複雑形状とデータ解析の一提案 (数学教育への応用)

A proposal for complex geometry and data analysis

Application to mathematics education

東京国際工科専門職大学・工科学部情報工学科　　児玉賢史 *1
Satoshi KODAMA
International Professional University of Technology in Tokyo

Abstract

Handling processing speed and computational calculation errors is crucial for engineering and real-world problem solving. Therefore, when using computers, it is frequently impossible to focus on mathematical solutions. Thus, we investigated how students solved a mathematical problem using an example of the Cramer's rule solution learned during first-year linear algebra classes. Note that this is a verification process, and the results will be published later.

1　目的

社会問題を解決するために数学的知識を身に着けることは必要不可欠である。すなわち、大学教育において数学教育は必須であると言える。しかしながら、数学を純粋に学ぶことや研究することと異なり、工学に応用するためには、利用法を伝える必要があり、また、必要に応じてアルゴリズムの作成やプログラムとして実装する能力も求められる。

そこで、多くの大学でカリキュラムに入っており、計算機に比較的適用しやすい線形代数において、数学の利用法や応用法を伝えることにより、プログラミング学習を含めて、学習意欲や理解力の向上につながるか検証した。なお、現時点では、初期的な試みである為、小規模なゼミ所属の学部学生 6 名の意見を聞きながら検討を行った。

今回、お題として、任意の点が 2 次元平面上の領域に存在するか否かを求める手法について討論した。任意の座標等のデータに対して、どの領域に属するかを正確に判定することは、多くの分野において非常に重要である。例えば、シミュレーションやゲームといった分野では、接触判定に利用することが可能であり、近年の高解像度化に伴って、処理速度と精度の面で非常に注目されている [1]。また、どの領域に属するかにより判断する機械学習といった分野においても広く利用されている [2]。従って、本テーマは、上記のように利用分野が比較的分かりやすく、多分野にも応用しやすいといった特徴を持つ。さらに、計算機での可視化もしやすいことから、学習意欲の評価につながる可能性があるとして選定した。

前記のように現時点では、線形代数の学習意欲の向上とプログラミング等への応用性について、初期的な確認段階である。有効性を判断するための大規模な学習意欲や理解度の向上等に対しての調査結果については、今後、改めて検証を行いたい。

*1 〒 160-0023 東京都新宿区西新宿 1 丁目 7　E-mail: kodama.satoshi@t.iput.ac.jp

2　内外判定法

内外判定法は、オブジェクト同士の接触判定によく用いられるが、領域判定として与えられた条件にデータが属するかといった評価にも広く利用される。そのため、様々な判定方法が存在するが、ここでは主によく利用される直線との交差による Crossing Number Algorithm による判定法と角度に基づいて内外判定を行う Winding Number Algorithm について紹介する [3]。

2.1　Crossing Number Algorithm

本アルゴリズムは、図 1 のように与えられたオブジェクトを構成する各直線と判定点からの直線との交差回数により判断する。本手法は判定方法が単純であり、計算量も比較的少ないことから、高速に処理を行うことが可能である。したがって、比較的、高解像度の領域判定等にも本アルゴリズムを応用した方法が利用されている。その一方で、誤判定を生じることも多く、例えば、図 2 のように、頂点を通過する際や探索線上と重なった際には誤った判定となってしまうことがある。そのため、様々な角度からの再検証を行うといった何らかの対応が必要となる場合も多い [3, 4]。

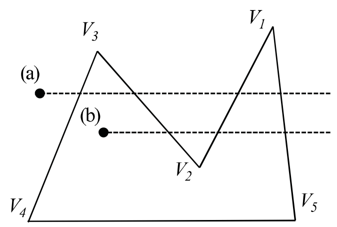

図 1. 半直線を用いた内外判定法

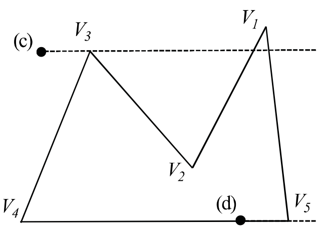

図 2. 誤判定が起こり得る例

2.2　Winding Number Algorithm

本手法は、判定点とオブジェクトを構成する各頂点との角度を利用することで判定する方法である。本アルゴリズムは、Crossing Number Algorithm と異なって誤判定が発生しにくいといった特徴があるが、その一方で、三角関数を多用することから、形状によっては負荷が大きくなるといった問題があげられる [4]。

具体的な方法は、図 3 や図 4 に示すように、判定点を中心にして各頂点を順になぞることで判定を行う。なお、符号付き角度であるため、回転の向きが反時計回りの時を正、時計回りを負とする。

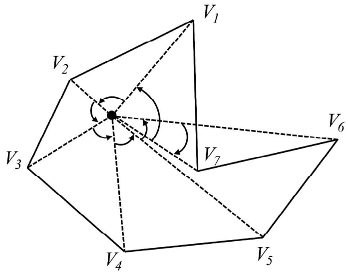

図 3. 内部にある場合

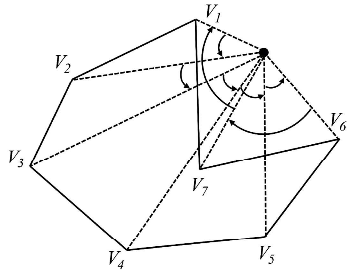

図 4. 外部にある場合

結果は、各頂点を順に 1 周するため、(1) に示す通り、内部にある場合は 2π となり、外部にある場合は 0 となる [3, 4]。

$$\begin{cases} 2\pi & (\text{内部}) \\ 0 & (\text{外部}) \end{cases} \tag{1}$$

3 問題と解法

3 点を与えて作成されたポリゴンに、与えられた任意の点が内部か外部かを判定する方法について学生らとディスカッションを行った。最初に解決案として提案されたのは、交点を基にした Crossing Number Algorithm であった。ゲームや Virtual Reality といった分野でも広く一般的に使われている方法であるため、特に教科書や助言等を与えない状態でも容易に思いついたようである。しかしながら、実際に判定するためのプログラムを作成するとなると苦労していた。特に、誤判定を考慮して、様々な角度から評価する場合に連立方程式を解こうとしている学生がいたが、参考書等を基にしたアルゴリズムを実装する際に手間取っている印象を受けた。言い換えれば、手計算に基づく手法とコンピュータを用いて解く手法との間に乖離があり、中学校で学習する単純な連立方程式を解くことの難しさと必要性に気づいたようである。なお、その後、学部 1 年次に使用する線形代数の教科書 [5] を参考に実装してもらったが、クラメルの公式を利用して解を求めていた。ただし、計算機を使用した際の誤差への配慮が乏しく、正確な解になっていないものも散見された。ゼミを通して、式 (2)、(3) のように値の変化が微小であるにもかかわらず、結果が大きく変わる場合、誤判定となりえる例を示した [6, 7] 。この例により、誤差評価の重要性を改めて認識したとの意見がでた。なお、このような微小な値の変化は、高解像度化が進んだ現在、大きな問題につながってしまうことが知られている。

$$\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 5.2 \\ 3.5x + 10.501y = \underset{\sim\sim\sim}{45.504} \end{cases} \text{の解は} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 5.2 \\ 3.5x + 10.501y = \underset{\sim\sim\sim}{45.501} \end{cases} \text{の解は} \begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases} \tag{3}$$

その後、領域判定に際して、教科書 [5] に記載されている外積を用いることで判断可能かについても議論を行った。その結果、誤差が生じる主な理由として、計算機上での除算があげられることから、領域を判断する際には、図 5 のように頂点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ に対して式 (4) のように除算を用いない判定式が有効であるとの結論に至った。この関数 (4) は分割関数とも呼ばれており、図 6 のように平面上に存在するオブジェクトに対して、内外判定を行うことが可能である [8, 9]。

$$f_{AB}(x_1, x_2) = (b_2 - a_2)(x_1 - a_1) + (a_1 - b_1)(x_2 - a_2) \tag{4}$$

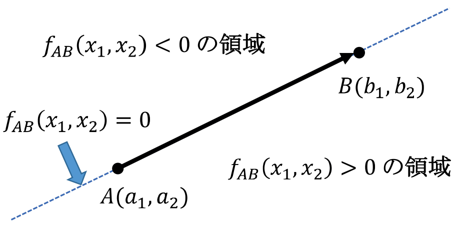

図 5. 領域を判定するための分割関数

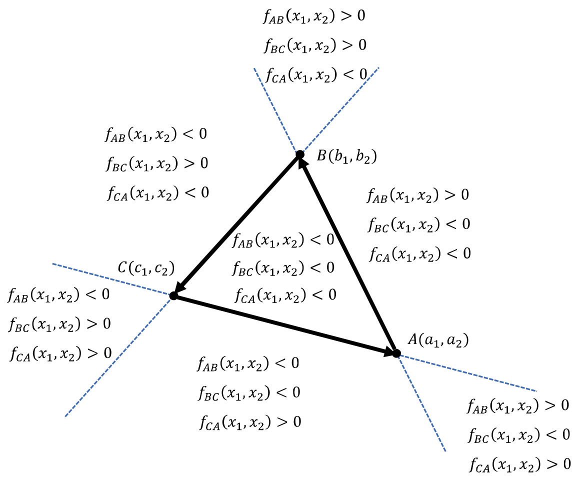

図 6. 分割関数による領域判定

4　まとめ

実社会の問題を解決するためには、数学は欠かせないが、そのままではプログラムとして実装しづらいものも多々ある。さらに、計算機を用いて問題を解く場合、処理速度の面や誤差についても評価しなければならない。また、工学への応用を考えた場合、学習効果を高めるためには、実社会での利用法も伝える必要があると考えられる。本検証ではゼミ所属の 6 名に対して、学部 1 年次に得られる知識を中心に、任意点が囲まれた領域の内部に属するか否かを判定するプログラムの実装をディスカッション形式で行った。その結果、アルゴリズムについては、解決策が挙がったが、実装に際しては苦慮していることが分かった。また、1 年次の線形代数においても、これまでの数学の一種の別解として捉えている学生もおり、導出過程にどのような意味があるのかや必要性といったことを考慮せずに学習していることが垣間見えた。一般に講義において、証明等については厳密に行うことが多いが、プログラムへの応用を意識して授業を行っていない場合もある。今回、演算誤差等による誤った判定や外積のように 2 次元形状への応用例を示すことで、新たな視点が生まれ、積極的に授業に参加できるようになるのではといった意見も得られた。

以上のことから、今回のゼミを通して、実装する際の必要性や重要性についても伝える必要があり、それによって、学習意欲や理解力が向上する可能性を見いだした。本検証は、少人数での初期的な試みであるため、マンツーマンに近い状況であったことから限定的な評価である。今後、規模を拡大して、改めて能動的な講義への参加や理解力の向上につながるか検証したい。

謝　辞

本研究に際して、ディスカッションに参加してくれた研究室所属の稲野辺 快生、川上 司、佐々木 瑠衣、西久保 拓夢、渕野 愛奈、宮下 将和に感謝の意を表します。

参　考　文　献

[1] 鈴木達也, 築地立家, 2 次元平面における物体の衝突判定のための空間分割アルゴリズム, 第 76 回全国大会講演論文集 2014(1), 93-94, 2014.

[2] R. Berwick, V. Idiot, An Idiot's guide to Support vector machines (SVMs), http://www.cs.ucf.edu/courses/cap6412/fall2009/papers/Berwick2003.pdf, 2003.

[3] 川尻 真寛,【第2回】点の多角形に対する内外判定, https://www.nttpc.co.jp/technology/number_algorithm.html. (閲覧日：2023 年 11 月 13 日)

[4] S. Kodama, Effectiveness of inside/outside determination in relation to 3D non-convex shapes using CUDA, The Imaging Science Journal, Vol. 66 (7), DOI: 10.1080/13682199.2018.1497251, 2018.

[5] 石原 繁, 浅野 重初, 理工系の基礎 線形代数, 裳華房, ISBN 978-4-7853-1093-6, 2009.

[6] 小瀬木 悠佳, 単一画像における消失点と撮影位置との関係, 東京理科大学 卒業論文, 2015.

[7] 渡部 祐太, 仮想現実上の複雑形状におけるレーザー光を用いた接触判定問題, 東京理科大学大学院 修士論文, 2016.

[8] 原 佑太朗, 児玉 賢史, 拡張現実における赤外光を用いた可変形マーカーの提案, 映像情報メディア学会技術報告, 37, 50, 53 - 56, 2013.

[9] 小瀬木 悠佳, 亀山 眞也, 児玉 賢史, 明石 重男, 空間上に配置された複数レーザー光を用いたユーザーインターフェースの提案, 第 15 回情報科学技術フォーラム, FIT2016, J-048, 3, 385-388, 2016.