Equivariant Schubert Calculus of Affine Grassmanniann of Symplectic Group

発表者: Yusuke Nakayama
joint work with Takeshi Ikeda and Mark Shimozono

1 What is Schubert Calculus?

Schubert 計算とは代数幾何学の 1 分野であり幾何学的な問題の解の数を数え上げることである. 特に, 構造定数を決定することが重要な問題である. ここで構造定数とは, グラスマン多様体のコホモロジー環において Schubert 多様体は Schubert 類と呼ばれるコホモロジー類を定め, Schubert 類どうしの積を考えた時に Schubert 類達の線形和で書けそれらに現れる係数のことを言う. 古典的な場合で言えば, Pieri の規則と呼ばれるある特殊な Young 図形で添字付けられる Schubert 類との積を組み合わせ論を用いた方法で求めることが知られている. また, グラスマン多様体のコホモロジー環に対してある不変式環から全射があってその Schubert 類に対して Schur 多項式が対応することが知られている. つまり, 構造定数を求める問題は多項式の展開に帰着される. この章ではこのような特殊多項式に焦点を当てたグラスマン多様体の Schubert 計算について述べる. また, ラグランジアングラスマン多様体に関しても同様の結果を紹介する.

1.1 グラスマン多様体

$Gr(m,n)$ をグラスマン多様体とする. $\mathcal{Y}_m(n)$ を行が m 以下で列が $n-m$ 以下の Young 図形の集合とする. つまり集合としては以下で与えられる:

$$\mathcal{Y}_m(n) = \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \mid n-m \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m \geq 0,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

さらに, $\mathcal{Y}_m(\infty)$ を $\bigcup_{i \geq m} \mathcal{Y}_m(i)$ で定義する. $\mathbb{C}^n$ の旗 $F^\cdot$ とは次の線形部分空間の減少列のことを言う:

$$\mathbb{C}^n = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^n = \{0\}$$

ここで $\dim F^i = n-i$ である. 任意の $\lambda \in \mathcal{Y}_m(n)$ に対して, λ で添字付けられる *Schubert* 多様体 Ω_λ を

$$\Omega_\lambda := \{V \in Gr(m,n) \mid \dim\ (F^{\lambda_i+m-i} \cap V) \geq i\ (1 \leq i \leq m)\}$$

で定義する. この時 Ω_λ は $Gr(m,n)$ の閉部分多様体であって, $Gr(m,n)$ での余次元は $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ に等しい. S を $H_T^*(point)$ とする. このとき, $H_T^*(point)$ は多項式環 $\mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_n]$ と同型である, ここで T は $SL_n(\mathbb{C})$ の極大トーラスである. グラスマン多様体上の T 同変コホモロジー環 $H_T^*(Gr(m,n), \mathbb{Z})$ は Schubert 基底と呼ばれる S-basis を持つ:

$$H_T^*(Gr(m,n), \mathbb{Z}) = \oplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_m(n)} S \cdot \sigma_\lambda.$$

2 つの Schubert 類の積を以下で表す:

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_m(n)} c_{\lambda,\mu}^\nu \sigma_\nu$$

ここで定数 $c_{\lambda,\mu}^\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[t_1, \cdots, t_n]$ は $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$ の場合を除き 0 である. この $c_{\lambda,\mu}^\nu$ を構造定数と呼ぶ. この数は全ての i に関して t_i を 0 に特殊化したときに, 3 つの Schubert 多様体の交点数に等しいことが知られている. 先にも述べた通り, この構造定数を求めることが Schubert 計算において重要な問題である. それを求める手段として以下のような特殊多項式を用いた方法がある. 変数

$z=(z_1,\cdots,z_m)$ と $t=(t_i)_{i\geq 1}$ に対して, $(z|t)^k := (z-t_1)\cdots(z-t_k)$ と定める. Λ_m を対称多項式環 $\mathbb{Z}[z_1,\cdots,z_m]^{\mathfrak{S}_m}$ とする. $\lambda\in\mathcal{Y}_m(\infty)$ の factorial Schur 多項式を

$$\frac{\det((z|t)^{\lambda_j+m-j})_{m\times m}}{\prod_{1\leq i<j\leq m}(z_i-z_j)}$$

で定義する. この時, 次の事が知られている.

Theorem 1.1. *(Lakshmibai–Raghavan–Sankaran [3], Knutson–Tao [2])* S 代数としての全射

$$S\otimes\Lambda_m \to H_T^*(Gr(m,n),\mathbb{Z})$$

が存在して, 元の対応は以下で与えられる:

$$s_\lambda(z|t_1,\cdots,t_n,0,\cdots)\mapsto\begin{cases}\sigma_\lambda & \text{if } \lambda\in\mathcal{Y}_m(n)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

つまり, 幾何学的な構造定数は factorial Schur 多項式という特殊多項式の代数的な計算で求めることができる. さらに, $s_\lambda(z|t)$ の構造定数はよく知られている (Littlewood-Richardson 規則).

上の Theorem の S 代数としての準同型写像の構成について説明する. $Gr(m,n)^T$ を $Gr(m,n)$ 上のトーラス固定点の集合とする. このとき, $H_T^*(Gr(m,n)^T)=Fun(\mathcal{Y}_m(n),S)$ であることに注意する.

Proposition 1.2. *(GKM condition)* 自然な包含写像 $Gr(m,n)^T\hookrightarrow Gr(m,n)$ に誘導される S 代数の準同型写像

$$H_T^*(Gr(m,n))\to H_T^*(Gr(m,n)^T)=Fun(\mathcal{Y}_m(n),S)$$

は単射である. さらに, $\xi=(\xi_{v_\lambda})_{\lambda\in\mathcal{Y}_m(n)}\in Fun(\mathcal{Y}_m(n),S)$ がこの写像の像に属することと以下は同値である. 任意の $\alpha\in\Phi^+$ と $\lambda\in\mathcal{Y}_m(n)$ に対し,

$$\xi_{s_\alpha v_\lambda}-\xi_{v_\lambda}\in\langle\alpha\rangle$$

が成り立つ. ここで Φ^+ は正ルートの集合, s_α は α に対応する *reflection* であって λ とグラスマン置換 v_λ を同一視している.

定理の射を構成するためにまずは $S\otimes\Lambda_m$ から $Fun(\mathcal{Y}_m(n),S)$ に対して S 代数としての射を構成する. $\mathcal{Y}_m(n)$ の元 λ とそれに対応するグラスマン置換 $v:=v_\lambda$ を同一視する. $S\otimes\Lambda_m$ から S への S 線形写像 ϵ_v を以下の代入操作によって定義する:

$$\epsilon_v(f(z_1,\cdots,z_m|t_1,\cdots,t_n)) := f(t_{v(1)},\cdots,t_{v(m)}|t_1,\cdots,t_n)\in S.$$

任意の $f\in S\otimes\Lambda_m$ に対して, $Fun(\mathcal{Y}_m(n),S)$ の元 $\phi(f)$ を

$$\mathcal{Y}_m(n)\ni\lambda\mapsto\epsilon_v(f)\in S$$

によって定義する. この対応によって S 代数としての準同型写像

$$\phi: S\otimes\Lambda_m\to Fun(\mathcal{Y}_m(n),S)$$

を得る. このようにして得た S 代数としての準同型写像に対して GKM 条件を確かめることによって $S\otimes\Lambda_m\to H_T^*(Gr(m,n),\mathbb{Z})$ が得られる.

1.2 ラグランジアングラスマン多様体

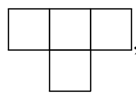
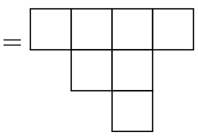
$e_n^*,\cdots,e_1^*,e_1,\cdots,e_n$ を $\mathbb{C}^{2n}$ の ordered basis とする. $\mathbb{C}^{2n}$ 上の symplectic form を

$$(e_i,e_j)_C=(e_i^*,e_j^*)_C=0,\quad (e_i^*,e_j)_C=\delta_{i,j}$$

と定義する．$LG(n)$ を以下のように定義する:

$$LG(n) := \{V \subset \mathbb{C}^{2n} \mid \mathrm{dim} V = n,\ (V, V)_C = 0\}$$

これは代数多様体の構造を持ち，ラグランジアングラスマン多様体と呼ばれる．T を $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の極大トーラスとする．次に，$LG(n)$ 上の Schubert 多様体について説明する．グラスマン多様体上の Schubert 多様体はヤング図形によって添字付けられていたが，ラグランジアングラスマン多様体のときは strict partition と呼ばれるものに添字付けられる．$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ を正の整数の真の減少列とする．λ を strict partition と呼び r を λ の長さと呼び $\ell(\lambda)$ と記す．例えば次の strct partition は以下の図形と同一視する．

$(3,1) =$ , $(4,2,1) =$ 

$\mathcal{SP}_n$ を $\ell(\lambda) \leq n$ であるような strict partitionλ の集合とする．$\mathcal{SP}(n)$ を $\lambda_1 \leq n$ であるような strict partitionλ の集合とする．$\lambda_1 \leq n$ であることと strict partition の定義から，$\mathcal{SP}(n)$ は $\mathcal{SP}_n$ の部分集合であることに注意する．任意の $\lambda \in \mathcal{SP}(n)$ に対して，

$$\Omega_\lambda := \{V \in LG(n) \mid \dim\,(E^{\lambda_i} \cap V) \geq i\ (1 \leq i \leq l(\lambda))\}$$

と定義する，ここで $E^i = \langle e_i, \cdots, e_n \rangle\ (1 \leq i \leq n)$ である．Ω_λ は $LG(n)$ 上の Schubert 多様体と呼ばれ閉部分多様体となる．また，$LG(n)$ 上の Schubert 多様体 Ω_λ の余次元は $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i$ となる．

次に，$LG(n)$ 上の Schubert 類を代表する特殊多項式を説明する．変数 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と $t = (t_i)_{i \geq 1}$ に対して，$(x|t)^k := \prod_{i=1}^{k}(x - t_i)$ と定義する．任意の $\lambda \in \mathcal{SP}_n$ に対し，

$$P_\lambda(x|t) = \frac{1}{(n - l(\lambda))!} \sum_{w \in S_n} w \left[\prod_{i=1}^{l(\lambda)} (x_i|t)^{\lambda_i} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \right]$$

と定義する，ここで $w \in S_n$ は $x_1, \cdots, x_n$ の変数の入れ替えとして作用する．この関数を factorial P-Schur function と呼び，Ivanov によって 2003 年に導入された．factorial Schur Q-function は

$$Q_\lambda(x|t) := 2^{\ell(\lambda)} P_\lambda(x|0, t_1, t_2, \cdots)$$

と定義される．もし任意の i について $t_i = 0$ とすると，それぞれ Schur によって 1911 年に導入された P- と Q-Schur function となる．$\Gamma_n := \mathbb{Z}[Q_1(x), Q_2(x), \cdots]$ と定義する．また $S := H_T^*(pt) \cong \mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_n]$ とする．トーラス同変でない場合は以下の結果が知られている．

Theorem 1.3. *(Pragacz [7])* 環の全射準同型写像

$$\Gamma_n \to H^*(LG(n), \mathbb{Z})$$

であって以下の対応のものが存在する．

$$Q_\lambda(x|0) \mapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & \text{if } \lambda \in \mathcal{SP}(n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

トーラス同変コホモロジーの場合は以下の結果が知られている．

Theorem 1.4. *(Ikeda [1])S* 代数としての全射準同型写像

$$S \otimes \Gamma_n \to H_T^*(LG(n), \mathbb{Z})$$

であって以下の対応のものが存在する．

$$Q_\lambda(x|t_1, \cdots, t_n, 0, \cdots) \mapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & \text{if } \lambda \in \mathcal{SP}(n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

2 アフィングラスマン多様体の Schubert Calculus

前章ではグラスマン多様体やラグランジアングラスマン多様体のような等質多様体の場合の Schubert 計算 (特に, Schubert 類を代表する特殊多項式に焦点を当てて) 説明してきた. この章ではアフィングラスマン多様体と呼ばれる空間上の Schubert 計算について説明する. 特に, アフィングラスマン多様体上にも Schubert 類が定義することができ, ここでもそれを代表する特殊多項式に焦点を当てて述べる.

2.1 アフィングラスマン多様体

G を $\mathbb{C}$ 上の半単純線形代数群とすし, $T \subset G$ をその極大トーラスとする. このとき, アフィングラスマン多様体 Gr_G は以下のように定義される:

$$Gr_G := G(\mathbb{C}((t)))/G(\mathbb{C}[[t]]).$$

アフィングラスマン多様体 Gr_G は ind-scheme の構造を持つ. $\widetilde{W} \cong Q^\vee \ltimes W$ を $G(\mathbb{C}((t)))$ の Weyl 群とする, ここで $Q^\vee$ は余ルート格子である. $\widetilde{W}^0 (\cong \widetilde{W}/W \cong Q^\vee)$ を minimal coset representative とする. 次に, アフィングラスマン多様体の性質と Peterson isomorphism と呼ばれる対応に関して述べる.

アフィングラスマン多様体 Gr_G のホモロジー群 $H_*^T(Gr_G)$ は環としての構造を持つ. $H_T^*(Gr_G)$ と $H_*^T(Gr_G)$ 上には $\widetilde{W}^0$ によって添字付けられた Schubert 類が定義できる. さらに, 驚くべきことにアフィングラスマン多様体上のホモロジー環 Gr_G と旗多様体 G/B 上の量子コホモロジー環との間にはそれぞれしかるべき局所化をすることによって環としての同型がある. (それぞれの局所化に関してはここでは説明しない.)

Theorem 2.1. *(Peterson, Lam–Shimozono [4])* 以下の環としての同型が存在する*:*

$$H_*^T(Gr_G)_{Loc} \cong QH_T^*(G/B)_{Loc},$$

ここで B は G の *Borel* 部分群である*.*

2.2 Presentations for affine Grassmannian of certain classical types

ここでは, G が A 型もしくは C 型のときのアフィングラスマン多様体 Gr_G のコホモロジー環のプレゼンテーションに関する先行研究を紹介する.

まずはトーラス同変でない場合について考える.

- G が $SL_n(\mathbb{C})$ であるとき, Lam–Shimozono [5] によって $H^*(Gr_{SL_n})$ のプレゼンテーションが構成された. さらに彼らは *affine Stanley symmetric functions* と呼ばれる関数が $H_T^*(Gr_{SL_n})$ 上の Schubert 類を代表することを示した.

- G が $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ であるとき, Lam–Schilling–Shimozono [6] によって $H^*(Gr_{Sp_{2n}})$ のプレゼンテーションが構成された. さらに彼らは *affine type C Stanley symmetric functions* が $H^*(Gr_{Sp_{2n}})$ 上の Schubert 類を代表することを示した.

次に, トーラス同変であって G が $SL_n(\mathbb{C})$ であるときの場合を考える. そのために, 記号の準備をする. Λ を無限変数 $(x_1, x_2, \cdots)$ の対称関数環とする. $\mathbb{Q}[a]$ を有理数係数の a_i を変数とする多項式環とする, ここで a は変数の列 $a = (a_i)$, $i \in \mathbb{Z}$ である. Molev によって定義された環 $\Lambda(x||a)$ について説明する. $\Lambda(x||a)$ は $\mathbb{Q}[a]$ 上 *double power sums symmetric functions* と呼ばれる以下の関数によって生成される環とする:

$$p_k(x||a) := \sum_{i=1}^{\infty}(x_i^k - a_i^k).$$

$\Lambda^{(n)}(x||a)$ をあるイデアルで $\Lambda(x||a)$ を割った剰余環とする. これは Lam–Shimozono [5] によって導入された環である. このとき, 以下が知られている.

Theorem 2.2. *(Lam–Shimozono [5])* S 代数としての同型

$$\Lambda^{(n)}(x||a) \to H_T^*(Gr_G)$$

が存在して *double affine Stanley symmetric function* と呼ばれる関数 $\tilde{F}_\lambda^{(n)}(x||a)$ が *Schubert* 類 σ_λ を代表する.

では, どのようにこの S 代数としての準同型写像を構成するのかのアイデアを述べる. Gr_G^T を Gr_G 上の G のトーラス T の作用に関する固定点の集合とする. S を $H_T^*(pt)$ とする. このとき, $H_T^*(Gr_G^T) = Fun(\widetilde{W}^0, S)$ であることに注意する.

Proposition 2.3. *(small torus GKM condition [5])* 自然な包含写像 $Gr_G^T \hookrightarrow Gr_G$ が誘導する S 代数としての準同型

$$H_T^*(Gr_G) \to H_T^*(Gr_G^T) = Fun(\widetilde{W}^0, S)$$

は単射である. さらに, $f \in Fun(\widetilde{W}^0, S)$ がこの写像の像に属することと以下は同値. 任意の $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, $v \in \widetilde{W}^0$, $\alpha \in \Phi^+$ に対して,

$$f((1-t_{\alpha^\vee})^d v) \in \alpha^d S \text{ and } f((1-t_{\alpha^\vee})^{d-1}(1-s_\alpha)v) \in \alpha^d S$$

が成り立つ.

グラスマン多様体の時と同様に, まず $\Lambda^{(n)}(x||a)$ から $Fun(\widetilde{W}^0, S)$ への S 代数の準同型写像を構成する. それが small torus GKM 条件を満たすことを確認することで構成することができる.

2.3 Presentation for $H_T^*(Gr_{Sp_{2n}})$

G が $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ のときの $H_T^*(Gr_{Sp_{2n}})$ のプレゼンテーションはどうであろうか? それが今回の主結果である. 以下 G は $Sp_{2n}(\mathbb{C})$ とする.

ラグランジアングラスマン多様体の時の Schubert 類は strict partition で添字付けられ, それはある図形と対応させれることを述べた. アフィングラスマン多様体上の Schubert 類は $\widetilde{W}^0$ で添字付けられるがこの集合は以下の図形の集合と同一視することができる:

$$\widetilde{W}^0 \cong \{\lambda : \text{partition} \mid \lambda_1 \leq 2n,\ \lambda_i \leq n \Rightarrow \lambda_i > \lambda_{i+1}\}$$

定義から, $SP(n)$ は $\widetilde{W}^0$ の部分集合であることに注意する.

Γ を $\mathbb{Z}[Q_1(x_1, x_2, \cdots), Q_2(x_1, x_2, \cdots), \cdots]$ と定義し, $S \cong \mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_n]$ とする. 以下が主結果である.

Theorem 2.4. 次の S 代数としての全射が存在する.

$$S \otimes \Gamma \twoheadrightarrow H_T^*(Gr_G)$$

さらに, 以下の対応が存在する*:*

- *(1) For* $\lambda \in \mathcal{SP}(n)$, $Q_\lambda(x|t) \mapsto \sigma_\lambda$.
- *(2) For* $r \geq 1$, $Q_{(r)}(x|t^{(n)}) \mapsto \sigma_{(r)}$, *where* $t^{(n)} := (t_1, t_2, \cdots, t_n, -t_n, -t_{n-1}, \cdots)$.

さらに, *deformed odd powersums* と呼ばれる関数 $2p_{2k+1}(x|t) := \sum_{j=0}^k (-1)^j e_j(t_1^2, \cdots, t_n^2) p_{2k+1-2j}(x)$ *for* $k \geq n$ によって上の準同型写像の核は生成される.

上の結果は全ての Schubert 類を代表する関数を見つけたわけではないが, ある特殊な Schubert 類 (1 行か $\mathcal{SP}(n)$ の元) であれば factorial Q-Schur 関数が代表するというものである.

最後にこの S 代数としての準同型写像を構成方法を述べる. やはり, small torus GKM 条件を用いる. まず $S \otimes \Gamma$ から $Fun(\widetilde{W}^0, S)$ への S 代数の準同型写像を構成する.

$v \in \widetilde{W}^0$ と $v = t_\gamma u$ $(u \in W)$ であるような $\gamma \in Q^\vee$ を同一視する. $\gamma = \sum_i m_i \varepsilon_i$ $(m_i \in \mathbb{Z})$ とする. もし $m_i \neq 0$ であれば, $m_i = \delta_i |m_i|$ と書く, ここで $\delta_i \in \{+1, -1\}$ である. $S \otimes \Gamma$ から S への S 線形写像 ϵ_v を以下の代入操作によって定義する:

$$\epsilon_v(f) := f(\delta_1 t_1, \ldots, \delta_1 t_1, \delta_2 t_2, \ldots, \delta_2 t_2, \ldots, \delta_n t_n, \ldots, \delta_n t_n, 0, 0, \ldots) \in S,$$

ここで, $\delta_i t_i$ の個数は $|m_i|$ である.

Example 2.5. $\gamma = (3, -2, 1, -4)$ とする．このとき，$f(x_1, x_2, \cdots | t_1, \cdots, t_n) \in S \otimes \Gamma$ に対して，

$$\epsilon_v(f) = f(t_1, t_1, t_1, -t_2, -t_2, t_3, -t_4, -t_4, -t_4, -t_4, 0, 0, \cdots | t_1, \cdots, t_n)$$

である．

各 $f \in S \otimes \Gamma$ に対して，$Fun(\widetilde{W}^0, S)$ の元 $\epsilon(f)$ を

$$\widetilde{W}^0 \ni v \mapsto \epsilon_v(f) \in S.$$

と定義する．この対応によって S 代数としての準同型写像

$$\epsilon : S \otimes \Gamma \to Fun(\widetilde{W}^0, S)$$

を得る．

ここで, factorial Q-Schur 関数の Pfaffian 公式より, 任意の $f \in S \otimes \Gamma$ は factorial Q-Schur 関数の 1 行ものの積と和を用いて表せる．したがって, ϵ は準同型写像であるので factorial Q-Schur 関数の 1 行もののみを考えればよい．一方, factorial Q-Schur 関数の 1 行ものに対しては以下の公式が存在する:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x_i u}{1 - x_i u} \prod_{j=1}^{k-1} (1 - t_j u) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x|t) u^k.$$

あとはこの写像で small torus GKM 条件をみたすことを確認する．ここでは具体例を見る．

Example 2.6. $n = 3$ とする．$\gamma = (0, 2, -1)$ とし $d = 3$ とする．このとき，まず

$$\epsilon_v \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x_i u}{1 - x_i u} \right) = \frac{1 + t_2 u}{1 - t_2 u} \cdot \frac{1 + t_2 u}{1 - t_2 u} \cdot \frac{1 - t_3 u}{1 + t_3 u}$$

であることに注意する．また, $\alpha = \alpha_3 = 2\varepsilon_3$ と選びこれを $2t_3$ と同一視する．以上をふまえて計算をすると

$$\begin{aligned}
& \epsilon_{(1-t_{\alpha^\vee})^3 v} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x_i u}{1 - x_i u} \right) \\
= \; & \epsilon_{(1 - 3t_{\varepsilon_3} + 3t_{2\varepsilon_3} - t_{3\varepsilon_3})v} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x_i u}{1 - x_i u} \right) \\
= \; & \left(\frac{1 + t_2 u}{1 - t_2 u} \right)^2 \left(\frac{1 - t_3 u}{1 + t_3 u} - 3 + 3 \left(\frac{1 + t_3 u}{1 - t_3 u} \right) - \left(\frac{1 + t_3 u}{1 - t_3 u} \right)^2 \right) \\
= \; & \left(\frac{1 + t_2 u}{1 - t_2 u} \right)^2 \frac{(1 - t_3 u)^3 - 3(1 - t_3 u)^2 (1 + t_3 u) + 3(1 - t_3 u)(1 + t_3 u)^2 - (1 + t_3 u)^3}{(1 + t_3 u)(1 - t_3 u)^2} \\
= \; & \left(\frac{1 + t_2 u}{1 - t_2 u} \right)^2 \frac{((1 - t_3 u) - (1 + t_3 u))^3}{(1 + t_3 u)(1 - t_3 u)^2} \\
= \; & \left(\frac{1 + t_2 u}{1 - t_2 u} \right)^2 \frac{(-u)^3 (2t_3)^3}{(1 + t_3 u)(1 - t_3 u)^2}
\end{aligned}$$

を得る．

一方,

$$
\begin{aligned}
& \epsilon_{((1-t_{\alpha^\vee})^{d-1}(1-s_\alpha)v)}\left(\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1+x_iu}{1-x_iu}\right) \\
= & \left(\frac{1+t_2u}{1-t_2u}\right)^2\left(\frac{(-u)^2\,(2t_3)^2}{(1+t_3u)(1-t_3u)}-\left(\frac{1+t_3u}{1-t_3u}\right)^2\frac{(-u)^2\,(2t_3)^2}{(1+t_3u)(1-t_3u)}\right) \\
= & \left(\frac{1+t_2u}{1-t_2u}\right)^2\frac{(-u)^2\,(2t_3)^2}{(1+t_3u)(1-t_3u)}\cdot\left(1-\left(\frac{1+t_3u}{1-t_3u}\right)^2\right) \\
= & \left(\frac{1+t_2u}{1-t_2u}\right)^2\frac{(-u)^2\,(2t_3)^2}{(1+t_3u)(1-t_3u)^3}\cdot((1-t_3u)-(1+t_3u))\,((1-t_3u)+(1+t_3u)) \\
= & \left(\frac{1+t_2u}{1-t_2u}\right)^2\frac{2(-u)^3}{(1+t_3u)(1-t_3u)^3}\cdot(2t_3)^3\,.
\end{aligned}
$$

であることも確認できる.

この計算を一般化することで S 代数としての準同型写像 $S\otimes\Gamma\to H_T^*(Gr_G)$ を得る.

References

[1] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian. Adv. Math. 215 (2007), 1-23.

[2] A. Knutson and T. Tao, Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians, Duke Math. J. 119 (2) (2003) 221-260.

[3] V. Lakshmibai, K. N. Raghavan and P. Sankaran, Equivariant Giambelli and Determinantal Restriction Formulas for the Grassmannian. in: Special issue: In honor of Robert MacPherson, Part 1 of 3, Pure Appl. Math. Quart. 2 (3) (2006) 699-717.

[4] T. Lam and M. Shimozono, Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian. Acta Math. 204 (2010), no. 1, 49-90.

[5] T. Lam and M. Shimozono, k-Double Schur functions and equivariant (co)homology of affine Grassmannian. Math. Ann. 356 (2013), no.4, 1379-1404.

[6] T. Lam , A.Schulling and M. Shimozono, Schubert polynomials for the affine Grassmannian of the symplectic group. Math. Z. 264 (2010), no.4, 765-811.

[7] P.Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials, in Séminaire d ' Algèbre Dubreil-Malliavin 1989-1990, Springer Lecture Notes in Math. 1478 (1991) 130-191.