の表現公式を持っている.

向き付け不可能な完備極小曲面に関する研究は W. H. Meeks III 氏による Möbius の帯型の完備極小曲面 (図 1左参照) の構成から始まった [M]. その後, F. J. López 氏は [L] で Klein の壺から 1 点を取り除いたものに同相な完備極小曲面 (図 1右参照) を構成し, その曲面は [LM] において López 氏と F. Martín 氏により高種数に拡張された (図 2参照).



Möbius の帯型極小曲面



Klein の壺 $\setminus \{1pt\}$ 型極小曲面

図 1 向き付け不可能な完備極小曲面

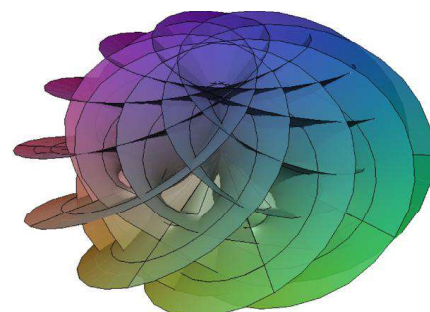
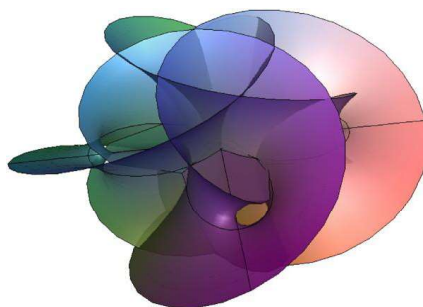
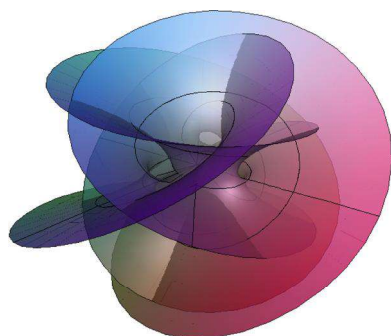


図 2 高種数の向き付け不可能な完備極小曲面

向き付け不可能な極大曲面の研究は López 氏と藤森祥一氏により始められた. 両氏は [FL] で向き付け不可能な極大曲面の基礎理論の構築し, Möbius の帯型と Klein の壺から 1 点を取り除いたものと同相な例の構成

(図 3, 4 参照) とその分類を行った.

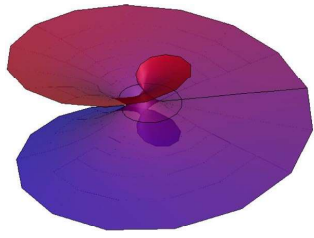


図 3 Möbius の帯型極大曲面

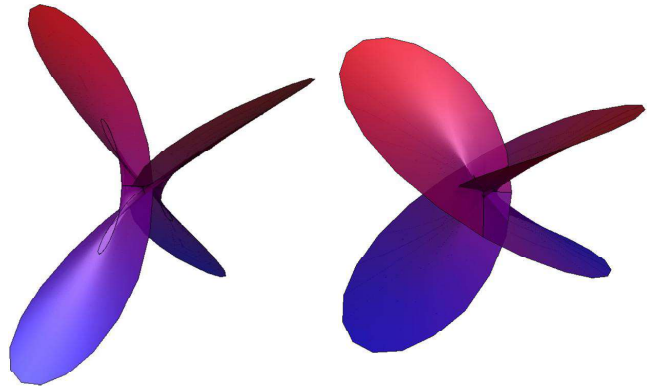
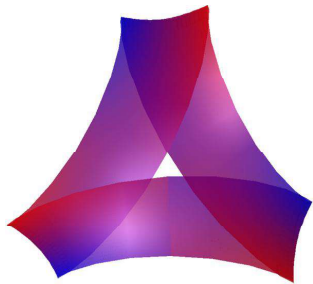


図 4 Klein の壺 \{1pt\} 型極大曲面

[FL] で構成された極大曲面は, 各々 [M] と [L] で構成された極小曲面の対応物であるが, [LM] で構成された高種数な極小曲面に対応する極大曲面は構成されていなかった. 本講演では高種数の向き付け不可能な極大曲面の構成法を紹介する.

2 極大面

$\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2)$ を 3 次元 Lorentz-Minkowski 空間とする. 平面でない極大曲面には必ず特異点が見ることが知られているため ([C]), [UY] においてある種の特異点を許容した**極大面**というクラスが導入された. 極大面には以下のような表現公式が存在する.

定理 2.1 (Weierstrass 型表現公式 [Ko, UY]). M を Riemann 面, (g, η) を M 上の有理型関数と正則一次微分の組で,

$$(2.1) \quad (1 + |g|^2)^2 \eta \bar{\eta}$$

が M 上の Riemann 計量を与え, 任意の $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$ に対して

$$(2.2) \quad \operatorname{Re} \oint_{\gamma} ((1 + g^2)\eta, i(1 - g^2)\eta, 2g\eta) = 0$$

を満たすものとする. このとき

$$f = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z ((1 + g^2)\eta, i(1 - g^2)\eta, 2g\eta) : M \rightarrow \mathbb{L}^3, \quad (z_0 \in M)$$

は極大面を定める. また, 極大面 f の第一基本形式 ds^2 は

$$ds^2 = (1 - |g|^2)^2 \eta \bar{\eta}$$

で与えられる. したがって, 極大面 f の特異点集合 $S(f)$ は

$$S(f) = \{p \in M \mid |g(p)| = 1\}$$

となる.

組 (g, η) を極大面 f の **Weierstrass データ**という.

注意 2.2. 条件 (2.2) は f が M 上一価になることを保証するものである. 条件 (2.2) を**周期条件**と呼ぶ. Weierstrass データ (g, η) が周期条件を満たすことと, 任意の $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$ に対して,

$$(2.3) \quad \oint_{\gamma} g^2 \eta + \overline{\oint_{\gamma} \eta} = 0$$

かつ

$$(2.4) \quad \operatorname{Re} \oint_{\gamma} g^2 \eta = 0$$

を満たすことは同値である.

定義 2.3 (完備極大面 [UY]). $f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を極大面, ds^2 を f の第一基本形式とする. M 上で台がコンパクトな対称 $(0, 2)$ テンソル T で, $ds^2 + T$ が M 上で完備 Riemann 計量を定めるとき, f を**完備極大面**と呼ぶ.

完備極大面は次のような性質をもつことが知られている.

定理 2.4 ([UY]). $f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を完備極大面, (g, η) を f の Weierstrass データとする. このとき, ある閉 Riemann 面 $\overline{M}$ と有限個の点 $p_1, \dots, p_n \in \overline{M}$ が存在して, M は $\overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ と双正則になる. 点 $p_1, \dots, p_n$ は曲面の**エンド**に対応する. さらに, (g, η) は $\overline{M}$ 上に有理型に拡張される.

3 向き付け不可能な極大曲面

定義 3.1 (向き付け不可能な極大面 [FL]). M' を向き付け不可能な曲面とする. $f': M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ が**向き付け不可能な極大面**であるとは, Riemann 面 M と二重被覆 $\pi: M \rightarrow M'$ が存在して, $f := f' \circ \pi: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ が極大面になることである. また, f が完備なとき, f' は**完備**であるという.

$f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を極大面, (g, η) を f の Weierstrass データ, $I: M \rightarrow M$ を固定点のない反正則デッキ変換で

$$(3.1) \quad g \circ I = \frac{1}{\overline{g}}, \quad I^* \eta = \overline{g^2 \eta}$$

を満たすものとする. このとき, $f': M/\langle I \rangle \rightarrow \mathbb{L}^3$ で $f = f' \circ \pi: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ を満たすものが唯一つ存在する. これは極大面 f の Weierstrass データに対して, (3.1) を満たす M 上のデッキ変換 I をとることが出来れば, 向き付け不可能な極大面を作ることが出来るということを意味している. このことから, (M, I, g, η) を向き付け不可能な極大面 f' の Weierstrass データと呼ぶことにする.

向き付け不可能な完備極大面の Weierstrass データには次のような特徴がある.

定理 3.2 ([FL]). $f': M' \rightarrow \mathbb{L}^3$ を向き付け不可能な完備極大面, (M, I, g, η) を f' の Weierstrass データとする. このとき, g の $\overline{M}$ 上の有理型関数としての写像度 $\deg g$ は 4 以上の偶数になる.

以下の例 3.3, 3.4, 3.5 は $\deg g = 4$ を満たす曲面である.

例 3.3 (Möbius の帯型極大面 [FL]). $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $I(z) = -1/\bar{z}$ とする.

(i) Weierstrass データ (g, η) を

$$g = \frac{z^3(z-1)}{z+1}, \quad \eta = i \frac{(z+1)^2}{z^5} dz$$

と定めると (g, η) は (3.1) を満たし, この Weierstrass データから定まる完備極大面は M 上 well-defined である. 図 3 左参照.

(ii) Weierstrass データ (g, η) を

$$g = \frac{z(rz-1)(sz-1)(tz-1)}{(z+r)(z+\bar{s})(z+\bar{t})}, \quad \eta = i \frac{(z+r)^2(z+\bar{s})^2(z+\bar{t})^2}{z^5} dz$$

と定める. ただし, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, s, t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ であり,

$$\begin{cases} r^2 + s^2 + t^2 + 4(rs + st + tr) = 0, \\ (r^2 - 1)\{(|s|^2 - 1)(|t|^2 - 1) - (s\bar{t} + \bar{s}t)\} = r\{(|s|^2 - 1)(t + \bar{t}) + (|t|^2 - 1)(s + \bar{s})\}, \end{cases}$$

を満たすものとする. このとき, (g, η) は (3.1) を満たし, この Weierstrass データから定まる完備極大面は M 上 well-defined である. 図 3 右は $(r, s, t) = (1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{3}})$ としたものである.

例 3.4 (Klein の壺 $\setminus \{1\text{pt}\}$ 型極大面 [FL]). 種数 1 の閉 Riemann 面 $\overline{M}$ を

$$\overline{M} = \left\{ (z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^2 = \frac{z(rz - 1)}{z - r} \right\}, \quad (r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

とし,

$$M = \overline{M} \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\}, \quad I(z, w) = \left(-\frac{1}{\bar{z}}, -\frac{1}{\bar{w}} \right),$$

$$g = \frac{w(z+1)}{z-1}, \quad \eta = i \frac{(z-1)^2}{z^2 w} dz$$

とすると, (g, η) は (3.1) を満たし, この Weierstrass データから定まる完備極大面が M 上 well-defined になるような r が 2 つ存在する. 図 4 参照.

例 3.5 (実射影平面 $\setminus \{2\text{pt}\}$ 型極大面 [Ka]). $M = \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\}, I(z) = -1/\bar{z}$ とする. Weierstrass データ (g, η) を

$$g = \frac{z(z-a)(z-b)(z-c)}{(\bar{a}z+1)(\bar{b}z+1)(\bar{c}z+1)}, \quad \eta = i \frac{(\bar{a}z+1)^2(\bar{b}z+1)^2(\bar{c}z+1)^2}{z^2(z-1)^3(z+1)^3} dz, \quad (a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

と定めると, (g, η) は (3.1) を満たし, この Weierstrass データから定まる完備極大面が M 上 well-defined になるような (a, b, c) が (合同な曲面を定めるものを除いて) 1 つ存在する. 図 5 参照.

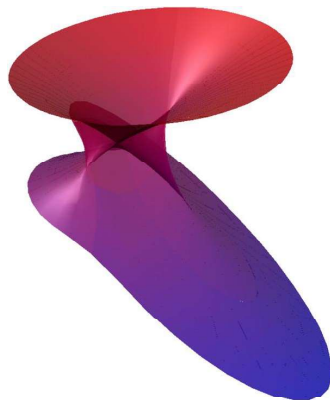


図 5 実射影平面 $\setminus \{2\text{pt}\}$ 型極大面

例 3.3 には次のような一般化が存在する.

例 3.6 ($\deg g \geq 4$ の Moebius の帯型極大面 [FL, Ka]). $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}, I(z) = -1/\bar{z}$ とする.

(i) Weierstrass データ (g, η) を

$$g = \frac{z^{2m+1}(z-1)}{z+1}, \quad \eta = i \frac{(z+1)^2}{z^{2m+3}} dz, \quad (m \in \mathbb{Z}_{>0})$$

と定めると (g, η) は (3.1) を満たし, この Weierstrass データから定まる完備極大面は M 上 well-defined である. 図 6 上段参照.

(ii) Weierstrass データ (g, η) を

$$g = \frac{z(z^{2m+1} - 1)}{(z^{2m+1} + 1)}, \quad \eta = i \frac{(z^{2m+1} + 1)^2}{z^{2m+3}} dz, \quad (m \in \mathbb{Z}_{>0})$$

と定める. このとき, (g, η) は (3.1) を満たし, この Weierstrass データから定まる完備極大面は M 上 well-defined である. 図 6 下段参照.

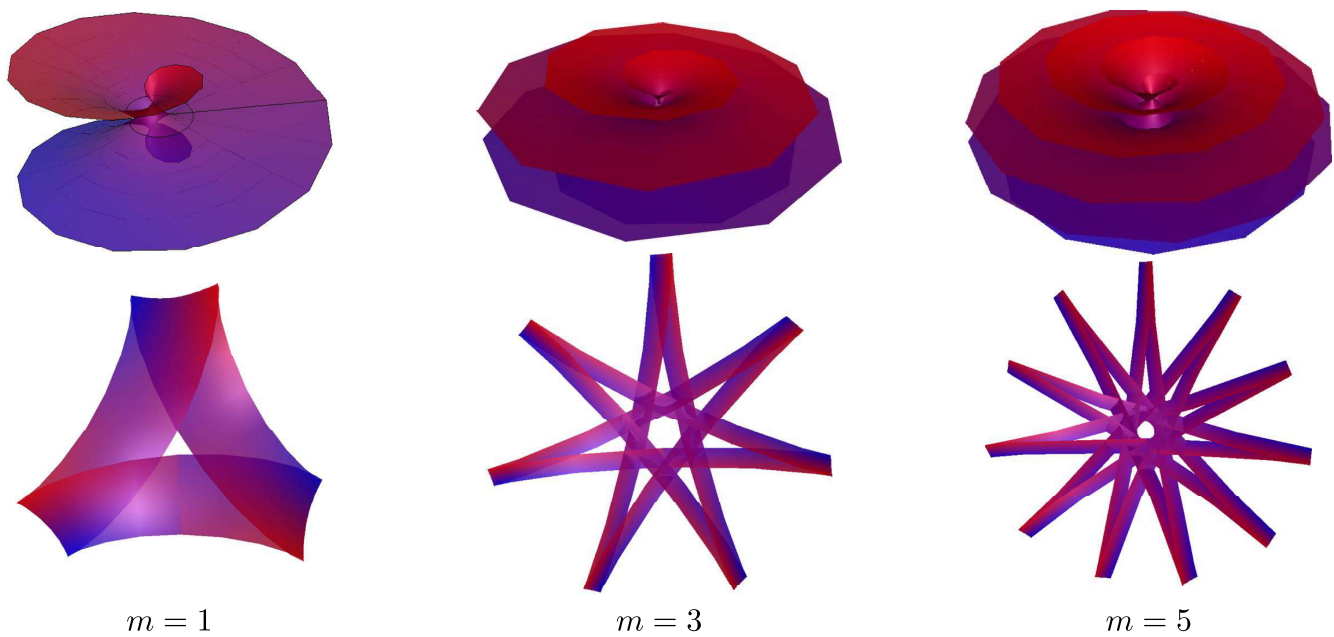


図 6 例 3.6 の Moebius の帯型極大面

4 主結果

種数 k の閉 Riemann 面 $\overline{M}_k$ を

$$\overline{M}_k = \left\{ (z, w) \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \mid w^{k+1} = \frac{z(z-r)}{rz+1} \right\}, \quad (r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

とし,

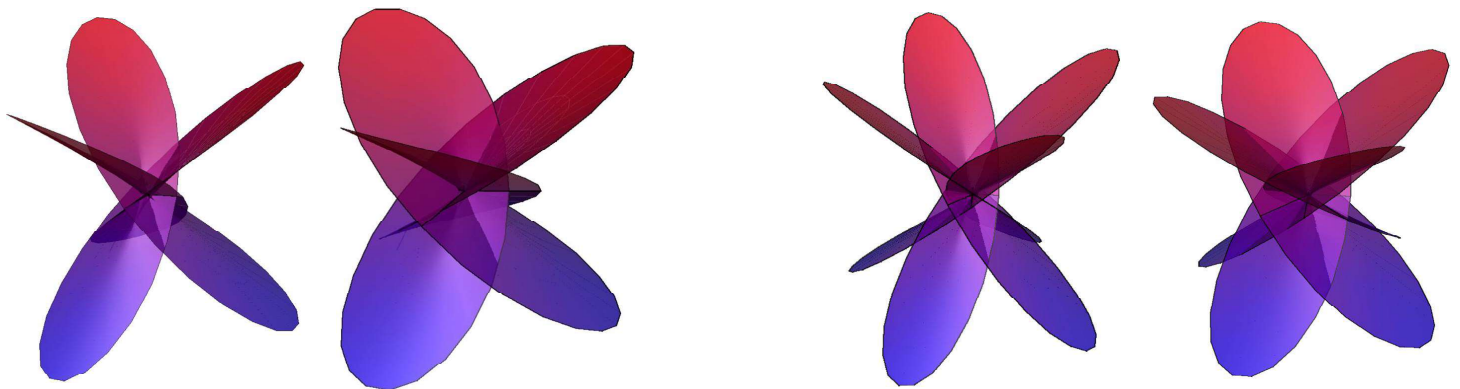
$$(4.1) \quad \begin{aligned} M &= \overline{M}_k \setminus \{(0, 0), (\infty, \infty)\}, & I(z, w) &= \left(-\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{w}} \right), \\ g &= \frac{w^k(z+1)}{z(z-1)}, & \eta &= i \frac{(z-1)^2}{zw^k} dz \end{aligned}$$

とする. 表 1 より, (2.1) が Riemann 計量を与えることがわかる.

(z, w)	$(-1, *)$	$(-1/r, \infty)$	$(0, 0)$	$(1, *)$	$(r, 0)$	(∞, ∞)
g	$0^1 \times (k+1)$	∞^k	∞^1	$\infty^1 \times (k+1)$	0^k	0^1
η		0^{2k}	∞^{k+1}	$0^2 \times (k+1)$		∞^{k+3}

表 1 g, η の零と極の位数

定理 4.1 ([FK]). 任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して (4.1) の定める極大面 $f: M \rightarrow \mathbb{L}^3$ で (2.2) を満たす r が 2 つずつ存在し, $f': M/\langle I \rangle \rightarrow \mathbb{L}^3$ は種数 $k+1$ で 1 つのエンドを持つ向き付け不可能な完備極大面になる. 図 7 参照.



$k = 2$, 左図 : $r \approx 0.478169$,

右図 : $r \approx 0.807158$.

$k = 3$, 左図 : $r \approx 0.615965$,

右図 : $r \approx 0.859345$.

図7 種数 $k+1$ の向き付け不可能な完備極大面

注意 4.2. $k = 1$ の場合, $\overline{M}_1$ の座標変換と, x_3 軸についての回転を (4.1) に施すことで, 例 3.4 の Weierstrass データと一致する.

以下, 定理 4.1 の証明の概要を述べる.

$k = 1$ の場合, 注意 4.2 より定理 4.1 が成り立つことがわかる. 以降, $k \geq 2$ と仮定する.

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = ((1 + g^2)\eta, i(1 - g^2)\eta, 2g\eta)$$

とおく. f が M 上一価であることと, 各 ϕ_j が実周期を持たないことは同値である. まず

$$\phi_3 = 2g\eta = d\left(\frac{2i(z^2 + 1)}{z}\right)$$

より, ϕ_3 は $\overline{M}_k$ 上の完全一次微分となるため, (2.4) を満たすことがわかる. $(z, w) = (0, 0)$ では, w が $\overline{M}_k$ の局所座標となっており,

$$z = z(w) = w^{k+1} \left(-\frac{1}{r} + \mathcal{O}(w^{k+1}) \right)$$

となる. よって, $(z, w) = (0, 0)$ では,

$$\begin{aligned} g &= \frac{\alpha_0}{w} + \mathcal{O}(w^k), & \eta &= \left(i \frac{\alpha_1}{w^{k+1}} + \mathcal{O}(1) \right) dw, \\ g\eta &= \left(i \frac{\alpha_2}{w^{k+2}} + \mathcal{O}(w^k) \right) dw, & g^2\eta &= \left(i \frac{\alpha_3}{w^{k+3}} + \frac{\alpha_4}{w^2} + \mathcal{O}(w^{k-1}) \right) dw, \end{aligned}$$

と表示される. ただし, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ である. したがって, ϕ_1, ϕ_2 のエンドでの留数が消えていることが容易にわかる. 以上より, $\overline{M}_k$ のホモロジー基底に対して (2.3) が成り立つことを示すことができればよいことがわかる.

一方で, 任意の $\gamma \in H_1(\overline{M}_k, \mathbb{Z})$ に対して,

$$\oint_{\gamma} \phi_j = \oint_{I_*(\gamma)} I^* \phi_j = \oint_{I_*(\gamma)} \overline{\phi_j}$$

となる. したがって,

$$2 \operatorname{Re} \oint_{\gamma} \phi_j = \oint_{\gamma + I_*(\gamma)} \phi_j$$

が成り立つ. よって, f が M 上一価であることと,

$$(4.2) \quad \oint_{\gamma + I_*(\gamma)} \phi_j = 0, \quad (\gamma \in H_1(\overline{M}_k, \mathbb{Z}), \quad j = 1, 2)$$

が成り立つことは同値である. 次の補題は直接計算で得られる.

補題 4.3 (曲面の対称性). $\overline{M}_k$ 上の共形変換 $\kappa_j (j = 1, 2)$ を以下で与える.

$$\kappa_1(z, w) = (z, e^{\frac{2\pi i}{k+1}} w), \quad \kappa_2(z, w) = (\bar{z}, \bar{w}).$$

このとき, 次が成り立つ.

$$\kappa_1^t \Phi = K_1^t \Phi, \quad \kappa_2^t \Phi = K_2^t \bar{\Phi}.$$

ただし,

$$K_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{k+1} & \sin \frac{2\pi}{k+1} & 0 \\ -\sin \frac{2\pi}{k+1} & \cos \frac{2\pi}{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

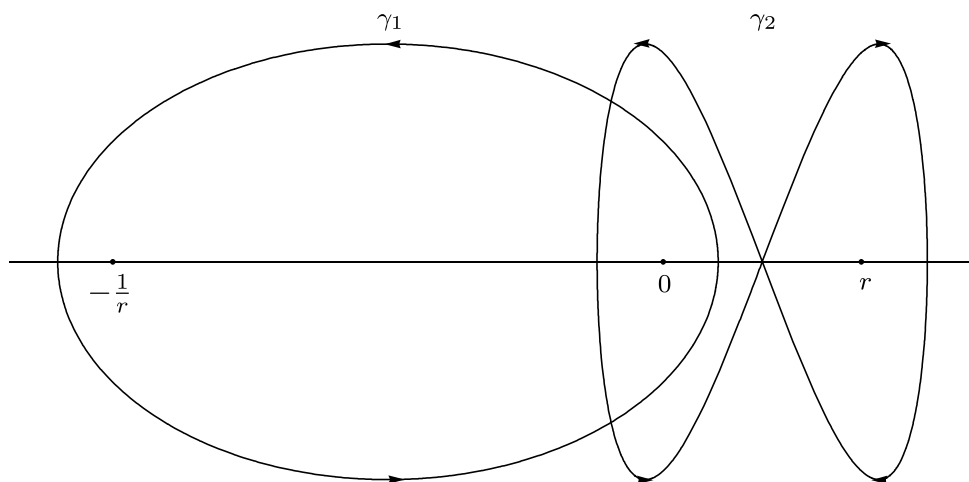


図 8 $\gamma_1, \gamma_2 \in H_1(\overline{M}_k, \mathbb{Z})$ の z 平面への射影

$\gamma_1, \gamma_2 \in H_1(\overline{M}_k, \mathbb{Z})$ を, z 平面への射影が図 8 のようになるものとする. 集合

$$\{(\kappa_j)_*^m(\gamma_l) \mid j, l \in \{1, 2\}, m \in \{1, 2, \dots, k+1\}\}$$

は $\overline{M}_k$ のホモロジー基底を含む.

さらに, 直接計算により

$$I_*(\gamma_1) = \gamma_1, \quad I_*(\gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2 + (\kappa_1)_*^k(\gamma_1)$$

となることがわかる. したがって, (4.2) が成り立つことと,

$$\oint_{\gamma_1} \phi_j = 0, \quad (j = 1, 2)$$

が成り立つことは同値である. また, f が M 上一価であることと,

$$\oint_{\gamma_1} (1 + g^2)\eta = \oint_{\gamma_1} (1 - g^2)\eta = 0$$

が成り立つことは同値である. これは,

$$\oint_{\gamma_1} \eta = \oint_{\gamma_1} g^2 \eta = 0$$

と同値である. 一方で,

$$\oint_{\gamma_1} \eta = \oint_{I_*(\gamma_1)} I^* \eta = \oint_{\gamma_1} \overline{g^2 \eta}$$

となる。したがって、 f が M 上一価であることと、

$$\oint_{\gamma_1} g^2 \eta = \oint_{\gamma_1} \frac{w^k (z+1)^2}{z^3} dz = 0$$

が成り立つことは同値である。

γ_1 に関する積分を考える。この積分を区間 $[-1/r, 0]$ に帰着させたいが、 $g^2 \eta$ は $z = 0$ で極を持つため、このままでは帰着させることができない。そこで、次の補題を用意する。

補題 4.4. 次が成り立つ。

$$g^2 \eta + \frac{(k+1)}{(k+2)r} d \left(\frac{(z-r)(2rz^2 - ((k+1)r^2 - 2(k+2)r+k)z + r)}{zw} \right) = \frac{a_0 + a_1 rz}{(k+2)rw} dz.$$

ただし、

$$a_0 = -(k+1)(k+2)r^2 + 2k(k+2)r - k(k-1), \quad a_1 = 2(2k+1)$$

である。

この補題より、 f が M 上一価であることと、

$$(4.3) \quad p(r) := \int_{-1/r}^0 \frac{a_0 + a_1 rz}{r|w|} dz = 0$$

が成り立つことが同値であることがわかる。さらに、座標変換 $z = -t/r$ により、(4.3) は

$$(4.4) \quad p(r) = |r|^{-\frac{2k}{k+1}} \int_0^1 \frac{a_0 - a_1 t}{W(t)} dt,$$

となる。ただし、

$$W(t) = {}^{k+1}\sqrt{\frac{t(t+r^2)}{1-t}}$$

である。直接計算により、

$$(4.5) \quad \begin{aligned} p_+(0) &:= \lim_{r>0, r \rightarrow 0} p(r) = -\infty, \\ p(+\infty) &:= \lim_{r \rightarrow +\infty} -(k+1)(k+2) \int_0^1 {}^{k+1}\sqrt{\frac{1-t}{t}} dt < 0, \\ p_-(0) &:= \lim_{r<0, r \rightarrow 0} p(r) = -\infty, \\ p(-\infty) &:= \lim_{r \rightarrow -\infty} -(k+1)(k+2) \int_0^1 {}^{k+1}\sqrt{\frac{1-t}{t}} dt < 0, \end{aligned}$$

となることが確かめられる。

次に、 $p(k/(k+1)) > 0$ が任意の $k \geq 2$ について成り立つことを示す。計算により、

$$p\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{(k+1)(2k+1)}{k} \int_0^1 \frac{1 - 2(1+1/k)t}{{}^{k+1}\sqrt{t(1+(1+1/k)^2 t)/(1-t)}} dt$$

が得られる。ここで、関数 $q(k)$ を

$$q(k) := \int_0^1 \frac{1 - 2(1+1/k)t}{V(t)} dt$$

と置く。ただし、

$$V(t) = {}^{k+1}\sqrt{\frac{t(1+(1+1/k)^2 t)}{1-t}}$$

である。直接計算により、

$$\frac{1 - 2(1 + 1/k)t}{V(t)} - \frac{k+1}{k} d\left(\frac{t(1-t)}{V(t)}\right) = \frac{(k+1)^2 t(1-t)}{k((k+1)^2 t + k^2)V(t)} dt$$

を得るので、

$$q(k) = \int_0^1 \frac{1 - 2(1 + 1/k)t}{V(t)} dt = \int_0^1 \frac{(k+1)^2 t(1-t)}{k((k+1)^2 t + k^2)V(t)} dt > 0$$

とわかる。以上より、任意の $k \geq 2$ に対して、

$$(4.6) \quad p\left(\frac{k}{k+1}\right) > 0$$

となることが示せた。

次に $p(1) < 0$ を示す。直接計算により、

$$p(1) = - \int_0^1 \frac{(2k+1)t - (k-1)}{U(t)} dt$$

となることがわかる。ただし、

$$U(t) = \sqrt[k+1]{\frac{t(1+t)}{1-t}}$$

である。また、

$$\frac{(2k+1)t - (k-1)}{U(t)} dt + \frac{k^2 - 1}{k} d\left(\frac{t(1-t)}{U(t)}\right) = \frac{t((2k+1)t + 3)}{k(1+t)U(t)} dt$$

となるので、

$$(4.7) \quad p(1) = -2 \int_0^1 \frac{(2k+1)t - (k-1)}{U(t)} dt = -2 \int_0^1 \frac{t((2k+1)t + 3)}{k(1+t)U(t)} dt < 0$$

であることがわかる。(4.5), (4.6), (4.7) より、 p は区間 $(0, 1)$ で少なくとも 2 つの実根を持つことがわかる。

最後に、 p が $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ で 3 個以上の実根を持たないことを示す。まず、 $A_0, A_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を

$$A_0(r) = \int_0^1 \frac{dt}{W(t)}, \quad A_1(r) = \int_0^1 \frac{t}{W(t)} dt$$

と定義する。この A_0, A_1 を用いると、(4.4) は

$$p(r) = |r|^{-\frac{2k}{k+1}} (a_0 A_0 - a_1 A_1)$$

となる。ここで、 $r_0 \in \mathbb{R}$ を $p(r_0) = 0$ を満たすものとする。すると、

$$A_0(r_0) = \frac{a_0(r_0)}{a_1(r_0)} A_0(r_0) = - \frac{(k+1)(k+2)r_0^2 - 2k(k+2)r_0 + k(k-1)}{2(2k+1)} A_0(r_0)$$

より、

$$(4.8) \quad 0 \leq \frac{k(k+2) - \sqrt{k(k+2)(2k+1)}}{(k+1)(k+2)} < r_0 < \frac{k(k+2) + \sqrt{k(k+2)(2k+1)}}{(k+1)(k+2)}$$

となる。よって、 $r_0 \in (0, \infty)$ となる。 $A'_0(r), A'_1(r)$ を計算すると

$$A'_0(r) = -\frac{2r}{k+1} \int_0^1 \frac{dt}{(t+r^2)W(t)}, \quad A'_1(r) = -\frac{2r}{k+1} \int_0^1 \frac{t}{(t+r^2)W(t)} dt$$

となる. また,

$$\begin{aligned}
& -\frac{2r}{(k+1)(t+r^2)W(t)}dt + \frac{2}{r(1+r^2)}d\left(\frac{t(1-t)}{W(t)}\right) \\
& = \frac{2(k-1-r^2)}{(k+1)r(1+r^2)W(t)}dt - \frac{2(2k+1)t}{(k+1)r(1+r^2)W(t)}dt, \\
& -\frac{2rt}{(k+1)(t+r^2)W(t)}dt - \frac{2r}{(1+r^2)}d\left(\frac{t(1-t)}{W(t)}\right) \\
& = \frac{2kr}{(k+1)(1+r^2)W(t)}dt + \frac{2r(2k+1)t}{(k+1)(1+r^2)W(t)}dt,
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
p'(r) &= b_0 A_0 + b_1 A_1 \quad (r > 0), \\
p''(r) &= c_0 A_0 + c_1 A_1 \quad (r > 0),
\end{aligned}$$

となる. 計算により確かめられる. ただし,

$$\begin{aligned}
b_0 &= \frac{2kr^{-\frac{3k+1}{k+1}} \left(-(k+1)(k+2)r^3 + (k-1)r^2 + (k+2)(k-1)r + k-1 \right)}{(k+1)(r^2+1)}, \\
b_1 &= \frac{2k(2k+1)r^{-\frac{3k+1}{k+1}} \left((k+1)r^2 - 2(k+2)r + k+1 \right)}{(k+1)(r^2+1)}, \\
c_0 &= \frac{2kr^{-\frac{2(2k+1)}{k+1}} \left(2(k+1)^2(k+2)r^3 - (k+1)(4k^2+5k-3)r^2 \right)}{(k+1)^2(r^2+1)} \\
& \quad + \frac{2kr^{-\frac{2(2k+1)}{k+1}} \left(-2(k^2+k-2)r - (k+3)(k-1) \right)}{(k+1)^2(r^2+1)}, \\
c_1 &= \frac{2k(2k+1)r^{-\frac{2(2k+1)}{k+1}} \left((k+1)^2r^2 + 2(k+1)(k+2)r - (3k^2+6k-1) \right)}{(k+1)^2(r^2+1)}
\end{aligned}$$

である. $p(r_0) = 0$ とすると, $A_1(r_0) = (a_0(r_0)/a_1(r_0))A_0(r_0)$ となるので,

$$\begin{aligned}
p'(r_0) &= \frac{k(k+2)r_0^{-\frac{3k+1}{k+1}} Q_1(r_0)}{(1+k)(r_0^2+1)} A_0(r_0), \\
p''(r_0) &= \frac{k(k+2)r_0^{-\frac{4k-2}{k+1}} Q_2(r_0)}{(k+1)(r_0^2+1)} A_0(r_0)
\end{aligned}$$

となる. ただし,

$$\begin{aligned}
Q_1(r) &= -(k+1)^2 r^4 + 2(k+1)(2k+1)r^3 \\
& \quad - 2(k+1)(3k+1)r^2 + 2(2k-1)(k+1)r - (k-1)^2, \\
Q_2(r) &= -(k+1)^2 r^4 + 2(k+1)(3k+1)r^2 - 4(k+1)(2k-1)r + 3(k-1)^2.
\end{aligned}$$

任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して $Q_1''(r) < 0$ が成り立つので, Q_1 は高々 2 つの実根を持つ. 直接計算により,

$$\begin{aligned}
Q_1(0) &= -(k-1)^2 < 0, \\
Q_1(r_0^-) &= \frac{4(k^2+k+1)(-1-2k+\sqrt{k(k+2)(2k+1)})}{(k+1)(k+2)^2} > 0, \\
Q_1\left(\frac{k}{k+1}\right) &= -\frac{1+2k}{(k+1)^2} < 0
\end{aligned}$$

を得る。ただし,

$$(4.9) \quad r_0^- := \frac{k(k+2) - \sqrt{k(k+2)(2k+1)}}{(k+1)(k+2)}$$

である。したがって、中間値の定理より、 $Q_1(s_0) = Q_1(s_1) = 0$ を満たす $s_0 \in (0, r_0^-)$ と $s_1 \in (r_0^-, k/(k+1))$ が各々 1 つずつ存在することがわかる。さらに,

$$Q_1|_{(0, s_0)} < 0, \quad Q_1|_{(s_0, s_1)} > 0, \quad Q_1|_{(s_1, \infty)} < 0$$

が成り立つこともわかる。 $A_0(r_0) > 0$ より、 $p'(r_0)$ の符号と $Q_1(r_0)$ の符号は一致していることがわかる。 $r_0 \in (r_0^-, s_1)$ では $p'(r_0) > 0$ となるため、 p は (r_0^-, s_1) で高々 1 つの実根を持つことがわかる。 また、 $r_0 \in (s_1, \infty)$ では $p'(r_0) < 0$ となるため、 p は (s_1, ∞) で高々 1 つの実根を持つことがわかる。

最後に、 $r_0 \neq s_1$ または $Q_2(s_1) < 0$ が成り立つことを示す。 $k = 2$ の場合,

$$\begin{aligned} Q_1(r) &= -9r^4 + 30r^3 - 42r^2 + 18r - 1, \\ Q_2(r) &= -9r^4 + 42r^2 - 36r + 3 \end{aligned}$$

となる。直接計算により,

$$s_1 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{A} + \frac{1}{6}\sqrt{-A + \frac{62}{\sqrt{A}}} - 9 \approx 0.599176, \quad Q_2(s_1) \approx -4.65184 < 0$$

であることが確かめられる。ただし,

$$A = 2\sqrt[3]{3\sqrt{197} + 46} + 2\sqrt[3]{46 - 3\sqrt{197}} - 3$$

である。

$k \geq 3$ の場合、 Q_2 の判別式 $D(Q_2)$ を計算すると

$$D(Q_2) = -256(k+1)^6 (432k^4 - 1448k^3 + 1011k^2 - 162k + 19)$$

となることがわかる。直接計算により

$$\begin{aligned} &432k^4 - 1448k^3 + 1011k^2 - 162k + 19 \\ &= 432(k-3)^4 + 3736(k-3)^3 + 11307(k-3)^2 + 13464(k-3) + 4528 \end{aligned}$$

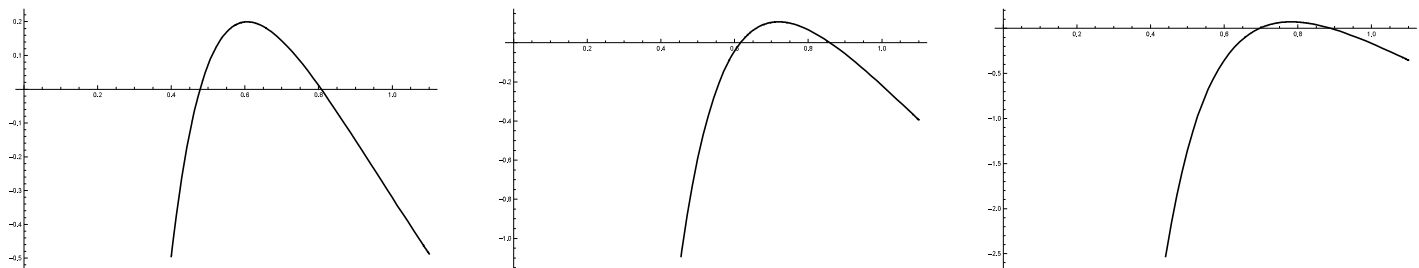
となることがわかる。したがって、 $D(Q_2) < 0$ となることがわかり、 Q_2 は 2 つの実根と 1 組の共役虚数解を持つことがわかる。一方で,

$$\begin{aligned} Q_2(0) &= 3(k-1)^2 > 0, \\ Q_2\left(\frac{k}{k+1}\right) &= 4 - 4k - \frac{1}{(k+1)^2} < 0, \\ Q_2(r_0^-) &= \frac{-4(k^5 + 2k^4 - 3k^3 - 7k^2 - 8k - 3)}{(k+1)^2(k+2)^2} \\ &\quad + \frac{4(k^3 - 2k^2 - 3k - 2)\sqrt{k(k+2)(2k+1)}}{(k+1)^2(k+2)^2} < 0 \end{aligned}$$

より、 Q_2 は $(r_0^-, k/(k+1))$ で実根を持たないことがわかる。したがって、 $Q_2(s_1) < 0$ であることが示せる。

以上より、 p が丁度 2 つの実根 r_1, r_2 を $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ で持つことが示せた。 $\square$

上述の証明より、 r_1 と r_2 は区間 $(0, 1)$ に存在するとわかる。 r_1 と r_2 の近似値は Mathematica を用いることで計算できる。図 9 参照。



$k = 2$

$k = 3$

$k = 4$

図 9 $p(r)$ のグラフ

参考文献

- [C] E. Calabi, *Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math. **15** (1970), 223–230.
- [FK] S. Fujimori and S. Kaneda, *Higher genus nonorientable maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space*, Tohoku Math. J. **75** (2023), 1–14.
- [FL] S. Fujimori and F. J. López, *Nonorientable maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 311–328.
- [Ka] S. Kaneda, *Some new examples of nonorientable maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space*, to appear in Hiroshima Math. J..
- [Ko] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space $\mathbb{L}^3$* , Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.
- [L] F. J. López, *A complete minimal Klein bottle in $\mathbb{R}^3$* , Duke Math. J. **71** (1993), 23–30.
- [LM] F. J. López and F. Martín, *Complete nonorientable minimal surfaces and symmetries*, Duke Math. J. **79** (1995), 667–686.
- [M] W. H. Meeks III, *The classification of complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ with total curvature greater than -8π* , Duke Math. J. **48** (1981), 523–535.
- [UY] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 13–40.