

超尖点表現の Harish-Chandra 指標による特徴付け

京都大学数学教室（白眉センター） 大井 雅雄

Masao Oi

Department of Mathematics (Hakubi Center),
Kyoto University

1 背景

本稿では Charlotte Chan 氏（University of Michigan）との共同研究 [CO23] において得られた結果を報告する。

まず今回の研究の動機である Harish-Chandra の定理を簡単に紹介するところから始めたい。

定理 1.1 ([HC65]). $\mathbf{G}$ を $\mathbb{R}$ 上の連結簡約代数群とする。

- (1) $\mathbf{S}$ を $\mathbf{G}$ の楕円の極大トーラスとし、そのルート系 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})$ の正ルートの集合 $\Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})^+$ を一つ固定する。 $\theta: \mathbf{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ の正則（すなわち θ の微分によって定まる $X_*(\mathbf{S})_{\mathbb{C}}$ の元が dominant）な指標とする。このとき、 $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ の本質的離散系列表現^{*1} $\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}$ で次の条件を満たすものが同型を除いて一意に存在する：任意の正則半単純元 $\gamma \in \mathbf{S}(\mathbb{R})$ について、 $\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}$ の Harish-Chandra 指標 $\Theta_{\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}}$ は

$$\Theta_{\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}}(\gamma) = (-1)^{q(\mathbf{G})} \sum_{w \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})(\mathbb{R})/\mathbf{S}(\mathbb{R})} \frac{\theta(w\gamma)}{\prod_{\alpha \in \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{S})^+} (1 - \alpha(w\gamma)^{-1})}$$

で与えられる（ただし $w\gamma := w\gamma w^{-1}$ ）^{*2}。

- (2) (1) の特徴付けによって全単射

$$\{(\mathbf{S}, \theta)\}/\sim \xrightarrow{1:1} \{\mathbf{G}(\mathbb{R}) \text{ の本質的離散系列表現 }\}/\sim$$

が得られる（左辺は $\mathbf{G}$ の楕円の極大トーラスとその正則指標の組の $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ 共役類の集合、右辺は $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ の本質的離散系列表現の同型類の集合である）。

定理 1.1 はまず本質的離散系列表現という抽象的なクラスの表現を、「極大トーラスとその指標の組」という具体的かつ単純なデータで捉えているという点で、表現の分類理論的に重要であ

^{*1} すなわち離散系列表現を指標で捻って得られる表現。

^{*2} $q(\mathbf{G})$ は $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ に伴う対称空間の次元の半分である。

る。実際、Langlands による実簡約群の局所 Langlands 対応の構成 [Lan89] においては、この Harish-Chandra による本質的離散系列表現の分類が鍵となる役割を果たしている。

またそれだけではなく、定理 1.1 は次のような観点からも興味深い：

- (1) 一般に表現の Harish-Chandra 指標を計算することは難しい問題であり、明示公式は往々にして大変複雑なものとなり得る。しかしこの場合には、 $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ 上における Harish-Chandra 指標の値は、インプットデータの $(\mathbf{S}, \theta)$ を用いた極めて簡明な式によって記述できている。
- (2) 表現が Harish-Chandra 指標（これは $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ の正則半単純元の成す集合上の関数であった）から一意に決まる、ということは基本的な事実である。しかし定理 1.1 が主張していることはそれよりも強く、本質的離散系列表現の場合には、Harish-Chandra 指標の「 $\mathbf{S}(\mathbb{R})$ の」任意の正則半単純元における値のみから表現が決まってしまう、と言っている。

つまり定理 1.1 のポイントは、ラベル付けのデータそのものが単純であるというだけでなく、ラベル付けの方法（特徴付け）も簡明だという点である。このことから定理 1.1 は、分類理論としての綺麗さだけではなく、応用上の実用性も併せ持つことが期待できる。

本稿で考察するのは、定理 1.1 の p 進体（すなわち p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体）類似である。 p 進体と実数体 $\mathbb{R}$ の位相的性質は全く異なるが、局所体の一種であるという点では共通している。Harish-Chandra の **Lefschetz 原理**の哲学によると、 p 進体上と実数体上の簡約群の表現論や調和解析ではパラレルな現象が起こるべきだと期待されているのである。^{*3}

2 正則超尖点表現とその指標公式

以下では F を p 進体（すなわち p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大）とし、 $\mathbf{G}$ を F 上の連結簡約代数群とする。また F 上定義された代数群を $\mathbf{J}$ などのボード体で書き、その F 値点の成す群のことを J のようにイタリック体で書く。

まず定理 1.1 の p 進体類似を考える上で重要となる**正則超尖点表現**というクラスの表現を説明する。 p 進簡約群の**超尖点表現**とは、真の放物型部分群からの放物型誘導の既約商として実現できない表現のことであった。簡約群論の持つ帰納的な構造を基準にして表現論を捉える上では、超尖点表現は表現の「原子」とも呼べる、最も基本的な構成単位を成していると言える。そこで p 進簡約群の表現論においては、超尖点表現を全て具体的に構成・分類することが一つの到達目標となる。

現在のところ p 進簡約群の超尖点表現を全て構成する方法は一般には知られていないが、2001 年の Yu による論文 [Yu01] の中で、かなり一般の p 進簡約群について多くの超尖点表現を明示的に構成する方法が与えられた。Yu の構成方法は、「Yu データ」と呼ばれるインプット $\Psi = (\vec{\mathbf{G}}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ を一つとるたびに、アウトプットとして超尖点表現 π_Ψ が得られるようなものとなっている。ここ

^{*3} Harish-Chandra の実際の記述はより大胆なものであり、たとえば [HC70] の序文は、“The object of these lectures is to illustrate, what I like to call the Lefschetz principle, which, in the context of reductive groups, says that whatever is true for real groups is also true for p -adic groups.” という文章から始まる。

で, Yu データ $\Psi = (\vec{G}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ は大雑把には以下の要素から構成されている^{*4}:

- $\vec{G}$ は G の「馴分岐 Levi 部分群」の列 $G^0 \subset G^1 \subset \cdots \subset G^d$ (d は 0 以上の整数).
- $\vec{\phi}$ は G^i の「生成的」な指標の族 $(\phi_0, \dots, \phi_d)$.
- π_{-1} は G^0 の「深度 0」の超尖点表現.

Yu の構成法によって得られる超尖点表現は**馴超尖点表現**と呼ばれる^{*5}.

Yu による理論に関して更なる大きな進展があったのは, 2019 年の Kaletha による仕事 [Kal19] においてである^{*6}. Kaletha はまず馴超尖点表現に対する**正則性**という概念を導入した. p 進簡約群の深度 0 の超尖点表現は, Moy–Prasad の理論 ([MP94, MP96] によって) 有限簡約群の尖点表現を用いて構成することができる. 有限簡約群の既約表現は Deligne–Lusztig 理論 [DL76] によって全て構成することができる. 馴超尖点表現の正則性とは大雑把には, インプットの Yu データにおける深度 0 の超尖点表現 π_{-1} が, Deligne–Lusztig の意味での「正則」な有限簡約群の尖点表現から得られる, という条件である (正確な定義は [Kal19, Section 3] を参照).

Yu データ $\Psi = (\vec{G}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ が正則である場合には, Deligne–Lusztig 理論に基づくことで, π_{-1} から G^0 の極大トーラス S とその指標 ϕ_{-1} を作り出すことができる. そこで, ϕ_{-1} と Yu データに含まれる指標を全てかけた指標

$$\theta := \prod_{i=-1}^d \phi_i|_S$$

を考えると, (S, θ) は Kaletha の意味での**馴楕円的正則対**と呼ばれる組を成す (馴楕円的正則対の定義は [Kal19, Definition 3.7.5] を参照). こうして定まるデータ (S, θ) は元のデータ $\Psi = (\vec{G}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ に比べるとかなり情報が落ちているように思えるが, 実は正則超尖点表現の場合には驚くべきことに Ψ を (S, θ) から復元できるのである:

定理 2.1 ([Kal19, Proposition 3.7.8]). 上述の構成は, G の正則な Yu データの同値類^{*7}の集合と, G の馴楕円的正則対の G 共役類の集合の間の全単射を誘導する. したがって特に, Yu の構成法と併せることで, G の馴楕円的正則対の G 共役類の集合から G の正則超尖点表現の同型類の集合への全単射

$$\{(S, \theta)\} / \sim \xrightarrow{1:1} \{G \text{ の正則超尖点表現} \} / \sim : (S, \theta) \mapsto \pi_{(S, \theta)}$$

が得られる.

^{*4} 各用語の正確な定義はここでは説明しないことにする ([Yu01] と [HM08] を参照).

^{*5} 本稿では深くは触れないが, 近年 Fintzen–Kaletha–Spice によって, 指標捻りを加えることで Yu の構成法を modify した構成法が提案された ([FKS23]). 本稿でも「Yu の構成」とは Fintzen–Kaletha–Spice による modified version の構成法を意味するものとする.

^{*6} プレプリントの発表は 2016 年.

^{*7} Yu データに関する同値類としては, [HM08] で導入された **G 同値**と呼ばれるものを考える. Yu データが **G 同値**であることと, Yu データから生み出される馴超尖点表現が同型になることは同値である.

この定理は定理 1.1 の (2) と完全にパラレルなものであることが分かる．その一方で定理 1.1 の (1) とは違い、 $(\mathbf{S}, \theta)$ でラベル付けされる表現 $\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}$ は、あくまで具体的構成法 (Yu の理論と Deligne–Lusztig 理論に基づく) を与えることで定義されるものである．では $\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}$ の Harish-Chandra 指標はどうなっているのだろうか？

馴超尖点表現の指標に関しては Adler–Spice [AS09], DeBacker–Spice [DS18], Spice [Spi18, Spi21] などの仕事により精密な明示公式が与えられている．この指標公式は明示的ではあるのだが、数々のきわめて微妙な不変量を用いて表されており、大変に複雑な見かけをしている．ところが更に驚くべきこととして、Kaletha は「shallow」と呼ばれる特定のクラスの正則半単純元に関しては、正則超尖点表現の指標公式までもが定理 1.1 の (1) とパラレルになっていることを証明した．

定義 2.2. $\mathbf{G}$ の正則半単純元 γ が、 $\mathbf{G}$ の中心を法として有限の位数をもち、更にその位数が p と素であるとき、 γ は **shallow** であるという．

定理 2.3. $(\mathbf{S}, \theta)$ を $\mathbf{G}$ の馴楕円的正則対とし、 $\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}$ をそれに対応する G の正則超尖点表現とする．任意の shallow 正則半単純元 $\gamma \in S$ について、 $\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}$ の Harish-Chandra 指標 $\Theta_{\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}}$ は

$$\Theta_{\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}}(\gamma) = \varepsilon_{(\mathbf{S}, \theta)} \sum_{w \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})(F)/S} \Delta_{(\mathbf{S}, \theta)}(w\gamma) \cdot \theta(w\gamma)$$

で与えられる．ここで $\varepsilon_{(\mathbf{G}, \mathbf{S})}$ は $(\mathbf{G}, \mathbf{S})$ から定まる符号で、 $\Delta_{(\mathbf{S}, \theta)}$ は $(\mathbf{S}, \theta)$ から明示的に定まる関数である．*8

このような状況を踏まえたときに自然に思い浮かぶのが、次の疑問である：

問. 正則超尖点表現 $\pi_{(\mathbf{S}, \theta)}$ は、定理 1.1 (1) のように、shallow 正則半単純元における Harish-Chandra 指標によって特徴付けられるか？

実はこの問の答えは NO である．実際に、全ての shallow 正則半単純元で Harish-Chandra 指標が同じ値をとるような、相異なる正則超尖点表現の組を簡単に構成することができる．つまり「shallow 正則半単純元」は、正則超尖点表現の指標公式が十分に単純化されるという点で良いクラスなのだが、正則超尖点表現を特定するには足りない（少なすぎる）のである．

この問題点を踏まえると、今度は次のような疑問が思い浮かぶ：

問. shallow 正則半単純元より広いクラスのエ元であって、

- (1) 正則超尖点表現の指標公式が十分に単純化される程度には特殊であり、
- (2) 正則超尖点表現を Harish-Chandra 指標から特定できる程度には一般的である

ようなものは存在するか？

$$(\text{shallow 正則半単純元}) \subset (???) \subset (\text{正則半単純元})$$

*8 詳細は省略する ([CO23, Corollary 6.21] 参照)．実はこれらの項の解釈も含めて、定理 1.1 と定理 2.3 は統一的な方法で理解することができる：[Kal19, Section 5.5].

本稿で説明したい [CO23] の主結果は、この間に対する一つの解答を与えるものである。

3 very 正則半単純元における指標公式

まず馴超尖点表現に関する補足を少しする。馴超尖点表現とは、Yu データ $\Psi = (\vec{G}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ から Yu の構成によって定まる超尖点表現 π_Ψ のことであつた。 π_{-1} は $\vec{G}$ に含まれる最初の馴分岐 Levi 部分群 $\mathbf{G}^0$ の深度 0 超尖点表現であつたことを思い出そう。 π_{-1} に Moy–Prasad の理論を適用することで、

$$\pi_{-1} \cong \text{c-Ind}_{G_{\mathbf{x}}^0}^{G^0} \rho_0$$

という形で表すことができる。ここで登場した各記号の意味を説明しよう。まず $\mathbf{x}$ は $\mathbf{G}^0$ の被約 Bruhat–Tits building の vertex である。したがって Bruhat–Tits 理論により、 $\mathbf{x}$ の固定化群 $G_{\mathbf{x}}^0$ と、 $\mathbf{x}$ に伴う parahoric 部分群 $G_{\mathbf{x},0}^0$ が定まる ($G_{\mathbf{x}}^0 \supset G_{\mathbf{x},0}^0$ である)。これらの群は smooth な整モデルの $\mathcal{O}_F$ 値点として実現することができるので、対応する整モデルの特殊ファイバーの最大簡約商として得られる有限体上の簡約群を考えて、それぞれ $\mathbb{G}$ と $\mathbb{G}^\circ$ と表す (後者は前者の単位元成分となっている)。コンパクト誘導を考える表現 ρ_0 は、 $G_{\mathbf{x}}^0$ の既約表現であつて、 $G_{\mathbf{x},0}^0$ への制限が $\mathbb{G}^\circ$ の既約尖点表現の inflation を含むようなものである。

次に「very 正則半単純元」という概念を導入する。

定義 3.1. $\mathbf{G}$ の正則半単純元 γ が、位相的 Jordan 分解 $\gamma = \gamma_0 \gamma_+$ をもち、更に γ_0 が shallow 正則半単純元であるとき、 γ は **very 正則半単純元** であるという。ここで位相的 Jordan 分解 $\gamma = \gamma_0 \gamma_+$ とは、次のような条件を満たす分解のことである^{*9}：

- (1) $\gamma_0 \gamma_+ = \gamma_+ \gamma_0$ が成り立つ。
- (2) γ_0 は $\mathbf{G}$ の中心を法として有限位数であり、その位数は p と素である。
- (3) γ_+ は $\mathbf{G}$ の中心を法として副 p 的である。すなわち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_+^{p^n} = 1$ が ($\mathbf{G}$ の中心を法として) 成り立つ。

定義から分かるように、very 正則半単純元は shallow 正則半単純元を一般化した概念となっている (γ が shallow 正則半単純元であれば、 $\gamma_0 = \gamma$ 、 $\gamma_+ = 1$ として γ の位相的 Jordan 分解 $\gamma = \gamma_0 \gamma_+$ がとれる)。

以上の準備の下で、馴超尖点表現の指標公式を説明することができる。次の定理は、定理 2.3 を、

- shallow 正則半単純元 $\rightsquigarrow$ very 正則半単純元
- 正則超尖点表現 $\rightsquigarrow$ 馴超尖点表現

と一般化したものである：

定理 3.2. $\Psi = (\vec{G}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ を $\mathbf{G}$ の Yu データとし、 π_Ψ をそれに対応する G の馴超尖点表現とす

^{*9} 位相的 Jordan 分解は常に存在するとは限らないが、 γ が楕円的な元であれば存在する。[Spi08] 参照。

る. 上述のように π_{-1} をコンパクト誘導の形で $\pi_{-1} \cong \text{c-Ind}_{G_{\mathbf{x}}^0} \rho_0$ と書く. このとき任意の楕円的 very 正則半単純元 $\gamma \in G$ について, π_Ψ の Harish-Chandra 指標 Θ_{π_Ψ} は

$$\Theta_{\pi_\Psi}(\gamma) = \varepsilon_\Psi \sum_{w \in G_{\mathbf{x}}^0 \setminus N_G(T_\gamma, G_{\mathbf{x}}^0)} \Delta_\Psi({}^w\gamma) \cdot \Theta_{\rho_0}({}^w\gamma) \cdot \prod_{i=0}^d \phi_i({}^w\gamma)$$

で与えられる. ここで ε_Ψ は Ψ から定まる符号で, Δ_Ψ は Ψ から明示的に定まる関数である (詳細は省略する: [CO23, Corollary 6.21] 参照^{*10}). また γ の連結中心化群として定まる $\mathbf{G}$ の極大トーラスを $\mathbf{T}_\gamma$ と書き, $N_G(T_\gamma, G_{\mathbf{x}}^0) := \{n \in G \mid {}^nT_\gamma \subset G_{\mathbf{x}}^0\}$ とする.

なお π_Ψ が正則である場合には, ρ_0 の指標を Deligne–Lusztig の指標公式を用いて計算することにより, この公式は以下のように更に簡略化することができる:

系 3.3. $\Psi = (\vec{\mathbf{G}}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ を $\mathbf{G}$ の正則な Yu データとし, 対応する馴楕円的正則対を $(\mathbf{S}, \theta)$ とする. また $\pi_\Psi = \pi_{(\mathbf{S}, \theta)}$ をそれに対応する G の馴超尖点表現とする. このとき任意の楕円的 very 正則半単純元 $\gamma \in G$ について, π_Ψ の Harish-Chandra 指標 Θ_{π_Ψ} は

$$\Theta_{\pi_\Psi}(\gamma) = \varepsilon_{(\mathbf{G}, \mathbf{S})} \sum_{w \in S \setminus N_G(T_\gamma, S)} \Delta_{(\mathbf{G}, \mathbf{S})}({}^w\gamma) \cdot \theta({}^w\gamma)$$

で与えられる. 特に, $N_G(T_\gamma, S)$ が空集合であれば (言い換えると, γ が S の元と G 共役でなければ), $\Theta_{\pi_\Psi}(\gamma) = 0$ である.

4 主定理と証明の概略

次が [CO23] の主定理である:

定理 4.1. p は $\mathbf{G}$ の Weyl 群の位数を割らないと仮定する. $\Psi = (\vec{\mathbf{G}}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ を $\mathbf{G}$ の正則な Yu データとし, 対応する馴楕円的正則対を $(\mathbf{S}, \theta)$ とする. $(\mathbf{S}, \theta)$ が「Henriart の不等式」を満たすならば, 対応する G の馴超尖点表現 $\pi_\Psi = \pi_{(\mathbf{S}, \theta)}$ は以下の条件を満たす超尖点表現として特徴づけられる: 任意の楕円的 very 正則半単純元 $\gamma \in G_{\mathbf{x}}^0$ について, π_Ψ の Harish-Chandra 指標 Θ_{π_Ψ} は

$$\Theta_{\pi_\Psi}(\gamma) = \varepsilon_{(\mathbf{G}, \mathbf{S})} \sum_{w \in S \setminus N_G(T_\gamma, S)} \Delta_{(\mathbf{G}, \mathbf{S})}({}^w\gamma) \cdot \theta({}^w\gamma)$$

で与えられる.

主張の中に登場した「Henriart の不等式」の説明は一旦後回しにすることにして, まずはこの主定理の証明の概略を説明したい.

^{*10} 実はこれらの項の解釈も含めて, 定理 1.1 と定理 2.3 は統一的な方法で理解することができる: [Kal19, Section 5.5].

π を定理の仮定を満たすような超尖点表現とする．すなわち，任意の楕円の very 正則半単純元 $\gamma \in G_{\mathbf{x}}^0$ について，

$$\Theta_{\pi}(\gamma) = \varepsilon_{(\mathbf{G}, \mathbf{S})} \sum_{w \in S \setminus N_G(T_{\gamma}, S)} \Delta_{(\mathbf{G}, \mathbf{S})}(^w \gamma) \cdot \theta(^w \gamma)$$

が成立するとする．「 p が $\mathbf{G}$ の Weyl 群の位数を割らない」という仮定の下では，任意の超尖点表現は馴超尖点表現であることが知られている (Fintzen の exhaustion 定理: [Fin21])．そこで π を実現する Yu データをとって $\Psi' = (\vec{\mathbf{G}}', \vec{\phi}', \pi'_{-1})$ とおき， $\pi'_{-1} \cong \text{c-Ind}_{G_{\mathbf{x}'}^{\prime 0}}^{G_{\mathbf{x}}^{\prime 0}} \rho'_0$ とおく．したがって，今証明すべきことは Ψ と Ψ' が同じ (正確には $\mathbf{G}$ 同値な) Yu データであるということである．

楕円の very 正則半単純元 $\gamma \in G_{\mathbf{x}}^0$ について，定理 3.3 を用いることで，

$$\Theta_{\pi}(\gamma) = \varepsilon_{\Psi'} \sum_{w \in G_{\mathbf{x}'}^{\prime 0} \setminus N_G(T_{\gamma}, G_{\mathbf{x}'}^{\prime 0})} \Delta_{\Psi'}(^w \gamma) \cdot \Theta_{\rho'_0}(^w \gamma) \cdot \prod_{i=0}^{d'} \phi'_i(^w \gamma)$$

であることが分かる^{*11}．したがってこれらを組み合わせることで，

$$\varepsilon_{(\mathbf{G}, \mathbf{S})} \sum_{w \in S \setminus N_G(T_{\gamma}, S)} \Delta_{(\mathbf{G}, \mathbf{S})}(^w \gamma) \cdot \theta(^w \gamma) = \varepsilon_{\Psi'} \sum_{w \in G_{\mathbf{x}'}^{\prime 0} \setminus N_G(T_{\gamma}, G_{\mathbf{x}'}^{\prime 0})} \Delta_{\Psi'}(^w \gamma) \cdot \Theta_{\rho'_0}(^w \gamma) \cdot \prod_{i=0}^{d'} \phi'_i(^w \gamma)$$

という等式が任意の楕円の very 正則半単純元 $\gamma \in G_{\mathbf{x}}^0$ について成り立っていることが分かる．

ここで，very 正則半単純性の条件が，位相的 Jordan 分解の位相的半単純部分にしか依存していないことに注目する．つまり，very 正則半単純元 γ の位相的 Jordan 分解が $\gamma = \gamma_0 \gamma_+$ であるとき， γ_+ を T_{γ} 内の任意の位相的冪単元 γ'_+ で取り替えて得られる元 $\gamma' = \gamma_0 \gamma'_+$ もやはり very 正則半単純となる． $\Theta_{\rho'_0}$ は有限簡約群の尖点表現からの寄与であったから，このような位相的冪単部分の取り替えの下では不変になっている．また ε や Δ といった項も，位相的冪単部分の取り替えには影響を受けない．これらの点を踏まえると， γ を S の元として取って γ_+ を S_{0+} 内で取り替えることで (S_{0+} は S の位相的冪単元の集合を表す)，先の等式は S_{0+} の指標たち $\{\theta^w|_{S_{0+}}\}_w$ と $\{\prod_{i=0}^{d'} \phi'_i|_{S_{0+}}\}$ の間の一次関係式を与えていると見なせる．そこで指標の一次独立性を用いることで， $\theta|_{S_{0+}}$ と $\prod_{i=0}^{d'} \phi'_i|_{S_{0+}}$ が G 共役であると分かる．

実はこの観察と $\vec{\phi}$ と $\vec{\phi}'$ の「生成性」を組み合わせることで，Yu データ $\Psi = (\vec{\mathbf{G}}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ と $\Psi' = (\vec{\mathbf{G}}', \vec{\phi}', \pi'_{-1})$ が，深度 0 の寄与 π_{-1} および π'_{-1} を除いては等しい (正確には $\mathbf{G}$ 同値) ことが証明できる．これにより，元々証明したかった $\pi_{\Psi} \cong \pi_{\Psi'}$ という主張は， $\pi_{-1} \cong \pi'_{-1}$ という主張に帰着される．

深度 0 超尖点表現の指標公式をあらためて用いることで，この主張は更に次のような定理 4.1 の有限体類似に帰着される：

定理 4.2. $\mathbb{S} \subset \mathbb{G}$ を， $S \subset G_{\mathbf{x}}^0$ の整モデルの特殊ファイバーの最大簡約商として定まる有限体上の簡約群とする． $(\mathbb{G}, \mathbb{S})$ は「Henniart の不等式」を満たすと仮定する． $\phi_{-1}: \mathbb{S}(\mathbb{F}_q) \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$ を正則な

^{*11} ここで π は正則超尖点表現かどうかはまだ分かっていないことに気をつけておく．これが，指標公式を正則超尖点表現のみならず馴超尖点表現にまで一般化しておく必要のあった理由である．

指標とし、 $R_S^G(\phi_{-1})$ を付随する Deligne–Lusztig 表現とする。このとき、 $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の既約表現 ρ が

$$\Theta_\rho(\gamma) = \varepsilon \cdot \Theta_{R_S^G(\phi_{-1})}(\gamma)$$

という等式を $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の任意の楕円的 very 正則半単純元 γ について満たすならば（ただし ε は γ に依らない符号）、 $\rho \cong \varepsilon \cdot R_S^G(\phi_{-1})$ である。

気をつけなければならないのは、 $\mathbb{G}$ および S は一般には非連結な簡約群であり、それどころか無限個の連結成分をもつ場合もあり得る、ということである^{*12}。したがって定理 4.2 の主張が意味を成すためには、まず Deligne–Lusztig 理論をこのような設定下（つまり $G_{\mathbf{x}}$ を還元して得られるようなクラスの群）に一般化しておく必要がある。この一般化については、[CO23, Section 3] で論じられている。また「 $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の楕円的 very 正則半単純元」の正確な意味は、「 $G_{\mathbf{x}}$ の楕円的 very 正則半単純元の還元によって得られる $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の元」である。

最後に定理 4.2 の証明の概略を説明したい。簡単のために以下では、設定を更に単純化した次の定理の証明について説明する（一般の設定下での定理の主張および証明の詳細は [CO23, Sections 3 and 4] を参照）：

定理 4.3. $\mathbb{G}$ を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の連結簡約群とし、 S を $\mathbb{G}$ の極大トーラスとする。また

$$\frac{|S(\mathbb{F}_q)|}{|S^{\text{reg}}(\mathbb{F}_q)|} > 2 \cdot |W_{\mathbb{G}}(S)|$$

という不等式が満たされているとする（ここで S^{reg} は S の非正則半単純元の集合を表す）。 θ を $S(\mathbb{F}_q)$ の正則な指標とし、 $R_S^G(\theta)$ をそれに付随する Deligne–Lusztig 表現とする。このとき、 $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の既約表現 ρ が

$$\Theta_\rho(\gamma) = \varepsilon \cdot \Theta_{R_S^G(\theta)}(\gamma)$$

という等式を $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の任意の正則半単純元 γ について満たすならば（ただし ε は γ に依らない符号）、 $\rho \cong \varepsilon \cdot R_S^G(\theta)$ である。

この定理は Deligne–Lusztig の指標公式と、Cauchy–Schwarz の不等式の簡単な応用によって示すことができる。

証明の概略。まず ρ を定理の条件を満たす $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の既約表現とする。 $\rho \cong \varepsilon \cdot R_S^G(\theta)$ を示すには、内積

$$\langle \rho, R_S^G(\theta) \rangle := \frac{1}{|\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)|} \sum_{g \in \mathbb{G}(\mathbb{F}_q)} \Theta_\rho(g) \cdot \overline{\Theta_{R_S^G(\theta)}(g)}$$

が 0 でないことを示せば良い。そこで $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ を正則半単純部分 $\mathbb{G}_{\text{reg}}(\mathbb{F}_q)$ とその補集合 $\mathbb{G}^{\text{reg}}(\mathbb{F}_q) := \mathbb{G}(\mathbb{F}_q) \setminus \mathbb{G}_{\text{reg}}(\mathbb{F}_q)$ に分割し、内積 $\langle \rho, R_S^G(\theta) \rangle$ もこの分割に沿って分解することを考える：

$$\langle \rho, R_S^G(\theta) \rangle = \langle \rho, R_S^G(\theta) \rangle_{\text{reg}} + \langle \rho, R_S^G(\theta) \rangle^{\text{reg}}.$$

^{*12} したがって「有限体上の簡約群」というのは些か不適切な説明で、一般にはただの smooth な群スキームである。

すなわち右辺の第一項は内積 $\langle \rho, R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle$ の定義の和のインデックス集合 $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ を $\mathbb{G}_{\text{reg}}(\mathbb{F}_q)$ に置き換えたものであり、第二項は $\mathbb{G}^{\text{reg}}(\mathbb{F}_q)$ で置き換えたものである。

さてここで、 ρ と $R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta)$ が既約であることに注目すれば、

$$1 = \langle \rho, \rho \rangle = \langle \rho, \rho \rangle_{\text{reg}} + \langle \rho, \rho \rangle^{\text{reg}}.$$

および

$$1 = \langle R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta), R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle = \langle R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta), R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle_{\text{reg}} + \langle R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta), R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle^{\text{reg}}.$$

という式が得られる。また ρ の仮定から $\langle \rho, \rho \rangle_{\text{reg}} = \langle R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta), R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle_{\text{reg}}$ であるので、これらを合わせれば $\langle \rho, \rho \rangle^{\text{reg}} = \langle R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta), R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle^{\text{reg}}$ であることも分かる。そこで

$$X := \langle \rho, \rho \rangle_{\text{reg}} = \langle R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta), R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle_{\text{reg}}, \quad Y := \langle \rho, \rho \rangle^{\text{reg}} = \langle R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta), R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle^{\text{reg}}$$

とおく (X と Y は $X + Y = 1$ を満たす 0 以上の実数である)。

ρ の仮定から $\langle \rho, R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle_{\text{reg}} = X$ であり、また Cauchy–Schwarz の不等式から

$$|\langle \rho, R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle^{\text{reg}}| \leq |\langle \rho, \rho \rangle^{\text{reg}}|^{\frac{1}{2}} \cdot |\langle R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta), R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle^{\text{reg}}|^{\frac{1}{2}} = Y$$

である。つまり、等式

$$\langle \rho, R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle = \langle \rho, R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle_{\text{reg}} + \langle \rho, R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle^{\text{reg}}.$$

の右辺の第一項は X で、第二項の絶対値は Y 以下であることが分かった。したがって特に、 $X > Y$ が成り立てば少なくとも $\langle \rho, R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle \neq 0$ であることは従う。 $X + Y = 1$ であったから、 $X > Y$ は $Y < \frac{1}{2}$ と同値である。

この最後の条件 $Y < \frac{1}{2}$ を解析するために、Deligne–Lusztig 表現 $R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta)$ の指標の明示公式 (Deligne–Lusztig の指標公式) を用いる。詳細は割愛するが、Deligne–Lusztig の指標公式に沿って $Y = \langle R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta), R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle^{\text{reg}}$ を計算すると、最終的には Y を次のような和に書き換えることができる：

$$Y = \frac{1}{|\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)|} \sum_{w \in W_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})} \sum_{s \in \mathbb{S}^{\text{reg}}(\mathbb{F}_q)} \theta(s) \overline{\theta(ws)}.$$

すると三角不等式によって (および θ がユニタリであることから)、

$$Y \leq \frac{|\mathbb{S}^{\text{reg}}(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)|} \cdot |W_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})|$$

であることが分かる。したがって、特に

$$\frac{|\mathbb{S}^{\text{reg}}(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)|} \cdot |W_{\mathbb{G}}(\mathbb{S})| < \frac{1}{2}$$

が成立すれば $Y < \frac{1}{2}$ が成り立ち、 $\langle \rho, R_{\mathbb{S}}^{\mathbb{G}}(\theta) \rangle \neq 0$ も得られることとなる。この最後の不等式を変形すれば、定理の仮定の不等式が得られる。 $\square$

定理 4.3 の仮定に登場した不等式（を一般化したもの）が、定理 4.1 で「Henriart の不等式」と呼んでいるものである。

補足 4.4. 一般の設定下での Henriart の不等式の正確な主張は [CO23, Section 4.1] に書かれている（不等式 (5.1)）。先ほども説明したように、一般には $\mathbb{G}$ や $\mathbb{S}$ は連結成分が無限個ある群になり得る。その場合には $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ や $\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)$ は無限集合となるため、定理 4.3 の仮定にあるような不等式や、また定理 4.3 の証明自体も意味をなさなくなってしまう。そこで $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ や $\mathbb{S}(\mathbb{F}_q)$ の適切な部分群による商をとることで議論を modify する必要がある。「適切な部分群」の最も安直な候補としては $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の中心が考えられるが、実はこれでは議論がうまく回らない。というのも、ただの正則半単純元と違い、「very」正則半単純元の集合は $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の中心による並行移動で保たれない可能性があるからである。この問題点を克服する方法の一つは、 $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の中心の指数有限部分群であって、 $\mathbb{G}(\mathbb{F}_q)$ の very 正則半単純元の集合が並行移動で不変となるものを考えることである。一般の設定下での Henriart の不等式 (5.1) には色々な修飾記号がついており、定理 4.3 のものに比べて複雑な見た目をしているが、それはこうした $\mathbb{G}$ や $\mathbb{S}$ の微妙さや very 正則半単純性の微妙さに起因している。

補足 4.5. Henriart の不等式は、インプットデータの $\Psi = (\vec{G}, \vec{\phi}, \pi_{-1})$ あるいは馴楯円的正則対 $(\mathbf{S}, \theta)$ さえ具体的に与えられれば、明示的に書き下すことができる。たとえば $\mathbf{S}$ が不分岐で、付随する Bruhat–Tits building の点 x が Chevalley 点である場合には、Henriart の不等式は定理 4.3 の不等式（を $\mathbb{G}$ の単位元成分について考えたもの）と等価になるので、群 $\mathbb{G}$ の Dynkin タイプに関するケース・バイ・ケースの計算で記述することができる（[CO23, Appendix A] 参照）。この場合のポイントは、剰余位数 q が十分大きければ Henriart の不等式が成立することである。一方で $\mathbf{S}$ が不分岐でないと、たとえ q がいくら大きくとも Henriart の不等式が成立しない場合がある。

5 応用

今回の結果の応用についてもごく簡単に触れておきたい。

まず一つ目は、**局所 Langlands 対応の特徴付け**への応用である。Kaletha は正則超尖点表現の分類定理（定理 2.1）を用いることで、正則超尖点表現について局所 Langlands 対応を構成した（[Kal19, Section 5]）。2 節でも説明したように Kaletha の分類定理は抽象的な特徴付けをもたない構成的なものであるため、そこから帰結される正則超尖点局所 Langlands 対応もあくまで構成的なものであった。しかし定理 4.1 によれば、すくなくとも諸々の（Henriart の不等式などの）技術的仮定が満たされる場合においては、Kaletha の正則超尖点局所 Langlands 対応を Harish-Chandra 指標の言葉で特徴付けることが可能となる。これにより、実簡約群の場合の Harish-Chandra および Langlands の理論とパラレルなピクチャーが完成することになる。

二つ目は、**明示的局所 Jacquet–Langlands 対応**への応用である。局所 Jacquet–Langlands 対応とは大雑把に言えば、簡約群 $\mathbf{G}$ とその内部形式 $\mathbf{G}'$ の既約表現たちを関係付ける対応である。

局所 Jacquet–Langlands 対応は古典群などの特定の群に対しては構成されており (GL_n の場合は Rogawski [Rog83] および Deligne–Kazhdan–Vigneras [DKV84], Sp や SO の場合は Arthur [Art13] および Mœglin–Renard [MR18], など), 対応は**指標関係式**と呼ばれる Harish-Chandra 指標の間の関係式によって特徴付けられる. そこで定理 4.1 と指標関係式を組み合わせることで, 古典群の一部の正則超尖点表現に対しては局所 Jacquet–Langlands 対応を明示的に記述することができる.^{*13}

謝辞

この度, RIMS 研究集会「表現論とその周辺分野における最近の進展」での講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの廣恵一希先生と, またそれを推薦してくださった阿部紀行先生に感謝いたします.

参考文献

- [Art13] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: Orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [AS09] J. D. Adler and L. Spice, *Supercuspidal characters of reductive p -adic groups*, Amer. J. Math. **131** (2009), no. 4, 1137–1210.
- [CO23] C. Chan and M. Oi, *Characterization of supercuspidal representations and very regular elements*, preprint, [arXiv:2301.09812](https://arxiv.org/abs/2301.09812), 2023.
- [DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p -adiques*, Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, pp. 33–117.
- [DL76] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. (2) **103** (1976), no. 1, 103–161.
- [DS18] S. DeBacker and L. Spice, *Stability of character sums for positive-depth, supercuspidal representations*, J. Reine Angew. Math. **742** (2018), 47–78.
- [Fin21] J. Fintzen, *Types for tame p -adic groups*, Ann. of Math. (2) **193** (2021), no. 1, 303–346.
- [FKS23] J. Fintzen, T. Kaletha, and L. Spice, *A twisted Yu construction, Harish-Chandra characters, and endoscopy*, Duke Math. J. **172** (2023), no. 12, 2241–2301.

^{*13} 一般の群についても, 表現のクラスを正則超尖点表現に絞ることで, Kaletha の構成から特に局所 Jacquet–Langlands 対応が得られる. だが上述の通り Kaletha の構成は構成的なものであるため, たとえば古典群の場合に既存の局所 Jacquet–Langlands 対応とどう関係するか (特に一致しているか) はアプリアリには全く非自明である. 「一部の」正則超尖点表現についての局所 Jacquet–Langlands 対応の明示的記述が得られるというのは, まさにこの一致が示せることに他ならない.

- [HC65] Harish-Chandra, *Discrete series for semisimple Lie groups. I. Construction of invariant eigendistributions*, Acta Math. **113** (1965), 241–318.
- [HC70] ———, *Harmonic analysis on reductive p -adic groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 162, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970, Notes by G. van Dijk.
- [HM08] J. Hakim and F. Murnaghan, *Distinguished tame supercuspidal representations*, Int. Math. Res. Pap. IMRP (2008), no. 2, Art. ID rpn005, 166.
- [Kal19] T. Kaletha, *Regular supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **32** (2019), no. 4, 1071–1170.
- [Lan89] R. P. Langlands, *On the classification of irreducible representations of real algebraic groups*, Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups, Math. Surveys Monogr., vol. 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 101–170.
- [MP94] A. Moy and G. Prasad, *Unrefined minimal K -types for p -adic groups*, Invent. Math. **116** (1994), no. 1-3, 393–408.
- [MP96] ———, *Jacquet functors and unrefined minimal K -types*, Comment. Math. Helv. **71** (1996), no. 1, 98–121.
- [MR18] C. Mœglin and D. Renard, *Sur les paquets d’Arthur des groupes classiques et unitaires non quasi-déployés*, Relative aspects in representation theory, Langlands functoriality and automorphic forms, Lecture Notes in Math., vol. 2221, Springer, Cham, 2018, pp. 341–361.
- [Rog83] J. D. Rogawski, *Representations of $GL(n)$ and division algebras over a p -adic field*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 1, 161–196.
- [Spi08] L. Spice, *Topological Jordan decompositions*, J. Algebra **319** (2008), no. 8, 3141–3163.
- [Spi18] ———, *Explicit asymptotic expansions for tame supercuspidal characters*, Compos. Math. **154** (2018), no. 11, 2305–2378.
- [Spi21] ———, *Explicit asymptotic expansions in p -adic harmonic analysis II*, preprint, [arXiv:2108.12935](https://arxiv.org/abs/2108.12935), 2021.
- [Yu01] J.-K. Yu, *Construction of tame supercuspidal representations*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 3, 579–622.