On the Opdam-Cherednik transform associated with a type BC root system

拓殖大学 工学部 織田 寛
Hiroshi Oda
Faculty of Engineering, Takushoku University

1　超幾何関数と Opdam-Cherednik 変換

$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{a}^*$ をユークリッド空間とし，$\mathcal{R}$ を $\mathfrak{a}^*$ 内の結晶的ルート系とする．$\mathcal{R}$ の Weyl 群を W とする．Heckman と Opdam が [4] で導入した $\mathcal{R}$ に付随した超幾何関数を $F(\lambda, \boldsymbol{k}; x)$ と記す．これは，スペクトルパラメータ $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ ($\mathfrak{a}^*$ の複素化)，“重複度関数” $\boldsymbol{k} \in (\mathbb{C}^{\mathcal{R}})^W$ （W 不変な写像 $\mathcal{R} \to \mathbb{C}$)，および空間変数 $x \in \mathfrak{a}$ の関数である．$\mathcal{K} = (\mathbb{R}^{\mathcal{R}})^W$，$\mathcal{K}_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^{\mathcal{R}})^W$ とする．以下に詳しく述べるように，$F(\lambda, \boldsymbol{k}; x)$ は Riemann 対称空間上の球関数の一般化になっている．

制限ルート系が $2\mathcal{R}$ と同型な非コンパクト型の連結実半単純 Lie 群 $G = KAN$（右辺は岩澤分解）があるとき，Riemann 対称空間 G/K 上のスペクトル $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$（$\mathfrak{a} = \mathrm{Lie}\, A$ とする）に対する球関数の $AK/K \simeq A \simeq \mathfrak{a}$ への制限は，λ とルート重複度 $\boldsymbol{m}_{2\alpha}$ ($\alpha \in \mathcal{R}$) のみで決まる $\mathfrak{a}$ 上の微分方程式系により特徴付けられる．より詳しくは

1. $\mathfrak{a}$ 上解析的
2. W 不変
3. $0 \in \mathfrak{a}$ での値が 1

を満たす唯一の解になっている．この微分方程式系は一般の重複度関数 $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ に対するもの $\mathcal{M}_{\lambda,\boldsymbol{k}}$ に自然に拡張され（ただし，もとの微分方程式系は $\boldsymbol{k}_\alpha = \boldsymbol{m}_{2\alpha}/2$ に対するもの)，“超幾何微分方程式系” と呼ばれる．すべての $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ に対して超幾何微分方程式系 $\mathcal{M}_{\lambda,\boldsymbol{k}}$ の 1〜3 を満たす解が存在するような $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ 全体を $\mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$ とする．($\mathcal{K}_{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$ は解析的部分集合になる.）$F(\lambda, \boldsymbol{k}; x)$ はその場合の唯一の解で，$\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$,

$\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$ について正則，$x \in \mathfrak{a}$ について実解析的になる．また，λ，x のそれぞれについて W 不変になる．

$L^2(G/K)$ の既約分解は球変換 $C_0^\infty(K\backslash G/K) \to \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ から得られるが（C_0^∞ はコンパクト台の C^∞ 球関数），球変換は制限写像による同型 $C^\infty(K\backslash G/K) \simeq C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ により $C_0^\infty(\mathfrak{a})^W \to \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ という形に書くことができる．これを一般の $\boldsymbol{k}$ に自然に拡張したものが，以下に見る“超幾何 Fourier 変換”である．

正ルート系 $\mathcal{R}^+ \subset \mathcal{R}$ を固定する．W 不変な重み関数

$$\delta_{\boldsymbol{k}}(x) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \left| e^{\frac{1}{2}\alpha(x)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(x)} \right|^{2\boldsymbol{k}_\alpha}$$

が $\mathfrak{a}$ 上の Lebesgue 測度 dx に対して局所可積分であるような $\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}$ 全体を $\mathcal{K}_1$ と記す．$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}} \cap \mathcal{K}$ が知られている．$\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}_1$ のとき，$f \in C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ の超幾何 Fourier 変換を

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}} f(\lambda) = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}} f(x) F(\lambda, \boldsymbol{k}; -x) \delta_{\boldsymbol{k}}(x) dx \tag{1.1}$$

と定める．明らかに $\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}} f \in \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ である．超幾何 Fourier 変換 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}} : C_0^\infty(\mathfrak{a})^W \to \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ は，Opdam により [10] で導入された．実は，Opdam が [10] で主に考察したのは，W 不変性を取り除いたより一般的な“Cherednik 変換”であり，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}$ はその $C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ への制限として得られる．Cherednik は [3] で，Cherednik 変換を等価で簡単な以下のような形に再定式化した．

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}} f(\lambda) = \frac{1}{|W|} \int_{\mathfrak{a}} f(x) G(\lambda, \boldsymbol{k}; -x) \delta_{\boldsymbol{k}}(x) dx. \tag{1.2}$$

ここで，$G(\lambda, \boldsymbol{k}; x)$ は [10] で導入された“非対称超幾何関数”であり（実半単純 Lie 群 G とは関係ない），$f(x) \in C_0^\infty(\mathfrak{a})$ は W 不変でなくてよい．$G(\lambda, \boldsymbol{k}; x)$ は，定義については命題 3.3 で述べるが，$F(\lambda, \boldsymbol{k}; x)$ と同様に $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times \mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}} \times \mathfrak{a}$ 上の関数で，λ，$\boldsymbol{k}$ について正則，x について実解析的になるので，$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}} f \in \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ となる．また，

$$F(\lambda, \boldsymbol{k}; x) = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} G(\lambda, \boldsymbol{k}; wx) \tag{1.3}$$

であるので，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}} : C_0^\infty(\mathfrak{a})^W \to \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}} : C_0^\infty(\mathfrak{a}) \to \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の制限になっている．Cherednik は $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ を“Opdam 変換”と呼んだが，我々は“Opdam-Cherednik 変換”と呼

ぶことにする．$G(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ は $\mathcal{R}^+$ の取り方に依存するので，$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ もそうである．$\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$ のときは $G(\lambda,\mathbf{0};x)=e^{\lambda(x)}$，$\delta_{\mathbf{0}}(x)=1$ となるので，$G(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ は指数関数の一般化，$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ は古典的な Fourier 変換の一般化になっている．

2　考えるべき問題と既知の結果

$\mathcal{K}_+=\{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}\,|\,\boldsymbol{k}_\alpha>0\ (\alpha\in\mathcal{R})\}$ とすると，$\mathcal{K}_+\subset\mathcal{K}_1$ である．Opdam は [10] で $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_+$ のときに以下を与えた．

(P1) **Paley-Wiener の定理**：$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ が $C_0^\infty(\mathfrak{a})$ から古典的な Paley-Wiener 空間

$$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)=\left\{\phi\in\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\;\middle|\;\exists B>0\,\forall n\in\mathbb{N}\sup_{\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*}(1+||\lambda||)^n e^{-B||\mathrm{Re}\,\lambda||}|\phi(\lambda)|<+\infty\right\}.$$

への全単射であることの証明．（$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ は $\boldsymbol{k}$ に依らず一定なことに注意．）

(P2) **Plancherel の定理**：$C_0^\infty(\mathfrak{a})\subset L^2(\mathfrak{a},|W|^{-1}\delta_{\boldsymbol{k}}(x)dx)$ の前ヒルベルト空間の構造（内積）と $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ によって対応する $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の前ヒルベルト空間の構造．（よって $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ は自然な L^2 空間の間の対応に拡張される．）

(P3) **逆変換公式**：逆変換 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}^{-1}:\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\to C_0^\infty(\mathfrak{a})$ の明示公式．（いくつかのバージョンがあるが，特に $\phi(\lambda)G(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ を $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上のある測度で積分するもの．）

(P2) の内積 $\langle\phi,\psi\rangle$ は $\phi,\psi\in\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ 上の値のみで定義され，(P3) の逆変換公式は，$\phi(\lambda)G(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ を $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ 上のある測度で積分するものになっていることを補足しておく．

これらの結果は，$\boldsymbol{k}$ が $\mathcal{K}_+$ の閉包 $\mathrm{Cl}(\mathcal{K}_+)=\{\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}\,|\,\boldsymbol{k}_\alpha\leq 0\ (\alpha\in\mathcal{R})\}$ に属する場合に容易に拡張される．考えるべき問題は，$\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_1\setminus\mathrm{Cl}(\mathcal{K}_+)$ のときに同様の結果を拡張することであるが，部分的に以下が知られている．いずれも $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ に対するものではなく，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}$ に対するものであり，$C_0^\infty(\mathfrak{a})$ や $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ は $C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ や $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ とする必要がある．

（拡張 1） $\mathcal{R}$ は既約かつ被約（つまり BC 型でない）とする．また，$\boldsymbol{k}\in(-\mathcal{K}_+)\cap\mathcal{K}_1$ とする（$\boldsymbol{k}$ が正の値も負の値も取る場合は含まれないことに注意）．このとき，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}$ に対する (P1)～(P3) が [11] で与えられたが，$\boldsymbol{k}$ によっては (P2) や (P3) に $\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ 以外の低次元スペクトルが本質的に関わってくる．

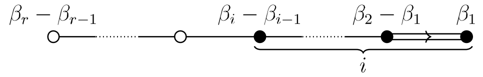
（拡張 2） 次に，$\mathcal{R}$ は既約で BC_r 型とする．$\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}$ は長いルート上での値 $\boldsymbol{k}_l$，中間

の長さのルート上での値 $\boldsymbol{k}_m$，短いルート上での値 $\boldsymbol{k}_s$ で決まるが，これらについて

$$\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_\ell>-\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad \boldsymbol{k}_m\geq 0. \tag{2.1}$$

を仮定する．((2.1) は「$\boldsymbol{k}_m\geq 0$ かつ $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_+$」と同値である．）このとき，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}$ に対する (P1)〜(P3) が [7] で与えられた．

(P2)，(P3) をより具体的に述べるためにいくつか記号を用意する．$\mathfrak{a}^*$ の直交基底 $\{\beta_1,\ldots,\beta_r\}$ を $\mathcal{R}^+$ に対応する単純ルート系が $\mathcal{B}=\{\beta_r-\beta_{r-1},\ldots,\beta_2-\beta_1,\beta_1\}$ となるように取る．各 $i=0,\ldots,r$ に対して，$\Theta_i\subset\mathcal{B}$ を Dynkin 図式



の黒ノードからなる部分集合とし，

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}(\Theta_i)^*&=\mathbb{R}\Theta_i=\mathbb{R}\beta_1+\cdots+\mathbb{R}\beta_i,\\ \mathfrak{a}^*_{\Theta_i}&=\{\lambda\in\mathfrak{a}^*\,|\,\lambda(\alpha^\vee)=0\ (\alpha\in\Theta_i)\}=\mathbb{R}\beta_{i+1}+\cdots+\mathbb{R}\beta_r\end{aligned}$$

と置く．$\mathfrak{a}^*$ 上の座標関数 $\lambda_j=\beta_j^\vee$ を用いてそれぞれの空間の要素を座標 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_i)$，$(\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_r)$ で表したりする．$\mathfrak{a}(\Theta_i)^*$ の有限部分集合 $D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)$ を，$i>0$ のときは

$$\begin{aligned}D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)=\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_i)\,|\,&\lambda_1+|\boldsymbol{k}_l-\tfrac{1}{2}|-\boldsymbol{k}_s-\boldsymbol{k}_l-\tfrac{1}{2}\in 2\mathbb{N},\ \lambda_i<0,\\ &\lambda_{j+1}-\lambda_j-2\boldsymbol{k}_m\in 2\mathbb{N}\ (1\leq j\leq i-1)\}\end{aligned} \tag{2.2}$$

で（$\mathbb{N}=\{0,1,2,\ldots\}$），$i=0$ のときは $D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_0)=D_{\boldsymbol{k}}(\emptyset)=\{0\}=\mathfrak{a}(\emptyset)^*$ で定める．

[7] で明示的に定義された $D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i}$ 上の正値測度 $\nu_{\boldsymbol{k},\Theta_i}$ を用いると，$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}$ に対する (P2)，(P3) はそれぞれ

$$\langle\phi,\psi\rangle=\sum_{i=0}^{r}\int_{D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i}}\phi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}d\nu_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(\lambda), \tag{2.3}$$

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{-1}\phi(x)=\sum_{i=0}^{r}\int_{D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i}}\phi(\lambda)F(\lambda,\boldsymbol{k};x)d\nu_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(\lambda) \tag{2.4}$$

となる．

本稿では [9] で得られた新しい結果として，$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ に対する (P1) が **（拡張 1）** や **（拡張 2）** の設定で成り立つこと（定理 4.1），$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ に対する (P2)，(P3) が **（拡張 2）** の設定（ただし $\boldsymbol{k}_m\neq 0$ とする）で成り立つこと（定理 6.2，6.3）を述べる．

3　次数 Hecke 環とその加群たち

3.1　次数 Hecke 環 $\boldsymbol{H_k}$

$\mathcal{R}$ などは任意として，$\boldsymbol{k} \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}}$ とする．$\mathcal{R}^+$ および $\boldsymbol{k}$ に付随する次数 Hecke 環 $\boldsymbol{H_k}$ とは，$\mathbb{C}$ 上の結合的代数で以下を満たす唯一のものである：

(H1) $\boldsymbol{H_k}$ は部分代数として，対称代数 $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ および群代数 $\mathbb{C}W$ を含む.

(H2) 掛け算写像 $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C}W \to \boldsymbol{H_k}$ は線形同型.

(H3) $\xi \in \mathfrak{a}$ と単純ルート $\alpha \in \mathcal{B}$ に対して

$$r_\alpha \cdot \xi = r_\alpha(\xi) \cdot r_\alpha - (\boldsymbol{k}_\alpha + 2\boldsymbol{k}_{2\alpha})\alpha(\xi)$$

が成り立つ．ただし，$r_\alpha \in W$ は $\alpha = 0$ に関する鏡映で，$2\alpha \notin \mathcal{R}$ のときは $\boldsymbol{k}_{2\alpha} = 0$ とする．

実は Opdam-Cherednik 変換 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ は以下で述べる 2 つの $\boldsymbol{H_k}$ 加群 $C_0^\infty(\mathfrak{a})$，$\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の間の準同型になっている（定理 3.11）ので，いろいろな $\boldsymbol{H_k}$ 加群が理論に関わってくる．

定義 3.1. $\boldsymbol{H_k}$ の反線形反同型 $h \mapsto h^\star$ を

$$w^\star = w^{-1}\ (w \in W), \qquad \xi^\star = -w_0 \cdot w_0(\bar{\xi}) \cdot w_0\ (\xi \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$$

で定める．w_0 は W の最長元，$\bar{\cdot}$ は $\mathfrak{a}$ に関する複素共役である．複素内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つ $\boldsymbol{H_k}$ 加群がユニタリであるとは，内積について $\langle h\cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, h^\star \cdot \rangle$ $(h \in \boldsymbol{H_k})$ が成り立つことをいう．

3.2　$\boldsymbol{H_k}$ 加群 $C^\infty(\mathfrak{a})$

$\xi \in \mathfrak{a}$ に対して定まる微分差分作用素

$$T(\boldsymbol{k}, \xi) = \partial(\xi) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{\boldsymbol{k}_\alpha \alpha(\xi)}{1 - e^{-\alpha}}(1 - r_\alpha) - \rho(\boldsymbol{k})(\xi).$$

は“Cherednik 作用素”と呼ばれ，$C^\infty(\mathfrak{a})$ に作用する（[2] で導入された）．ここで，$\rho(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \boldsymbol{k}_\alpha \alpha$ である．$T(\boldsymbol{k}, \xi)$ $(\xi \in \mathfrak{a})$ はすべて可換で，$S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ の $C^\infty(\mathfrak{a})$ への作用が導かれる．さらに，これと W の $C^\infty(\mathfrak{a})$ への通常の作用は (H3) の交換関係を満

たし，$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ の $C^\infty(\mathfrak{a})$ への作用 $T(\boldsymbol{k},\cdot)$ に統合される．また，$C_0^\infty(\mathfrak{a})$，$C^\omega(\mathfrak{a})$ は $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 加群 $C^\infty(\mathfrak{a})$ の部分加群になっている．

補題 3.2 ([10, Lemma 7.8])**.** $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_1$，$h\in\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$，$f(x)\in C_0^\infty(\mathfrak{a})$，$g(x)\in C^\infty(\mathfrak{a})$ に対して，

$$\int_{\mathfrak{a}}(T(\boldsymbol{k},h)f)(x)\,\overline{g(x)}\,\delta_{\boldsymbol{k}}(x)dx=\int_{\mathfrak{a}}f(x)\,\overline{(T(\boldsymbol{k},h^\star)g)(x)}\,\delta_{\boldsymbol{k}}(x)dx$$

である．特に $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_1$ のとき $C_0^\infty(\mathfrak{a})\subset L^2(\mathfrak{a},|W|^{-1}\delta_{\boldsymbol{k}}(x)dx)$ はユニタリである．

次に，$\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ とする．$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ の中心は $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$（通常の W 作用で不変な部分代数）なので，

$$C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda):=\{f(x)\in C^\omega(\mathfrak{a})\,|\,T(\boldsymbol{k},p)f(x)=p(\lambda)f(x)\quad(p\in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W)\}$$

は $C^\omega(\mathfrak{a})$ の部分加群である．この $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 加群は，Riemann 対称空間上の不変微分作用素環の同時固有関数のなす空間が，実半単純 Lie 群の表現論において果たす役割と酷似した重要な役割を持つ．以下に $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)$ の性質を述べるが，同時に非対称超幾何関数 $G(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ の定義も与える．

命題 3.3. $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$ とする．

(1) $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)$ は W 加群として $\mathbb{C}W$ と同型.

(2) $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)^W\to\mathbb{C};f(x)\mapsto f(0)$ は線形同型．この写像による 1 の逆像は $F(\lambda,\boldsymbol{k};x)$.

(3) $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}F(\lambda,\boldsymbol{k};x)=T(\boldsymbol{k},S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))F(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ は $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)$ の唯一の既約部分加群.

(4) $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)$ は 1 次元部分空間 $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)^{-W}:=\{f\in C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)\,|\,wf=(\mathrm{sgn}\,w)f\ (w\in W)\}$ で $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 上生成される．よって $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)=T(\boldsymbol{k},S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)^{-W}$.

(5) 差積のような $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ の要素

$$\pi^-_{\boldsymbol{k}}:=\prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+\setminus\frac{1}{2}\mathcal{R}}\Big(\alpha^\vee-\Big(\boldsymbol{k}_\alpha+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_{\frac{1}{2}\alpha}\Big)\Big)$$

に対して $T(\boldsymbol{k},\pi^-_{\boldsymbol{k}})C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)^{-W}=C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)^W=\mathbb{C}F(\lambda,\boldsymbol{k};x)$.

(6) 任意の $w\in W$ に対して $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a})_{w\lambda}:=\{f\in C^\omega(\mathfrak{a})\,|\,T(\boldsymbol{k},\xi)f=w\lambda(\xi)f\ (\xi\in\mathfrak{a})\}$ は $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)$ の 1 次元部分空間．$C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a})_\lambda\to\mathbb{C};f(x)\mapsto f(0)$ は線形同型．この写像による 1 の逆像が $G(\lambda,\boldsymbol{k};x)$.

$\mathcal{R}_0=\mathcal{R}\setminus 2\mathcal{R}$，$\mathcal{R}_0^+=\mathcal{R}_0\cap\mathcal{R}^+$，$\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}=\{\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}\,|\,\lambda(\alpha^\vee)\neq 0\ (\alpha\in\mathcal{R})\}$ とする．

系 3.4. $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$，$\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$ とする．

(1) $C^\omega_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)=\sum_{w\in W}\mathbb{C}G(w\lambda,\boldsymbol{k};x)$.

(2) $C^{\omega}_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)^{-W}$ の 0 でない要素を $f(x)=\sum_{w\in W}a_wG(w\lambda,\boldsymbol{k};x)$ とすると，各 $w\in W$ に対して $a_w\neq 0$.

(3) $F(\lambda,\boldsymbol{k};x)=\sum_{w\in W}b_wG(w\lambda,\boldsymbol{k};x)$ とすると，$b_w\neq 0\Leftrightarrow w\lambda(\alpha^\vee)\neq \boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha}$ $(\forall\alpha\in\mathcal{R}_0^+)$.

(4) $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}F(\lambda,\boldsymbol{k};x)=\sum\{\mathbb{C}G(w\lambda,\boldsymbol{k};x)\,|\,w\in W,b_w\neq 0\}$.

次も後で使う．

補題 3.5. $\alpha\in\mathcal{B}$ に対して $\tau_\alpha=r_\alpha\alpha^\vee+\boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha}$ と置くと，$\xi\cdot\tau_\alpha=\tau_\alpha\cdot r_\alpha(\xi)$ $(\xi\in\mathfrak{a})$ が成り立つ．よって $G(\lambda,\boldsymbol{k})$ の特徴付けから以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}T(\boldsymbol{k},\tau_\alpha)G(\lambda,\boldsymbol{k})&=\lambda(\alpha^\vee)T(\boldsymbol{k},r_\alpha)G(\lambda,\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha})G(\lambda,\boldsymbol{k})\\&=(\lambda(\alpha^\vee)+\boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha})G(r_\alpha\lambda,\boldsymbol{k}).\end{aligned}\tag{3.1}$$

3.3 球主系列 $I_{\boldsymbol{k}}(\lambda)$

$\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ とする．1 次元の $S(\mathfrak{a})$ 加群 $\mathbb{C}v_\lambda$ を $\xi v_\lambda=\lambda(\xi)v_\lambda$ $(\xi\in\mathfrak{a})$ で定め，その誘導 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 加群として球主系列加群 $I_{\boldsymbol{k}}(\lambda)=\mathrm{Ind}^{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}}_{S(\mathfrak{a})}\mathbb{C}v_\lambda=\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}\otimes_{S(\mathfrak{a})}\mathbb{C}v_\lambda=\mathbb{C}W\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}v_\lambda$ を定める．

補題 3.6 ([10, Theorem 4.2])**.** 写像 $\langle\cdot,\cdot\rangle_W:I(\lambda)\times I(-\bar\lambda)\to\mathbb{C}$ を $\langle\sum_w a_wwv_\lambda,\sum_t b_ttv_{-\bar\lambda}\rangle_W=|W|^{-1}\sum_w a_w\bar b_w$ で定めると，$\langle h\cdot,\cdot\rangle_W=\langle\cdot,h^\star\cdot\rangle_W$ $(h\in\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}})$ が成り立つ．特に $\lambda\in\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*$ であれば，$I(\lambda)$ はこの半双線形形式によりユニタリである．

命題 3.7 ([2, 8])**.** $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$ とする．実半単純 Lie 群の表現論における Poisson 変換の類似した $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 準同型 $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\lambda):I_{\boldsymbol{k}}(\lambda)\to C^{\omega}_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)$ が

$$I_{\boldsymbol{k}}(\lambda)=\mathbb{C}W\ni\sum_w a_wwv_\lambda\mapsto\frac{1}{|W|}\sum_w a_wG(\lambda,\boldsymbol{k};w^{-1}x)\in C^{\omega}_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda).$$

で定まる．$\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\lambda)$ が同型であるためには

$$\lambda(\alpha^\vee)\neq-\boldsymbol{k}_\alpha-2\boldsymbol{k}_{2\alpha}\quad(\forall\alpha\in\mathcal{R}_0^+)\tag{3.2}$$

が必要十分．命題 3.3 (6) より $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}}(I_{\boldsymbol{k}}(\lambda),C^{\omega}_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda))$ は 1 次元である．$\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\lambda)$ はこの要素で $\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\lambda)\bigl(\sum_w wv_\lambda\bigr)=F(\boldsymbol{k},\lambda;x)$ であるものと特徴付けられる．

定義 3.8 ([12] **参照**)**.** $w\in W$ の簡約表現 $w=r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_l}$ に対して定まる補題 3.5 の τ_α の積 $\tau_{w^{-1}}:=\tau_{\alpha_l}\cdots\tau_{\alpha_1}\in\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ は，簡約表現の選び方に依らない．よって実半単純 Lie 群の表現論における（未規格化）Knapp-Stein 型繋絡作用素に類似した $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 準同型

$\tilde{\mathcal{A}}_{\boldsymbol{k}}(w,\lambda): I(\lambda)\to I(w\lambda)$ が $\sum_t a_t t v_\lambda \to \sum_t a_t t\tau_{w^{-1}} v_{w\lambda}$ で定まる．さらに

$$\lambda(\alpha^\vee)\neq \boldsymbol{k}_\alpha + 2\boldsymbol{k}_{2\alpha} \quad (\forall\alpha\in\mathcal{R}_0^+\cap -w^{-1}\mathcal{R}_0^+) \tag{3.3}$$

のとき，規格化版の $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 準同型を

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w,\lambda) = \prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+\cap -w^{-1}\mathcal{R}_0^+} (\boldsymbol{k}_\alpha + 2\boldsymbol{k}_{2\alpha} - \lambda(\alpha^\vee))^{-1}\cdot \tilde{\mathcal{A}}_{\boldsymbol{k}}(w,\lambda).$$

で定める．$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w,\lambda)\bigl(\sum_t t v_\lambda\bigr)=\sum_t t v_{w\lambda}$ に注意.

補題 3.9. $w, w_1, w_2\in W$ に対して，$w=w_1w_2$ かつ $l(w)=l(w_1)+l(w_2)$ であるとする．このとき，(w,λ) が (3.3) を満たすことは，$(w_1, w_2\lambda)$，(w_2,λ) がともに (3.3) を満たすことと同値である．このとき，$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w,\lambda)=\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w_1,w_2\lambda)\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w_2,\lambda)$ が成り立つ.

補題 3.10. $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$ とする．$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w,\lambda)$ が定義されるとき，$\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\lambda)=\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(w\lambda)\circ\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w,\lambda)$ が成り立つ.

同一視 $\mathrm{Map}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \mathbb{C}W)=\prod_{\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} I_{\boldsymbol{k}}(\lambda)$; $\varPhi\leftrightarrow(\varPhi(\lambda)v_\lambda)_{\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*}$ により，$\mathrm{Map}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \mathbb{C}W)$ を $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 加群と見なすと，$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\otimes\mathbb{C}\subset\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\otimes\mathbb{C}W\subset\mathrm{Map}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \mathbb{C}W)$ は部分加群の列になる．$\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\otimes\mathbb{C}W$ の元 $\varPhi(\lambda)$ で条件

$$\varPhi(\lambda)(\boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha}-\lambda(\alpha^\vee)r_\alpha)=\varPhi(r_\alpha\lambda)(\boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha}-\lambda(\alpha^\vee)) \quad (\forall\alpha\in\mathcal{B})$$

を満たすもの全体を $\tilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k}}$ とする．上の条件は

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(r_\alpha,\lambda)\varPhi(\lambda)=\varPhi(r_\alpha\lambda) \quad (\lambda: \text{ジェネリック},\ \forall\alpha\in\mathcal{B})$$

と同値なので，$\tilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k}}$ および $\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}:=\tilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k}}\cap\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\otimes\mathbb{C}$ も $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 加群 $\mathrm{Map}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \mathbb{C}W)$ の部分加群である．命題 3.12 で，$\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}$ が Opdam-Cherednik 変換 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ の終域の別の実現であることが示される．Opdam が [10] で定義したオリジナルの終域と実質的に同じである．$\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}$ の定義は若干複雑だが，その元 $\varPhi(\lambda)$ への $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ の作用は，値である各主系列の要素への作用という簡単なものである．つまり，終域を $\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}$ とすることにより，「$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}$ と $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}^{-1}$ は $C_0^\infty(\mathfrak{a})$ を主系列（の部分加群）の直積分で表示するもの」という意味が生じる．また，逆変換も $\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}$ を始域とした方が構成しやすく，Plancherel の定理における前ヒルベルト空間の構造も $\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}$ を通じて構成される.

3.4　$\boldsymbol{H_k}$ 加群 $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$

1 次元の自明な W 加群 $\mathbb{C}v_+$ からの誘導 $\boldsymbol{H_k}$ 加群 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{C}W}^{\boldsymbol{H_k}}\mathbb{C}v_+ = \boldsymbol{H_k}\otimes_{\mathbb{C}W}\mathbb{C}v_+ = S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}v_+$ は $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ と同一視できる．この同一視による $\boldsymbol{H_k}$ の $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ への作用を $\varpi_{\boldsymbol{k}}$ と記すと，$\phi(\lambda)\in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\varpi_{\boldsymbol{k}}(p)\phi)(\lambda) &= p(\lambda)\phi(\lambda) && (p(\lambda)\in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}))\\
(\varpi_{\boldsymbol{k}}(r_\alpha)\phi)(\lambda) &= \phi(\lambda) - \frac{\lambda(\alpha^\vee)+\boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha}}{\lambda(\alpha^\vee)}(\phi(\lambda)-\phi(r_\alpha\lambda)) && (\alpha\in\mathcal{B})
\end{aligned}
$$

となる．$\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\supset S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ であるが，上の等式を用いて $\boldsymbol{H_k}$ 作用 $\varpi_{\boldsymbol{k}}$ を $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ まで延長できる．$\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W = \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^{\varpi_{\boldsymbol{k}}(W)}$ に注意．また，古典的な Fourier 変換を用いると，$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ が $\boldsymbol{H_k}$ 加群 $\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の部分加群であることを示すことができる．

(1.2)，補題 3.2，補題 3.5 などから次を得る．

定理 3.11 ([10]). $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}} : C_0^\infty(\mathfrak{a})\to\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ は $\boldsymbol{H_k}$ 準同型.

命題 3.12. 写像

$$
\tilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k}}\ni\Phi(\lambda)=\sum_w \phi_w(\lambda)\otimes w\mapsto\phi(\lambda)=\phi_{w_0}(w_0\lambda)\in\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)
$$

は $\boldsymbol{H_k}$ 加群の同型で，逆写像 $\tilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{k}} : \mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\to\tilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{k}}$ は

$$
\tilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{k}}\phi(\lambda)=\sum_{w\in W}(\varpi_{\boldsymbol{k}}(w_0w^{-1})\phi)(w_0\lambda)\otimes w
$$

で与えられる．$\tilde{\mathcal{Q}}_{\boldsymbol{k}}$ の $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ への制限により，$\boldsymbol{H_k}$ 加群の同型 $\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}} : \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\xrightarrow{\sim}\mathcal{I}_{\boldsymbol{k}}$ が導かれる．

4　Paley-Wiener の定理

この節の目標は次を示すことである．

定理 4.1. $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_1$ とする．$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}} : C_0^\infty(\mathfrak{a})^W\to\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ が $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ の上への単射であるとき，$\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}} : C_0^\infty(\mathfrak{a})\to\mathcal{O}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ も $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ の上への単射である．

$F(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ の理論において，“シフト作用素”と呼ばれる x に関する微分（差分）作用素は，異なる $\boldsymbol{k}$ に対する $F(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ の間の関係を与えるという重要な役割を果たす．

シフト作用素の公式の 1 つを $G(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ に対するものに拡張しよう．W の元を列挙して，$w_1=1,w_2,\dots,w_m$ とする．$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 上の W 調和多項式の空間 $H_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$（[6, Ch. III] 参照）の同次元からなる基底 $\{h_1,\dots,h_m\}$ を 1 つ取り，正方行列 $P=(w_ih_j)_{1\le i,j\le m}$ を作る．$\pi=\prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+\setminus\frac{1}{2}\mathcal{R}}\alpha^\vee$ とすると $\det P=c\pi^{m/2}$ となることが知られているが，必要ならば h_1 を調整して $c=1$ とする．P の余因子行列の $1/\pi^{m/2-1}$ 倍を Q とする．Q の各成分は $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ の元になる．また，Q の第 1 列を $q_1,\dots,q_m$ とすると $Q=(\mathrm{sgn}(w_j)w_jq_i)_{1\le i,j\le m}$ である．$\mathbf{1}$ を $\mathcal{R}\setminus\frac{1}{2}\mathcal{R}$ 上 1 で $\mathcal{R}\cap\frac{1}{2}\mathcal{R}$ 上 0 である重複度関数とし，$\varDelta=\prod_{\alpha\in\mathcal{R}^+\setminus\frac{1}{2}\mathcal{R}}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})\in C^\infty(\mathfrak{a})$ とすると次が成り立つ．

命題 4.2. $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$ のとき $\boldsymbol{k}+\mathbf{1}\in\mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$ である．0 でない定数 $c_{\boldsymbol{k}}$ があって，

$$G(\lambda,\boldsymbol{k})=c_{\boldsymbol{k}}\sum_{i=1}^m h_i(\lambda)T(\boldsymbol{k},q_i)\varDelta F(\lambda,\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$$

となる．（この $c_{\boldsymbol{k}}$ は明示的に書ける．）

この命題と，[11, Theorem 2.5] による $F(\lambda,\boldsymbol{k}+\mathbf{1};x)$ の評価式から次を得る．

系 4.3. $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}\cap\mathcal{K}$，$C\subset\mathfrak{a}$ はコンパクト集合，$p\in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ とする．このとき，適当な $A>0$ と $n\in\mathbb{N}$ により

$$|p(\partial_x)G(\lambda,\boldsymbol{k};x)|\le A(1+||\lambda||)^n e^{\max_{w\in W}\Re w\lambda(x)}$$

がすべての $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ と $x\in C$ に対して成り立つ．これから特に，$\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_1$ のとき

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}\subset\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$$

が成り立つ．（定理 4.1 の仮定は不要．）

定理 4.1 の証明の概略　変数分離公式 $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})=H_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\otimes S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W$（[6, Ch. III] 参照）は，$S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ を $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ に拡げても成り立つ：

$$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)=H_W(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\otimes\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W=\mathrm{Ind}_{S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W\otimes\mathbb{C}W}^{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}}\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W.$$

よって定理の仮定のもと，$S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W\otimes\mathbb{C}W$ 準同型 $\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{-1}:\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W\to C_0^\infty(\mathfrak{a})^W$ から $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 準同型 $\mathcal{J}_{\boldsymbol{k}}:\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)\to C_0^\infty(\mathfrak{a})$ が得られる．明らかに $\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}\circ\mathcal{J}_{\boldsymbol{k}}=\mathrm{id}$ である．$\mathcal{J}_{\boldsymbol{k}}\circ\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}=\mathrm{id}$ の証明には，Opdam による $\boldsymbol{k}\in\mathcal{K}_+$ のときの議論（[10] の Lemma 9.3, Corollary 9.4，Lemma 9.5）が適用できる．$\square$

5　内積の構成

ここから先は，§2 の **(拡張 2)** の設定下で議論する．ただし，結果が大きく変わる $r>1$ かつ $\boldsymbol{k}_m=0$ の場合は除外する．

まず，λ が $D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_r)=D_{\boldsymbol{k}}(\mathcal{B})$ に属するとする．このとき [7, §3] により $F(\lambda,\boldsymbol{k};x)\in L^2(\mathfrak{a},|W|^{-1}\delta_{\boldsymbol{k}}(x)dx)$ である．これは，$F(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ を $\mathfrak{a}$ の正チェンバー $\mathfrak{a}_+$ の無限遠点における漸近展開の先頭指数に関する Casselman と Miličić の条件（[1, Theorem 7.5]）から分かる．$C^{\omega}_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda)$ の各元 $f(x)$ も $\mathfrak{a}_+$ の無限遠点で漸近展開できるが，(1) $f(x)\in L^2(\mathfrak{a},|W|^{-1}\delta_{\boldsymbol{k}}(x)dx)$ であることは，(2) 各 $w\in W$ について $(wf)(x)$ の漸近展開の先頭指数が Casselman と Miličić の条件を満たすことと同値である．一方，(2) の条件は $T(\boldsymbol{k},\cdot)$ の作用で不変であることが容易に分かるので，

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}F(\lambda,\boldsymbol{k};x)\subset L^2(\mathfrak{a},|W|^{-1}\delta_{\boldsymbol{k}}(x)dx)$$

が成り立つ．つまり，$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}F(\lambda,\boldsymbol{k};x)$ は既約ユニタリ $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 加群である．

次に $i=0,\dots,r$ とし，$W(\Theta_i)$ は $\{r_\alpha\,|\,\alpha\in\Theta_i\}$ で生成される W の部分群とする．また，この部分群の最長元を $w_0(\Theta_i)$ とする．$\lambda\in D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)$，$\mu\in\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i}$ とすると，$-\lambda+\mu$ と $w_0(\Theta_i)$ は (3.3) の条件を満たし，$\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w_0(\Theta_i),-\lambda+\mu)$ が定まる．

$$w_0(\Theta_i)(-\lambda+\mu)=\lambda+\mu=-\overline{(-\lambda+\mu)}$$

なので，補題 3.6 を用いて $I_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)$ 上に半双線形形式

$$\langle\cdot,\cdot\rangle=\langle\,\cdot,\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w_0(\Theta_i),\,-\lambda+\mu)\cdot\,\rangle_W$$

が定まり，$\langle h\cdot,\cdot\rangle=\langle\cdot,h^{\star}\cdot\rangle$ $(h\in\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}})$ という $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 不変性を持つ．

$$\Big\langle\sum_w wv_{-\lambda+\mu},\,\sum_w wv_{-\lambda+\mu}\Big\rangle=1 \tag{5.1}$$

に注意．

$\mathfrak{a}^*_{\Theta_i,\mathrm{reg}}=\{(\lambda_{i+1},\dots,\lambda_r)\,|\,\lambda_p,\lambda_p\pm\lambda_q\neq 0\}$ とする．

命題 5.1. $\lambda\in D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)$，$\mu\in\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i,\mathrm{reg}}$ とする．

(1) $\lambda+\mu\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C},\mathrm{reg}}$.

(2) $\lambda+\mu$ は (3.2) の条件を満たし，$\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\lambda+\mu):I_{\boldsymbol{k}}(\lambda+\mu)\to C^{\omega}_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a},\lambda+\mu)$ は同型．よって $I_{\boldsymbol{k}}(\lambda+\mu)$ は唯一の既約部分加群を持ち，$I_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)$ は唯一の既約商加群を持つ．

(3) $\Theta_i^{\lambda}:=\{\alpha\in\mathcal{R}_0\,|\,(\lambda+\mu)(\alpha^{\vee})=\boldsymbol{k}_{\alpha}+2\boldsymbol{k}_{2\alpha}\}$ は μ に依らず，Θ_i の部分集合になる．$\lambda+\mu$ に対する補題 3.4 (3) の条件を満たす w の全体は $W^{\Theta_i^{\lambda}}w_0(\Theta_i)$ である．ただし，$W^{\Theta_i^{\lambda}}=\{w\in W\,|\,w\,\Theta_i^{\lambda}\subset\mathcal{R}^+\}$ とする．よって補題 3.4 (4) より

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}F(\lambda+\mu,\boldsymbol{k};x)=\sum\{\mathbb{C}G(w(\lambda+\mu),\boldsymbol{k};x)\,|\,w\in W^{\Theta_i^{\lambda}}w_0(\Theta_i)\}.$$

(4) $-\lambda+\mu\in W^{\Theta_i^{\lambda}}w_0(\lambda+\mu)$ より，$\operatorname{Im}\mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)=\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}F(\lambda+\mu,\boldsymbol{k};x)$ は既約．よって，補題 3.10 より

$$\begin{aligned}J_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(-\lambda+\mu)&:=I_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)\ \big/\ \operatorname{Ker}\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w_0(\Theta_i),-\lambda+\mu)\\&\simeq\operatorname{Im}\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w_0(\Theta_i),-\lambda+\mu)\simeq\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}F(\lambda+\mu,\boldsymbol{k};x)\end{aligned}$$

も既約．

(5) $I_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)$ 上の半双線形形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は対称で半正定値．$J_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(-\lambda+\mu)$ 上の内積を誘導し，$J_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(-\lambda+\mu)$ はユニタリ $\boldsymbol{H}_k$ 加群になる．

証明　(5) の半正定値性以外は難しくない．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $J_{k,\Theta_i}(-\lambda+\mu)$ 上の非退化 $\boldsymbol{H}_k$ 不変半双線形形式を誘導する．そのような双半線形形式は高々 1 次元しかないので，(5.1) より $J_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(-\lambda+\mu)$ がユニタリ化可能であることをいえばよい．$i=r$ のときは，本節の最初で証明済みである．$i<r$ のときは $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ の Levi 部分環 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)=S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})\otimes\mathbb{C}W(\Theta_i)$ の主系列 $I'_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)$ の唯一の既約商加群 $J'_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(-\lambda+\mu)$ はユニタリ化可能である ($i=r$ の場合の議論が適用できる)．このとき，

$$I_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)=\operatorname{Ind}^{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}}_{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)}I'_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)\to\operatorname{Ind}^{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}}_{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)}J'_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(-\lambda+\mu)\to 0$$

が完全で，2 番目の加群がユニタリ化可能になる．$I_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)$ の極大部分加群は 1 つしかないので，2 番目の加群は既約で，$J_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(-\lambda+\mu)$ と同型になる．　□

6　Plancherel の定理と逆変換公式

前節の設定を引き継ぐ．

補題 6.1. $J_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(-\lambda+\mu)=\lambda+\mu\in D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i,\mathrm{reg}}$ とする．

(1) $I_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)/\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w_0(\Theta_i),-\lambda+\mu)$ の基底として

$$\left\{ v^{w}_{-\lambda+\mu} := \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+\cap -w^{-1}\mathcal{R}_0} ((-\lambda+\mu)(\alpha^\vee)+\boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha}) \right)^{-1} \tau_w v_{-\lambda+\mu} \,\middle|\, w\in W^{\Theta_i^\lambda} \right\}$$

が取れる．

(2) 各 $w\in W^{\Theta_i^\lambda}$ について，

$$\begin{aligned}
(6.1)\quad & \mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w_0(\Theta_i),-\lambda+\mu)v^{w}_{-\lambda+\mu} \\
&= \left(\prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+\cap -w_0(\Theta_i)^{-1}w^{-1}\mathcal{R}_0} ((\lambda+\mu)(\alpha^\vee)+\boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha}) \right)^{-1} \tau_{ww_0(\Theta_i)} v_{\lambda+\mu} \\
&=: v^{ww_0(\Theta_i)}_{\lambda+\mu},
\end{aligned}$$

$$(6.2)\quad \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\lambda+\mu)v^{ww_0(\Theta_i)}_{\lambda+\mu} = |W|^{-1}G(ww_0(\lambda+\mu),\boldsymbol{k};x).$$

(3) $\phi\in\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ に対して

$$\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(\phi)(\lambda+\mu) = \sum_{w\in W^{\Theta_i^\lambda}} \phi(ww_0(\Theta_i)(\lambda+\mu)) \prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+} \Big(1-\frac{\boldsymbol{k}_\alpha+2\boldsymbol{k}_{2\alpha}}{ww_0(\Theta_i)(\lambda+\mu)(\alpha^\vee)}\Big) v^{ww_0(\Theta_i)}_{\lambda+\mu}.$$

(4) $\mathcal{B}_i=\{\beta_r-\beta_{r-1},\dots,\beta_{i+2}-\beta_{i+1},\beta_{i+1}\}$ と置くと，W における $\mathfrak{a}_{\Theta_i}$ の正規加群 $N_W(\mathfrak{a}_{\Theta_i})$ は $\{r_\alpha \,|\, \alpha\in\mathcal{B}_i\}$ で生成される Weyl 群であり

$$\mathfrak{a}^*_{\Theta_i,+} := \{(\lambda_{i+1},\dots,\lambda_r)\,|\,0\le\lambda_{i+1}\le\cdots\le\lambda_r\}$$

は $N_W(\mathfrak{a}_{\Theta_i}) \curvearrowright \mathfrak{a}^*_{\Theta_i}$ の正チェンバーである．さらに，

$$`W^{\Theta_i^\lambda} := \{w\in W^{\Theta_i^\lambda}\,|\,w\mathcal{B}_i\subset\mathcal{R}^+\}$$

に対して分解 $W^{\Theta_i^\lambda} = `W^{\Theta_i^\lambda}\times N_W(\mathfrak{a}_{\Theta_i})$ が成り立つ．

$\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)=\operatorname{Ind}_{S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})^W\otimes\mathbb{C}W}^{\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}}\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)^W$ より，(2.3) を延長する $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ 上の $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 不変内積は一意的である．

定理 6.2 (Plancherel **の定理**). $\mathcal{PW}_{\boldsymbol{k}}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ は内積

$$\begin{aligned}
\langle\phi,\psi\rangle &= \sum_{i=0}^{r}\int_{D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i,\mathrm{reg}}} \langle \mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(\phi)(-\lambda+\mu), \overbrace{\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(\psi)(-\lambda+\mu)}^{\in I_{\boldsymbol{k}}(-\lambda+\mu)}\rangle d\nu_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(\lambda+\mu) \\
&= \sum_{i=0}^{r} 2^{r-i}(r-i)! \int_{D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i,+}} \langle \mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(\phi)(-\lambda+\mu), \mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(\psi)(-\lambda+\mu)\rangle d\nu_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(\lambda+\mu)
\end{aligned}$$

により $C_0^\infty(\mathfrak{a}) \subset L^2(\mathfrak{a}, \delta_{\boldsymbol{k}}(x)dx)$ と同型な前ヒルベルト空間になる．

逆変換の方も同様に，(2.4) を延長する $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ 準同型 $\mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*) \to C_0^\infty(\mathfrak{a})$ は一意的である．

定理 6.3 (逆変換公式). $\phi \in \mathcal{PW}(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\boldsymbol{k}}^{-1}\phi(x) &= \sum_{i=0}^{r} \int_{D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i,\mathrm{reg}}} \mathcal{P}_{\boldsymbol{k}}(\lambda+\mu)\underbrace{\big(\mathcal{Q}_{\boldsymbol{k}}(\phi)(\lambda+\mu)\big)}_{\in \operatorname{Im}\mathcal{A}_{\boldsymbol{k}}(w_0(\Theta_i),-\lambda+\mu)} d\nu_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(\lambda+\mu) \\
&= \sum_{i=0}^{r} \int_{D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i,+}} \frac{2^{r-i}(r-i)!}{|W|} \sum_{w\in W^{\Theta_i^\lambda} w_0(\Theta_i)} \Big\{ \phi(w(\lambda+\mu))\, G(w(\lambda+\mu),\boldsymbol{k},x) \\
&\qquad\qquad \cdot \prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+} \Big(1 - \frac{\boldsymbol{k}_\alpha + 2\boldsymbol{k}_{2\alpha}}{w(\lambda+\mu)(\alpha^\vee)}\Big)\Big\} d\nu_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(\lambda+\mu) \\
&= \sum_{i=0}^{r} \int_{D_{\boldsymbol{k}}(\Theta_i)+\sqrt{-1}\mathfrak{a}^*_{\Theta_i}} \frac{2^{r-i}(r-i)!}{|W|} \sum_{w\in {}'W^{\Theta_i^\lambda} w_0(\Theta_i)} \Big\{ \phi(w(\lambda+\mu))\, G(w(\lambda+\mu),\boldsymbol{k},x) \\
&\qquad\qquad \cdot \prod_{\alpha\in\mathcal{R}_0^+} \Big(1 - \frac{\boldsymbol{k}_\alpha + 2\boldsymbol{k}_{2\alpha}}{w(\lambda+\mu)(\alpha^\vee)}\Big)\Big\} d\nu_{\boldsymbol{k},\Theta_i}(\lambda+\mu).
\end{aligned}$$

参考文献

[1] W. Casselman and D. Miličić, *Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations*, Duke. Math. **49** (1982), 869–930.

[2] I. Cherednik, *A unification of Knizhnik-Zamalodchikov and Dunkl operators via affine Hecke algebras*, Invent. Math. **106** (1991), no. 2, 411–432.

[3] I. Cherednik, *Inverse Harish-Chandra transform and difference operators*, Internat. Math. Res. Notices **1997** (1997), 733–750.

[4] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Root systems and hypergeometric functions I*, Comp. Math. **64** (1987), 329–352.

[5] G. J. Heckman and E. M. Opdam, *Jacobi polynomials and hypergeometric functions associated with root systems*, in Chapter 8 of T. H. Koornwinder and J. V. Stokman (Eds.), *Encyclopedia of Special Functions II: Multivariable Special Functions*, Cambridge University Press, (2020), 217–257.

[6] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Amer. Math. Soc., 2000, c1984.

[7] T. Honda, H. Oda and N. Shimeno, *Inversion formula for the hypergeometric Fourier transform associated with a root system of type BC*, J. Math. Soc. Japan Advance Publication 1–37, December, 2022. https://doi.org/10.2969/jmsj/88728872.

[8] A. Matsuo, *Integrable connections related to zonal spherical functions*, Invent. Math. **110** (1992), 95–121.

[9] H. Oda, *Inversion formula for the Opdam-Cherednik transform associated with a root system of type BC*, in preparation.

[10] E. M. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. **175** (1995), 75–121.

[11] E. M. Opdam, *Cuspidal hypergeometric functions*, Methods Appl. Anal. **6** (1999), 67–80.

[12] E. M. Opdam, *Lectures on Dunkl operators*, Part I of *Lecture notes on Dunkl operators for real and complex reflection groups*, Math. Soc. Japan Mem. 8, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2000.