区間演算を用いた充填ジュリア集合の内点保証

Iterative computation with the use of interval arithmetic

関東学院大学　　大墨礼子 [*1]
Noriko Osumi
Kanto Gakuin University

香川高等専門学校　　近藤祐史 [*2]
Yuji Kondoh
National Institute of Technology, Kagawa College

防衛大学校　　藤村雅代 [*3]
Masayo Fujimura
National Defense Academy

Abstract

The aim of this study is to find a method to draw Julia set with less error. We have tried several method to reduce errors, and in this paper, we draw filled-in Julia sets of given polynomials by computing each orbit with interval numbers of tiny widths. From the computational results, we find that the results obtained using interval arithmetic are guaranteed to be interior points. In this paper, we analyze the behavior of the computation and show that a combination of the level set method and interval arithmetic can guarantee the interior points of filled-in Julia set.

1　はじめに

充填ジュリア集合は複素力学系の研究対象となる集合であり，その性質として，不安定な集合であるため，正確な描画は難しいとされている．充填ジュリア集合の描画では多くの反復合成を行い，点の挙動を調べる必要がある．しかし，これらの描画には，ジュリア集合自身の不安定性に基づく問題もあるが，計算に浮動小数点数を用いることによって起こる問題が大きく影響している．

筆者らは，充填ジュリア集合の描画に区間演算を適用し，その有効性を調査してきた．数式処理システム上に実装されている区間演算を用いて，描画アルゴリズムのレベルセット法での描画実験を重ね，描画の際の区間の設定方法およびゼロ書き換え機能を用いた場合との結果の差異について検証している [3, 4, 5].

本研究では，レベルセット法と区間演算によって得られた計算結果の検証を行い，充填ジュリア集合の内点としての条件を満たしているかを検証する．

[*1] E-mail: osumi@kanto-gakuin.ac.jp
[*2] E-mail: kondoh@di.kagawa-nct.ac.jp
[*3] E-mail: masayo@nda.ac.jp

2 レベルセット法と区間演算を用いた充填ジュリア集合の計算

ここでは，本研究に用いた描画アルゴリズムであるレベルセット法と，数式処理システム Risa/Asir での区間演算の区間数について説明する．

2.1 レベルセット法

本研究で描画アルゴリズムとして使用するレベルセット法は，関数 f が多項式の場合，無限遠点は超吸引的不動点で，$J(f) = \partial A(\infty)$ であるという性質を使い，充填ジュリア集合を描く．既存のソフトなどで最もよく使われる方法であるが，境界が不明瞭になることを等高線でカバーしている．

描画領域の各格子点 z に対して，f による軌道 $z, f(z),\ f^2(z), \ldots$ を計算する．十分大きな正の値 $R > 2$ と十分大きな自然数 n で $|f^n(z)| > R$ となれば，$z \in A_0(\infty)$ と判定する．そうでなければ, 充填ジュリア集合の元と判定する．このような手順で, f の充填ジュリア集合を描画する．

2.2 Risa/Asir での区間演算

区間演算は，区間を数の拡張と考え，その間の四則演算を定義する．実数で与えられる真値の上限と下限を浮動小数点数とし，浮動小数点数演算により実装する場合，厳密には機械区間演算と呼ばれる [1] が，本稿では，単に区間演算と呼ぶことにする．実装に際しては，上限下限の計算時に浮動小数点数の丸めモードを変更することにより，得られた区間に真値が必ず含まれる，つまり，下限以上で上限以下の区間に真の値があることを保証する．区間演算は，精度保証付き数値計算において利用されている．

Risa/Asir では区間演算の実装がなされている [2]．Risa/Asir 上での区間演算及び区間数とは，

$$A = \{x | \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\} \qquad x, \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}$$

なる A を区間数と呼び，$A = [\underline{a}, \overline{a}]$ と表す．ただし，$\underline{a} \leq \overline{a}$ とする．$\underline{a}$, $\overline{a}$ それぞれを区間数の下限，上限と呼ぶ．また，2 つの区間数 $A = [\underline{a}, \overline{a}]$, $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ の間の演算を次のように定義する．ここで，英大文字は区間数，英小文字は実数を表す.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A + B &=& [\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}], \\ A - B &=& [\underline{a}, \overline{a}] - [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}], \\ A \ \cdot\ B &=& [\underline{a}, \overline{a}]\ \cdot\ [\underline{b}, \overline{b}] = [\min(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}), \max(\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b})], \\ A\ /\ B &=& [\underline{a}, \overline{a}]\ /\ [\underline{b}, \overline{b}] = [\underline{a}, \overline{a}]\ \cdot\ [1/\overline{b}, 1/\underline{b}] \\ &=& [\min(\underline{a}/\overline{b}, \underline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b}), \max(\underline{a}/\overline{b}, \underline{a}/\underline{b}, \overline{a}/\overline{b}, \overline{a}/\underline{b})], \\ && (\text{ただし，}\quad 0 \notin B). \end{array} \right.$$

Risa/Asir では特に設定しない場合は，区間の範囲 a, b は double の浮動小数点数となる．この区間数を用いて，描画領域の各格子点 z および c の値を区間数として演算する．

2.3 描画実験

本研究では，Risa/Asir 上で区間演算を用い，充填ジュリア集合の描画実験を行う．$f_c(z) = z^2 + c,\ (c \in \mathbb{C})$ とし, 各格子点は各軸とも -2 から 2 の範囲で $\frac{1}{150}$ の幅で刻むものとし，数式処理システム Risa/Asir を用いて計算および描画を行う．Risa/Asir の bigfloat を用い，有効桁数は 100 桁に設定した．また，Risa/Asir の区間演算では，区間数が 0 を区間の範囲に含んだ際に，値を 0 に書き換えるゼロ書き換えモードがある

が，ここでは使用しない．区間数の幅は，各格子点および c の値ともに，計算機イプシロンとし，距離の判定は区間の端点すべてが条件を満たす場合にジュリア集合であると判定する．

図 1 は，区間演算を用いて $c = -0.1226 + 0.7449i$ と $c = -0.222 + 0.71838i$ の場合のレベルセット法での描画結果である．

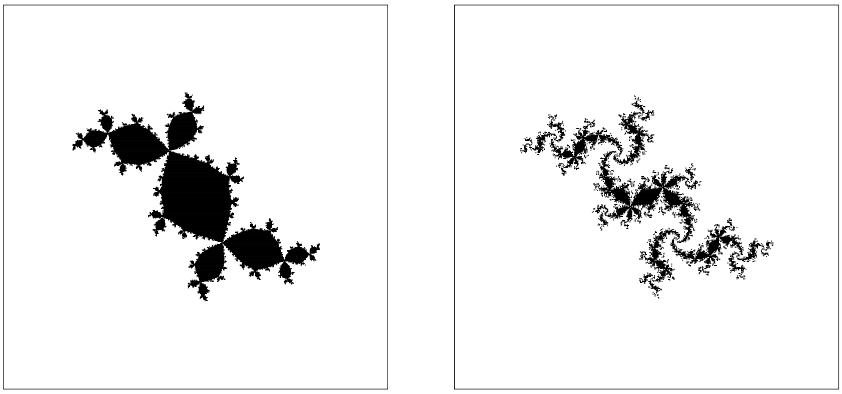

図 1: レベルセット法と区間演算による描画 (左：$c = -0.1226 + 0.7449i$, 右:$c = -0.222 + 0.71838i$)

3　区間演算によって得られた充填ジュリア集合の計算結果の検証

ここで，まず区間数の特徴を考える．前述したとおり，区間数とは，幅を持ち，その間に真の値があることを保証して計算が可能となる数である．区間数の両端は浮動小数点数であるので，設定された桁数の上限を超えた場合は丸めによる誤差が必ず発生し，計算を繰り返すことによって，誤差の累積により区間は計算前の幅よりも広がるという特徴を持つ．

次に，区間数を適用した充填ジュリア集合の計算を考える．計算開始前は，各格子点の値を区間または点でスタートし，反復を繰り返すことで，図 2 のように複素平面上を移動する．移動の際には，区間数であるため，先に述べた通り，計算を繰り返すたびに区間は少しずつ広がっていく．充填ジュリア集合の計算では，実軸，虚軸方面どちらも区間数であるため，矩形となって移動する．本研究では，1 回の反復ごとに指

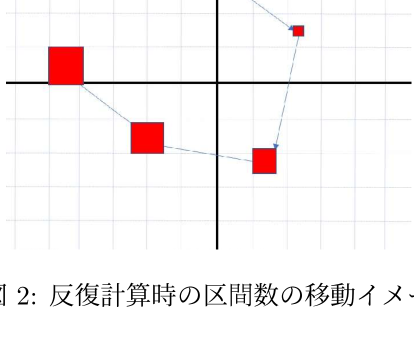

図 2: 反復計算時の区間数の移動イメージ

定の範囲内に存在するかを確認し，範囲内にある場合は反復計算を継続，範囲外となった場合は充填ジュリ

ア集合の内点ではないと判定し，その格子点に関しては計算終了となる．ここで，区間演算を用いた計算結果の意味について考える．図 3 に，各格子点を計算結果のパターンの例を示す．充填ジュリア集合の内点で

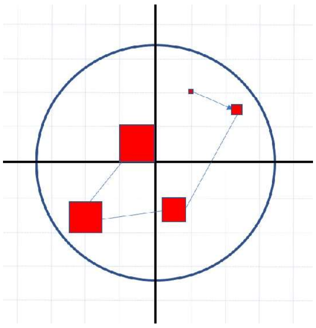

図 3: 反復計算の例 1（端点すべて範囲内)

ある，と判定されるのは図 3 のように，区間の端点すべてが条件を満たす，と判定された場合である．図 2 で示した反復計算を繰り返した場合の区間の変化を考えると，反復回数が多いと区間は膨張する．膨張したうえで，すべての端点が条件の外側または内側と判定されている．特定の反復回数において，演算した区間の端点すべてが条件を満たすと判定された場合，この区間の中に必ず真の値が含まれているため，この条件を満たした区間数の，演算の出発点であった格子点は充填ジュリア集合である（充填ジュリア集合の内点である）と言える．ただし，すべての内点を抽出できているわけではない．区間数を用いるため区間の膨張によって，本来ならば内点である点がそうではないと判定される可能性も当然含んでいる．

また，充填ジュリア集合の内点ではないと判定される場合を考える．充填ジュリア集合の内点である条件を満たさないと判定されるのは図 4 のように，区間の端点の一部でも条件を満たさない，と判定された場合である．充填ジュリア集合の内点ではない，と判定された場合でも，区間の膨張により，本来ならば充填

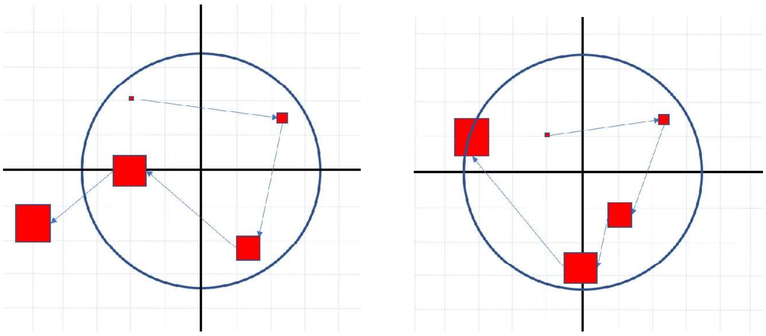

図 4: 反復計算の例 2（左：端点すべて範囲外，右：端点の一部が範囲内)

ジュリア集合の内点となり得る点が誤判定されている可能性も含む．区間が充填ジュリア集合の判定範囲を一切跨ぐことなく，矩形の端点すべてが外部と判定された場合は，外部と判定可能であるが，それ以外の場合は，一部が条件を満たすと判定された場合同様，充填ジュリア集合の内点であるか否かはレベルセット法では判定が出来ない．これらの点に関しては，DEM 法のように充填ジュリア集合の外部の点を確定していくアルゴリズムを用いて判定を行うことを検討している．

4　まとめ

本稿では，区間数を用いた充填ジュリア集合の計算において，確実に内点となる部分が計算可能であることを示した．レベルセット法では，内点の保証のみが可能であるが，DEM 法など，確実にジュリアセットではない点を計算によって確定する手法を用いれば，充填ジュリア集合ではない点も保証でき，また，レベルセット法ではどちらか判定できない場合の判定が可能になるのではないかと考えている．

また，本稿では Risa/Asir のゼロ書き換えモードを用いない計算結果について検証した．ゼロ書き換えモードを用いると，内点と判断されるものがなかったり，ごく少なく検出された場合でも，DEM 法で求めた場合によく似た図が描画できることもわかっている．今後はゼロ書き換えモードの場合で得られた点にはどのような意味があるのかも検証していく予定である．

参 考 文 献

[1] 大石進一，精度保証付き数値計算，コロナ社，2000.

[2] 近藤祐史, 区間演算と数式処理の歴史, 数式処理 Vol.12, No.1, pp.23-31, 2005.

[3] 大墨礼子, 近藤祐史, 藤村雅代, 反復計算への区間演算の適用について , 京都大学数理解析研究所講究録 2138, pp.59-63, 2019.

[4] 大墨礼子, 近藤祐史, 藤村雅代, 数式処理による反復演算について , 京都大学数理解析研究所講究録 2159, pp.11-17, 2020.

[5] 大墨礼子, 近藤祐史, 藤村雅代, 区間演算を用いた反復計算について , 京都大学数理解析研究所講究録 2255, pp.26-31, 2023.