不連続群の研究における粗幾何学の応用

By

長屋拓暁 *, 小川健翔 **, 奥田隆幸 ***

Abstract

G を局所コンパクトハウスドルフ群とする. H と L を G の閉部分群とする. G の離散部分群 Γ が等質空間 G/H に真性不連続にするかどうかの判定は, H が非コンパクトの場合に簡単ではない. 小林俊行氏の論文では, 特に G が実簡約線型リー群の場合に, カルタン射影 KAK 分解に基づく簡潔な判定法を提示している. この判定法は, 非リーマン等質空間上の不連続群の研究において重要な役割を果たしている. この講演では, 粗幾何学の観点からこの判定法を一般化したものを紹介する.

§1. 過去の研究

この節では, G を局所コンパクトハウスドルフ群とし, H を G の閉部分群とする.

Definition 1.1 (不連続群)**.** 離散部分群 $\Gamma \subset G$ を考える. $\Gamma \curvearrowright G/H$ の作用が真性不連続であるとは, G の任意のコンパクト部分集合 C に対し,

$$\#\{g \in G \mid gC \cap C \neq \emptyset\} < \infty$$

となることをいう. このとき, Γ を G/H の不連続群と呼ぶ.

Definition 1.2 (proper 作用)**.** 部分群 $L \subset G$ を考える. $L \curvearrowright G/H$ の作用が proper であるとは, G の任意のコンパクト部分集合 C に対し, 集合

$$\{g \in G \mid gC \cap C \neq \emptyset\}$$

がコンパクトになることをいう. このとき, $L \pitchfork_G H$ と表すことにする.

2020 Mathematics Subject Classification(s): Primary 57S30; Secondary 51F30, 22E40, 22F30, 53C35, 53C23.
Key Words: 不連続群, 粗幾何学, 等質空間論, proper 作用
*m222406@hiroshima-u.ac.jp
**knt-ogawa@hiroshima-u.ac.jp
***okudatak@hiroshima-u.ac.jp

不連続群の研究において proper な作用を見つけることは次の命題より重要なことである.

Proposition 1.3. 部分群 $L \subset G$ を考える. $L \pitchfork_G H$ が成り立つとき, 任意の離散部分群 $\Gamma \subset L$ について Γ は G/H の不連続群になる.

定義から $L \pitchfork_G H$ は以下のような群論的な命題に言い換えられる.

Proposition 1.4. $L \pitchfork_G H$ は以下と同値である.
"任意のコンパクト部分集合 $C \subset G$ に対し, $|L \cap CHC^{-1}| < \infty$."

また G が実簡約線形リー群の場合, 小林氏が以下の距離空間的な命題に言い換えた.

Theorem 1.5 (T. Kobayashi [1, 2])**.** G を連結な複素化を持つ実簡約線形リー群, $\mathfrak{g}$ を G のリー代数, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の最大可換分裂部分代数, $\mathfrak{a}_+$ をその閉 *weyl chamber* とする. また, $\mu\colon G \to \mathfrak{a}_+$ をカルタン射影とする. このとき $L \pitchfork_G H$ は, 全ての $r > 0$ に対し $\mu(L) \cap N(r; \mu(H))$ が有界であることと同値である.
（ここで, $N(r;\mu(H)) := \{v \in \mathfrak{a}_+ \mid \exists h \in H \ \text{ s.t. } \ d(\mu(h), v) \le r\}$ と定める.）

今回の Main Theorem は $L \pitchfork_G H$ を粗幾何学の視点を用いて以下のように一般化したものである.

Theorem 1.6 (N-Ogawa-Okuda)**.** $\mu\colon (G, \mathcal{E}^{\mathrm{LR}}) \to (X, \mathcal{E})$ が *coarse* 同値であると仮定する.
このとき, $L \pitchfork_G H$ であることと $(\mu(L), \mu(H))$ が $(X, \mathcal{E})$ 上の *asmptotically disjoint* であることと同値である.

§ 2. 粗空間

粗空間は, 距離空間の一般化である. 距離空間では, 任意の部分集合 S に対して正の実数 r を使って r -近傍を考えることができる. 粗幾何学では, controlled set と呼ばれる集合 E を用いて, 任意の部分集合 S の E -近傍の概念を定義することができる.

Definition 2.1 (粗空間)**.** 集合 $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(M \times M)$ が, 以下の五つの条件を満たすとき, M 上の粗構造と呼ばれる：

1. $\Delta(M) := \{(p,p) \mid p \in M\} \subset M \times M \in \mathcal{E}$
2. 任意の $E \in \mathcal{E}$ とその部分集合 $E' \subset E$ に対して, $E' \in \mathcal{E}$
3. 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して, 集合 $E^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in E\} \in \mathcal{E}$
4. 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ に対して, $E_1 \circ E_2 \in \mathcal{E}$
   ここで, $E_1 \circ E_2 := \{(x,z) \in M \times M \mid \exists y \in M \text{ s.t. } (x,y) \in E_1 \text{ and } (y,z) \in E_2\}$
5. 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ に対して, $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{E}$

粗構造 $\mathcal{E}$ の各要素 $E \in \mathcal{E}$ のことを, M の controlled set いい, $(M, \mathcal{E})$ の組を粗空間と呼ぶ. また, 任意の controlled set$E \in \mathcal{E}$ と任意の部分集合 $S \subset M$ に対して

$$E[S] := \{t \in M \mid (t, s) \in E\}$$

と定め, これを S の E -近傍という.

以下の例は, 距離空間から構成された粗空間である.

Example 2.2 (有界粗構造)**.** (M, d) を距離空間とする.

$$\mathcal{E} := \{E \subset M \times M \mid \exists R \geq 0 \text{ s.t. } \forall (x, y) \in E, d(x, y) \leq R\}$$

と定義する. このとき $(X, \mathcal{E})$ は粗空間である.

この距離空間から誘導される粗構造は, 有界粗構造と呼ばれる.

以下の例は, 位相群から構成された粗空間である.

Example 2.3 (LR コンパクト粗構造)**.** G を位相群, $C \subset G$ をコンパクト部分集合とする.

$$E_C := \{(x, y) \in G \times G \mid \exists s, t \in C \text{ such that } x = syt^{-1}\}$$
$$\mathcal{E}^{\mathrm{LR}} := \{E \subset G \times G \mid \exists C \subset G;\ \text{a compact set s.t. } E \subset E_C\}$$

と定義する.

このとき, $(G, \mathcal{E}^{\mathrm{LR}})$ は粗空間である.

Definition 2.4 (bounded set)**.** $(M, \mathcal{E}_X)$ を粗構造とする. $B \subset X$ が bounded set であるとは, $B \times B \in \mathcal{E}$ が成り立つことである.

実際に距離空間に有界粗構造を入れたとき, 距離空間としての有界集合と粗空間としての bounded set が一致する.

Definition 2.5 (coarse map)**.** $(X, \mathcal{E}_X)$ と $(Y, \mathcal{E}_Y)$ を粗構造とし, 写像 $f\colon X \to Y$ を考える.

- f が proper であるとは, Y の任意の bounded set$B \subset Y$ に対して, $f^{-1}(B) \subset X$ も bounded になることをいう.
- f が bornologous であるとは, 任意の $E \in \mathcal{E}_X$ に対して, $(f \times f)(E) \in \mathcal{E}_Y$ である場合を指す.
- f が coarse であるとは, proper かつ bornologous でもある場合を指す.

Definition 2.6 (粗空間の圏)**.** 粗空間の圏 **Coarse** を対象が粗空間, 射が coarse map によって定まる圏とする.

上の定義は coarse 写像が合成で閉じていることや, 恒等写像が coarse 写像であることから well-defined である.

Definition 2.7 (close)**.** $(X, \mathcal{E})$ を粗構造, S を集合とする. 二つの写像 $f, g\colon S \to X$ が close とは, $\{(f(s), g(s)) \mid s \in S\} \in \mathcal{E}$ である場合を指す.

Proposition 2.8. *close* という関係は, $\mathrm{Map}(S, X)$ 上の同値関係を定義する. さらに, 以下の性質が成立する：

- $p_1, p_2\colon S \to X$ が *close* のとき, 任意の $q\colon S' \to S$ に対して, $p_1 \circ q$ と $p_2 \circ q$ もまた *close* である.
- $S = S_1 \cup S_2$ とする. $p_1, p_2\colon S \to X$ が *close* でかつそれらの S_1 および S_2 への制限もまた互いに *close* の場合, p_1 と p_2 は S 上で *close* である.

上記の命題から以下のような圏を定義できる.

Definition 2.9 (粗空間の圏の close による商圏)**.** **Coarse/close** を対象が粗空間, 射が coarse map を close で割った同値類によって定まる圏とする.

Definition 2.10 (coarse 同値)**.** $(X, \mathcal{E}_X)$ および $(Y, \mathcal{E}_Y)$ を粗構造とする. X と Y が coarse 同値であるとは, coarse map$f\colon X \to Y$ および $g\colon Y \to X$ が存在し, $g \circ f$ が id_X と close かつ, $f \circ g$ が id_Y と close である場合を指す.

coarse 同値は **Coarse/close** における同型射になる.

Example 2.11. 以下の例は coarse 同値である.

- $\iota\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}(n \mapsto n)$ と $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}(a \mapsto \lfloor a \rfloor)$ は $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_b)$ と $(\mathbb{Z}, \mathcal{E}_b)$ に coarse 同値を与える.
- $\varphi\colon (\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{O}(2)) \to \mathbb{R}_{\geq 0}((v, A) \mapsto \|v\|)$ と $\psi\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{O}(2)(a \mapsto ((a, 0)^T, I_2))$ は $(\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{O}(2), \mathcal{E}^{\mathrm{LR}})$ と $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mathcal{E}_b)$ の間に coarse 同値を与える.

以下の定理は, 粗幾何学の観点から定理 1.5 を捉えたものである. この証明の重要な部分は [3] をもとにしている.

Theorem 2.12 (N-Ogawa-Okuda)**.** カルタン射影 $\mu\colon (G, \mathcal{E}^{\mathrm{LR}}) \to (\mathfrak{a}_+, \mathcal{E}_b)$ は *coarse* 同値である.

§ 3. 主定理

Definition 3.1 (asymptotically disjoint)**.** $(M, \mathcal{E})$ を粗空間とし, $L, H \subset M$ とする.

組 (L, H) は, 全ての $E \in \mathcal{E}$ に対して, $E[L] \cap E[H]$ が bounded set である場合, asymptotically disjoint と呼ぶ.

G を局所的にコンパクトなハウスドルフ非コンパクト群とする．H と L を G の閉部分群とする．

Lemma 3.2. $L \pitchfork_G H$ は組 (L, H) が *asymptotically disjoint* であることと同値である．

以下の定理の証明は 4 節で紹介する．

Theorem 3.3. *asymptotically disjoint* は *coarse* 同値によって保たれる．

主定理 1.6 は定理 3.3 の系として導かれる．

§ 4.　粗空間の close による商圏から FCUL への関手

この章では粗空間の close による商圏から 有限完備上半束の圏 **FCUL** への関手を構成する．この関手を用いると定理 3.3 を容易に示すことができる．

Definition 4.1. $(P, \leq)$ を前順序集合とする．$(P, \leq)$ が有限完備上半束であるとは, 任意の有限部分集合 $S \subset P$ に対して, S の上限が P に属する．

Proposition 4.2. $(P, \leq)$ が有限完備上半束であるとき, P は最小限を持つ．

Definition 4.3 (有限完備上半束の圏)**.** 有限完備上半束の圏 **FCUL** を対象を有限完備上半束, 射を有限上限と順序を保つ写像によって定める．

Definition 4.4. $(M, \mathcal{E})$ を粗空間とする．

$$\mathcal{P}_{\mathrm{FB}}(M) := \{\cup_i B_i \mid \{B_i\}_i; \text{bounded set の有限集合族}\}$$

と定める．

Proposition 4.5. $(M, \mathcal{E})$ を粗空間とする．$\mathcal{P}(M)$ 上に関係 $\prec_{\mathcal{E}}$ を

$$C_1 \prec_{\mathcal{E}} C_2 \ :\Leftrightarrow \ \exists E \in \mathcal{E} \ \exists B \in \mathcal{P}_{\mathrm{FB}}(M) \ \ s.t. \ C_1 \subset E(C_2) \cup B$$

によって定める．このとき, $(\mathcal{P}(M), \prec_{\mathcal{E}})$ は前順序になる．また $\mathcal{P}(M)$ 上に関係 $\sim_{\mathcal{E}}$ を

$$C_1 \sim_{\mathcal{E}} C_2 \ :\Leftrightarrow \ C_1 \prec_{\mathcal{E}} C_2 \text{かつ} \ C_2 \prec_{\mathcal{E}} C_1$$

によって定める．このとき, $\sim_{\mathcal{E}}$ は同値関係になる．さらに, $\mathcal{P}(M)/\sim_{\mathcal{E}}$ 上にも $\prec_{\mathcal{E}}$ は *well-defined* に定まる．

Corollary 4.6. $(M, \mathcal{E})$ を粗空間とする．$\alpha, \beta \in \mathcal{P}(M)/\sim_{\mathcal{E}}$ について次はそれぞれ同値である．

- 任意の $C_\alpha \in \alpha, C_\beta \in \beta$ について $C_\alpha \prec_{\mathcal{E}} C_\beta$ となる．
- ある $C_\alpha \in \alpha, C_\beta \in \beta$ が存在して $C_\alpha \prec_{\mathcal{E}} C_\beta$ となる．
- 任意の $C_\alpha \in \alpha$ において $C_\beta \in \beta$ が存在して $C_\alpha \prec_{\mathcal{E}} C_\beta$ となる．

Proposition 4.7. $(M, \mathcal{E})$ を粗空間とする．$(\mathcal{P}(M)/\sim_{\mathcal{E}}, \prec_{\mathcal{E}})$ は有限完備上半束となる．さらに $\mathcal{P}_{\mathrm{FB}}(M) = \emptyset$ となる．

Theorem 4.8. M, N を粗空間とする．$f\colon M \to N$ に対して，$\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N) \ \ (S \mapsto f(S))$$

と定める．このとき以下の *3* つの命題が成り立つ．

1. $f\colon M \to N$ が *bornologous* であるとき，$\tilde{f}$ は **FCSL** 上の射である．
2. $f\colon M \to N$ が *coarse* であるとき，$\tilde{f}^{-1}([\emptyset]) = \{[\emptyset]\}$ が成り立つ．
3. $f_1, f_2\colon M \to N$ が *bornologous* で *close* であるとき，$\tilde{f_1} = \tilde{f_2}$ が成り立つ．

実はこの定理から定理 3.3 は容易に示される．

Proof of Theorem 3.3. coarse 写像 $f\colon M \to N, g\colon N \to M$ が M と N の間に coarse 同値を与えるとし，$L, H \subset M$ をとる．組 $(f(L), f(H))$ が asymptotically disjoint を仮定し，(L, H) が asymptotically disjoint となることを示す．このとき任意の $E \in \mathcal{E}_M$ に対して

$$f(L \cap E(H)) \subset f(L) \cap (f \times f)(E)(f(H))$$

が成り立つ．$f(L) \cap (f \times f)(E)(f(H))$ が bounded のとき，$f(L) \cap (f \times f)(E)(f(H))$ の同値類は $[\emptyset]$ となる．定理 4.8 の 2 から $L \cap E(H)$ の同値類は $[\emptyset]$ となり bounded となる．反対に組 (L, H) が asymptotically disjoint とする．任意の $F \in \mathcal{E}_N$ に対して

$$g(f(L) \cap F(f(H))) \subset g \circ f(L) \cap (g \times g)(F)(g \circ f(H))$$

が成り立つ．定理 4.8 の 3 から $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \widetilde{g \circ f} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(M)}, \tilde{f} \circ \tilde{g} = \widetilde{f \circ g} = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(N)}$ が成り立つので，$g \circ f(L) \cap (g \times g)(F)(g \circ f(H))$ の同値類と $L \cap (g \times g)(F)(H)$ の同値類は等しい．このことから同様に $f(L) \cap F(f(H))$ が bounded であることを示すことができる． □

Corollary 4.9. $F\colon$ **Coarse**/close $\to$ **FCUL** を対象 M を $\mathcal{P}(M)$ へ，射 $f\colon M \to N$ を $\tilde{f}\colon \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$ へうつすものと定めると関手になる．

References

[1] Toshiyuki Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285 (1989), no. 2, 249–263. MR 1016093

[2] Toshiyuki Kobayashi, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory 6 (1996), no. 2, 147–163. MR 1424629

[3] Kento Ogawa and Takayuki Okuda, *A proof of Kobayashi's properness criterion from a viewpoint of metric geometry*, arXiv preprint arXiv:2304.14101(2023)