Bezout-Hankel 行列の前処理に係る有効性の事前判定法

Pre-verification technique for validity of preprocessing Bezout-Hankel matrices

筑波大学医学医療系　讃岐勝 *1
Masaru Sanuki
Institute of Medicine, University of Tsukuba

Abstract

Computing the approximate GCD for multivariate polynomials based on Barnett's theorem, many linear equations with a common matrix part need to be solved. Focusing on the matrix component, we discuss techniques related to improving the condition number of matrices, and whether or not improvements can be made.

1　はじめに

浮動小数係数の多項式 $f(x) = c(x)\tilde{f}(x) + \Delta_f, g(x) = c(x)\tilde{g}(x) + \Delta_g \in \mathbb{F}[x]$ with $\deg(f) - \deg(g) = 1$ の近似 GCD の計算法について，Euclid の互助法を始めとして様々な方法がこれまでに提案されている：QR 法に基づく方法 [16, 9]，Sylvester 行列の零空間を計算する方法 [8]，最適化手法 [26, 27]，および，実験として興味深いもの [19] などである．この中でも Barnett らによる構造行列からなる線型方程式に帰着した方法はシンプルであり [2, 3]，特に，Bezout 行列や Bezout-Hankel 行列からなる線型方程式に帰着した方法 [11] は様々な派生研究を生んでいる [4, 18]．この中から本稿では，Bezout-Hankel 行列を用いる方法を話題にする (次数の差がこの条件を満たさないとき，$g(x) \times (x - a)$ with $a \in \mathbb{F}$ をする．本稿で対象となる安定性には影響はない．後述する例 1 を参照)．ここで，f, g からなる Bezout-Hankel 行列 $\mathcal{H}(f, g)$ とは，$g(x)/f(x)$ を無限遠点で展開した級数 $h(x) = g(x)/f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i x^{-i}$ の係数から構成される次の Hankel 行列である．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(f,g) &= \left(\begin{array}{ccc||ccc}
h_1 & \dots & h_{n-k} & h_{n-k+1} & \dots & h_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
h_{n-k} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
h_n & \dots & \dots & \dots & \dots & h_{2n-1}
\end{array}\right) \\
&= (\boldsymbol{h}_1, \dots, \boldsymbol{h}_{n-k}, \boldsymbol{h}_{n-k+1}, \dots, \boldsymbol{h}_n) = (\mathcal{H}_{n-k}(f,g), \boldsymbol{h}_{n-k+1}, \dots) \in \mathbb{F}^{n \times n}
\end{aligned}
$$

Bezout-Hankel 行列を用いた近似 GCD 計算法として Pade 近似よる方法 [17]，Barnett による方法 [11] などが知られる．余因子を求める方法，近似 GCD を求める方法と出力は異なるが，いずれも Bezout-Hankel

*1 〒 305-8575 茨城県つくば市天王台 1-1-1　E-mail: `sanuki@md.tsukuba.ac.jp`

行列の部分行列からなる線型方程式を解く．計算の安定性について評価する必要があるがこれらに関して調査した研究はほぼない．使用する Bezout-Hankel 行列の部分行列は 1 つであり，構造化された行列であるため条件数を見積もるのは困難でないと思われるが本稿で触れることにする．

2 章で Diaz-Toca らによって改良された Barnett の定理による GCD 計算法，および，条件数に関する復習とすでに知られた事実について述べる．3 章では，工夫によって Bezout-Hankel 行列の部分行列の条件数が改善される例および悪条件になる場合について数値例を用いて述べる．4 章では，条件数が改善される場合とそうでない場合について述べて Bezout 行列と Bezout-Hankel 行列のいずれを利用すればよいのか，簡単なチェック法を述べる．5 章では，本稿をまとめる．

2 Bezout-Hankel 行列による GCD 計算と条件数

本章では，Bezout 行列および Bezout-Hankel 行列を用いた Barnett による GCD 計算について紹介し，また，数値計算でたびたび利用される行列の条件数について振り返る．

2.1 Bezout 行列と用いた Barnett の方法

Bezout 行列を用いた近似 GCD は次の手順で計算を行う [11].

- 入力：$f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ with $n = \deg(f) \geq \deg(g) = n-1$
- 出力：$\gcd(f,g) = c(x) = 1 \cdot x^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i$

1. Bezout 行列 $\mathcal{B}(f,g) = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ を構成

$$\mathcal{B}(f,g) \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_k & \mathcal{B}_{n-k}(F,G) \end{array} \right)$$

   ここで，Bezout 行列の係数 $b_{i,j}$ は $\Big(f(x)g(y) - f(y)g(x)\Big)/(x-y) = \sum b_{i,j} x^{i-1} y^{j-1} \in \mathbb{F}[x,y]$ の係数から得られる．

2. 線形方程式系を解く

$$\mathcal{B}_{n-k}(f,g)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i \text{ for } 1 \leq i \leq k \tag{1}$$

3. $\mathcal{B}_{n-k}(f,g)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_i$ の解の第 1 要素 $c_{i,1}$ は GCD の x^{i-1} の係数となる。

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_i = \begin{pmatrix} c_{i,1} \\ c_{i,2} \\ \vdots \\ c_{i,n-k} \end{pmatrix}$$

2.2 Bezout-Hankel 行列

前節で述べた Bezout 行列の場合と類似の方法で，Bezout-Hankel 行列を用いた近似 GCD 計算を行うことができる [11].

- 入力：$f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ with $n = \deg(f) > \deg(g) = n-1$ and $k = \deg(\gcd(f,g))$

- 出力：$\gcd(f,g) = c(x) = 1 \cdot x^k + \sum_{i=0}^{k-1} c_i x^i$
  1. Bezout-Hankel 行列 $\mathcal{H}(f,g) = (h_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ を構成
$$\mathcal{H}(f,g) = \left(\mathcal{H}_{n-k}(f,g) \,\middle\|\, \boldsymbol{h}_{n-k+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{h}_n \right)$$
  2. 線形方程式系を解く
$$\mathcal{H}_{n-k}(f,g)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}_i \text{ for } 1 \le i \le k \tag{2}$$
  3. 解が GCD の係数：$\mathcal{H}_{n-k}(f,g)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}_{n-k+i}$ の解と関係式から近似 GCD を計算：
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}_i = \begin{pmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \\ \vdots \\ d_{i,n-k} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} c_{k-1} \\ c_{k-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & & & \\ f_{n-1} & f_n & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ f_k & \cdots & \cdots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{k,n-k} \\ d_{k-1,n-k} \\ \vdots \\ d_{1,n-k} \end{pmatrix}$$
  の $c_{i,n-k}$ から GCD の x^{i-1} の係数 c_i が構成される．

2.2.1 Pan による方法

本稿では，Pan よる Pade 近似による方法も紹介する．Barnett の定理は近似 GCD の係数そのものを求めるが，Bezout-Hankel 行列は行列は，$\frac{g}{f} \approx \frac{\tilde{g}}{\tilde{f}}$ の係数からなるため，Pade 近似による方法は余因子の情報を多く含むことに注目した方法である．

2.3 条件数

行列 $\mathcal{M} \in F^{n\times n}$ の条件数 $\mathrm{cond}(\mathcal{M})_p$ は行列の数値的安定性を示す 1 つの指標であり，線型方程式 $\mathcal{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の結果の計算精度を見積もるために利用される．

$$\mathrm{cond}(\mathcal{M})_p = ||\mathcal{M}||_p \times ||\mathcal{M}^{-1}||_p$$

行列 $\mathcal{M}$ の要素の最大値が 1 になるように正規化されているとすると，条件数が大きくなることは逆行列の要素が大きくなることを示しており，線型方程式の計算そのものが不安定になることを示すものである．行列のノルムによって値が異なるが，本稿では $p = \infty$ の無限大ノルムを利用することにする．

$$\begin{aligned} ||\mathcal{M}||_1 &= \max_j \sum_i |m_{i,j}| \\ ||\mathcal{M}||_2 &= \sup_{\boldsymbol{x}\neq 0} \frac{||\mathcal{M}\boldsymbol{x}||_2}{||\boldsymbol{x}||_2} = \max \sqrt{\lambda(\mathcal{M}^*\mathcal{M})} \text{ where } \lambda(*) \text{ は固有値} \\ ||\mathcal{M}||_\infty &= \max_i \sum_j |m_{i,j}| \end{aligned}$$

これらのノルムには次の関係がある．

$$\frac{\max\{||\mathcal{M}||_1, ||\mathcal{M}||_\infty\}}{\sqrt{n}} \leq ||\mathcal{M}||_2 \leq \sqrt{||\mathcal{M}||_1 \times ||\mathcal{M}||_\infty}$$

本稿で扱う，Bezout 行列および Bezout-Hankel 行列は $\mathcal{M} = \mathcal{H}(f,g)$ or $= \tilde{\mathcal{H}}_{n-k}(f,g)$(2.3.1 で定義) で対称であるため，$||\mathcal{M}||_1 = ||\mathcal{M}||_\infty$ より次を満たす．

$$\frac{||\mathcal{M}||_\infty}{\sqrt{n}} \leq ||\mathcal{M}||_2 \leq ||\mathcal{M}||_\infty$$

ゆえに，無限大ノルムで評価をすることは，反復法，特異値分解など 2-ノルムで線型方程式を解く場合の条件数も大雑把に評価ができるものになる．

2.3.1 部分行列の条件数の評価

式 (1) と式 (2) の行列は縦長の正則行列である．正則行列であるため，計算の効率性と正方行列の方が扱いやすいため，次の部分行列についてのみ評価する．

- $\mathcal{B}_{n-k}(f,g)$ の下 $n-k$ 行のみを取り出した部分行列 $\tilde{\mathcal{B}}_{n-k}(f,g)$ を評価する．この行列は対称行列である．
- $\mathcal{H}_{n-k}(f,g)$ の上 $n-k$ 行のみを取り出した部分行列 $\tilde{\mathcal{H}}_{n-k}(f,g)$ を評価する．この行列も対称行列である．

式 (1) と式 (2) の行列部分を上記の部分行列に交換しても計算の結果は変わらない．

3 条件数を眺める

例 1 ($\deg(f) = \deg(g)$ のとき)
近似 $GCDc_1(x) = x^2 - x + 1$ を持つ多項式 $f_1(x), g_1(x)$ について，条件数を比較する．

$$f_1(x) = c_1(x) \times (5x^3 + 4x^2 + 3x - 5) + 0.0001x, \quad g_1(x) = c12(x) \times (3x^3 - 4x + 5)$$

入力多項式の次数の差を *1* にするため多項式を乗ずる．$\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4(xf_1, g_1)) = 39.$，$\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4((x+1)f_1, g_1)) = 77.$，$\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4((x-0.2)f_1, g_1)) = 46.$，$\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4((x-0.02)f_1, g_1)) = 40.$，$\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4((x^2-1)f_1, g_1)) = 75.$，$\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4((x^3-1)f_1, g_1)) = 176.$．主係数が小さくない多項式であればそれほど条件数は変わらない． ∎

例 2 (微小主係数 GCD を持つ場合)
近似 *GCD* として $c_2(x) = 0.1x^2 - x + 1$ を持つ次の多項式の *Bezout* 行列および *Bezout-Hankel* 行列の部分行列の条件数を評価する．

$$\begin{aligned} f_2(x) &= c_2(x) \times (5x^3 + 4x^2 + 3x - 5) + 0.0001x, \\ g_2(x) &= c_2(x) \times (3x^3 - 4x + 5) - 0.0003x^2 + 0.00004 \end{aligned}$$

- *Bezout* 行列 $\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{B}}_4(f_2, g_2)) = 4.2 \times 10^7$

- *Bezout-Hankel* 行列：入力多項式の次数が同じ為，次数を調整するため f_2 ではなく $(5x-1)f_2$ で計算をした．$\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4((5x-1)f_2, g_2)) = 23.$

$$\mathcal{H}((5x-1)f_2, g_2) = \left(\begin{array}{rrrr|rr} 0.12 & -0.23 & 0.086 & 0.38 & -0.55 & 0.29 \\ -0.23 & 0.086 & 0.38 & -0.55 & 0.29 & 0.36 \\ 0.086 & 0.38 & -0.55 & 0.29 & 0.36 & -2.0 \\ 0.38 & -0.55 & 0.29 & 0.36 & -2.0 & -7.3 \\ \hline -0.55 & 0.29 & 0.36 & -2.0 & -7.3 & -73. \\ 0.29 & 0.36 & -2.0 & -7.3 & -73. & -653. \end{array}\right)$$

Bezout-Hankel 行列の部分行列はは微小主係数 *GCD* の影響を受けない． ∎

例 3 (余因子：分母の主係数が小さい場合)
近似 *GCD* として，$c_3(x) = 0.1x^2 - x + 1$ を持つ多項式について述べる．

$$f_3(x) = c_3(x) \times (1x^3 + 4x^2 + 3x - 5) + 0.0001x,$$
$$g_3(x) = c_3(x) \times (3x^3 - 4x + 5) - 0.0003x^2 + 0.00004$$

- *Bezout* 行列 $\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{B}}_4(f_3, g_3)) = 1.1 \times 10^6$

- *Bezout-Hankel* 行列：$\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4((5x-1)f_3, g_3)) = 4202.$

$$\mathcal{H}((5x-1)f_3, g_3) = \left(\begin{array}{rrrr|rr} 0.60 & -3.0 & 10. & -28. & 66. & -130. \\ -3.0 & 10. & -28. & 66. & -130. & 180. \\ 10. & -28. & 66. & -130. & 180. & -0.78 \\ -28. & 66. & -130. & 180. & -0.78 & -1255. \\ \hline 66. & -130. & 180. & -0.78 & -1255. & 5360. \\ -130. & 180. & -0.78 & -1255. & 5360. & -22692. \end{array}\right)$$

Bezout 行列の場合，微小主係数 *GCD* に影響はうけるが余因子の係数の影響受けない．一方，*Bezout-Hankel* 行列は分母側の多項式の余因子の影響を大きく受ける．これは g/f の級数展開の係数から行列を構成するため当然と言える．また次を見ると，f_3 に乗ずる多項式を変更しても条件数に大きな変化はなく調整が効かないように見える (主係数部を小さくないようにするような多項式を乗じた)．しかし，

- $\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4((5x-1)f_3, g_3)) = 4202.$

- $\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4((4x+1)f_3, g_3)) = 23242.$

しかし，*Bezout-Hankel* 行列の要素は，入力多項式からなる有理関数の級数展開の係数から構成されるため入力に順序がある．次のように，分子と分母をひっくり返すと条件数が劇的に改善される場合がある．

- $\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_4(f_4 + (100x+1)g_4, g_4)) = 148.$

∎

注意 1 (Bezout 行列)
Bezout 行列は入力の順序を交換しても，符号しか変化しない．また，入力を積和で変換しても大きく変わらないことが次からわかる．

1. $\mathcal{B}(f, g) = -\mathcal{B}(g, f)$

2. $\mathcal{B}(af, g) = a\mathcal{B}(f, g)$ *with* $a \in \mathbb{F}$

3. $\mathcal{B}(f,g) = \mathcal{B}(f+ag, g) = \mathcal{B}(f+ag, f+bg)$ *with* $a, b \in \mathbb{F}$

部分行列 $\tilde{\mathcal{B}}_{n-k}(f,g)$ も上記性質を保持することから，それゆえ，*Bezout* 多項式は入力に微小主係数 *GCD* を持つか否かで安定度が変わる． ∎

4 Bezout-Hankel 行列の部分行列の条件数

Bezout 行列の部分行列の条件数は次でかける．

$$\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{B}}_{n-k}(f,g)) = \gamma^k, \text{ where } \gamma = |\mathrm{lc}(\gcd(f,g))|/||\gcd(f,g)||$$

この性質から、近似 GCD の主係数が小さい時が悪条件である．Bezout-Hankel 行列の部分行列の条件数がわかると，前処理の適応条件が決定できるため，見積もることは重要である．

4.1 条件数の見積もり

問題になるのは，$f = g/f$ が発散する時なので，この時に限り検討する．係数は次で計算される (2 つの方法で評価をしたが，いずれも同じ結果であった)．

- Henrich による級数展開を用いると，

$$h_1 = \frac{g_{n-1}}{f_n}, \quad h_i = \frac{g_{n-i+1} - \sum_{j=0}^{i-1} h_j f_{n-i}}{f_n}$$

  より，$||h_i|| = O(|g_{n-1}|^i/|f_n|^i)$ or $||h_i|| \leq O(1/|f_n|^i)$

- 級数展開としてみる

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{f_n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{f_n}F(x^{-1})} \\ &= 1 - \frac{1}{f_n}F(x^{-1}) + \left\{\frac{1}{f_n}F(x^{-1})\right\}^2 + \ldots + \left\{\frac{1}{f_n}F(x^{-1})\right\}^n + \ldots\end{aligned}$$

  なので、$||h_i|| = O(|g_{n-1}|^i/|f_n|^i)$ or $||h_i|| \leq O(1/|f_n|^i)$ が妥当

$\tilde{\mathcal{H}}_{n-k}(f,g)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{h}_{n-k+i}$ について，

$$||\boldsymbol{x}_i|| = O(1/|f_n|^i) \text{ or } O(|g_{n-1}|^i/|f_n|^i)$$

であり $\mathcal{H}_{n-k}(f,g)^{-1}$ の各要素の大きさの見積もりは $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{h}_{n-k+i}$ の大きさが同じオーダーであることから，

$$\mathcal{H}_{n-k}(f,g)^{-1}{}_{i,j} \approx O(1)$$

故に次が言える

$$\begin{aligned}\mathrm{cond}(\tilde{\mathcal{H}}_{n-k}(f,g)) &= 1/|f_n| \times \frac{1 - 1/|f_n|^k}{1 - 1/|f_n|} \approx O(1/|f_n|^k) \\ &= O(|g_{n-1}|^k/|f_n|^k)\end{aligned}$$

5 まとめ

Bezout 行列と Bezout-Hankel 行列のいずれかを用いるのかについて，①近似 GCD の主係数が小さいのか，②余因子の主係数が小さいのか，で使い分けると効果的であることが示すことができた．①近似 GCD の主係数が小さいか否かの判定は主係数消去を数回繰り返すことで確認ができる：計算量は $O(1)$．余因子の主係数が小さいか否かの判定も Henrich の方法に級数展開の低次の項を構成することで確認ができる：計算量は $O(1)$．

Bezout 行列と Bezout-Hankel 行列を Barnett の定理は非常に類似しているため，Bezout 行列を用いる方法を第一選択とすることが良いと思う．

残る問題は Sylvester 行列を基にした算法を検討するかが残っている．いくつかの研究が報告されているので，それらを網羅した検討を今後の研究としたい．

参 考 文 献

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman. *The design and analysis of computer algorithms.* Addison-Wesley, 1974.

[2] S. Barnett. *Greatest common divisor of two polynomials.* Linear Algebra Appl., **3**, 1970, 7–9.

[3] S. Barnett. *Greatest common divisor of several polynomials.* Proc. Camb. Phil. Soc., **70**, 1971, 263–268.

[4] D. Bini and P. Boito, *Structured matrix-based methods for polynomial ϵ-gcd: analysis and comparisons*, Proc. of ISSAC'07, ACM Press, 2007, 9–16.

[5] B. Beckermann and G. Labahn, *When are two numerical polynomials relatively prime?*, J. Symb. Comput., **26** (1998), 677–689.

[6] B. Beckermann and G. Labahn, *A fast and numerically stable Euclidean-like algorithm for detecting relatively prime numerical polynomials*, J. Symb. Comput., **26** (1998), 691–714.

[7] D. Bini and V.Pan, *Polynomial and Matrix Computations*, Birkhäuser, 1994.

[8] R. Corless, P. Gianni, B. Trager and S. Watt, *The singular value decomposition for polynomial systems*, Proc. of ISSAC'95, ACM Press, 1995, 195–207.

[9] R. Corless, S. Watt and L. Zhi, *QR factoring to compute the GCD of univariate approximate polynomials*, IEEE Trans. Signal Proces., **52(12)** (2004), 3394–3402.

[10] E.-W. Chionh, M. Zhang and R. N. Goldman. *Fast computation of the Bezout and Dixon resultant matrices.* J. Symb. Compu., **33**(2002), 13–20.

[11] G. M. Diaz-Toca and L. Gonzalez-Vega. *Barnett's theorems about the greatest common divisor of several univariate polynomials though Bezout-like matrices. J. Symb. Compu.*, **34**, (2002), 59–81.

[12] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Maryland, 1989.

[13] U. Helmke and P. A Fuhrmann. *Bezoutians.* Linear Algebra Appl., **122/123/124**, 1989, 1039–1097.

[14] D.E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 2 (3rd Ed.): Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. 1997.

[15] R. T. Moenck. *Fast computation of GCDs. Proc. 5th ACM Symp. Thory of Comput.*, 1973, 142–151.

[16] H. Ohsako, H. Sugiura and T. Torii. A stable extended algorithm for generating polynomial remainder sequence (in Japanese). *Trans. of JSIAM (Japan Society for Indus. Appl. Math.)* **7** (1997), 227–255.

[17] V. Pan. *Univariate polynomials: nearly optimal algorithms for factorization and rootfinding*, Proc. of ISSAC'01, ACM Press, 2001, 253–267.

[18] M. Sanuki. *Computing multivariate approximate GCD based on Barnett's theorem*, Proc. of Symbolic-Numeric Computation 2009 (SNC 2009), 2009, 149-157, 2009.

[19] M. Sanuki. *Challenge to fast and stable computation of approximate univariate GCD, based on displacement structures*, Proc. of SNC2011, ACM Press, 2011, 178–186.

[20] 讃岐 勝. 悪条件性に注目した近似 GCD の見積もり、京都大学数理解析研究所講究録、2015 (to appear)

[21] A. Schönhage. Quasi-GCD. *J. Complexity*, **1**, 1985, 118–147.

[22] T. Sasaki and F. Kako, *An algebraic method for separating close-root clusters and the minimum root separation*, International Workshop on Symbolic-Numeric Computation 2005 (SN C 2005), D. Wang & L. Zhi (Eds.), 2005, 126–143.

[23] T. Sasaki and M-T. Noda, *Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations*, J. Inform. Proces., **12** (1989), 159–168.

[24] M. Sanuki and T. Sasaki, *Computing approximate GCDs in ill-conditioned cases*, Proc. of SNC 2007, 2007, 170–179.

[25] D. Sun and L. Zhi, *tructured low rank approximation of a bezout matrix*, *Mathematics in Computer Science*, 1(2):427–437, Dec 2007.

[26] A. Terui, *An iterative method for calculating approximate GCD of univariate polynomials.* In *Proceedings of the 2009 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation - ISSAC '09*, pages 351–358. ACM Press, New York, New York, USA, 2009.

[27] A. Terui. *GPGCD, an iterative method for calculating approximate GCD, for multiple univariate polynomials*, In *Computer Algebra in Scientific Computing*, pages 238–249.

[28] J. R. Winkler and X. Lao, *The calculation of the degree of an approximate greatest common divisor of two polynomials*, J. of Comp. and Appl. Math., **235(6)**, 2011, 1587–1603.

[29] T. Y. Li and Z. Zeng, *A rank-revealing method with updating, downdating, and applications*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **26** (2005), no. 4, 918–946.

[30] Z. Zeng, *The approximate GCD of inexact polynomials part I: a univariate algorithm*, to appear, 2004.

[31] L. Zhi, *Displacement structure in computing the approximate GCD of univariate polynomials*, Proc. of ASCM2003, World Scientific, 2003, 288–298.

[32] C. J. Zarowski, X. Ma and F. W. Fairman, *QR-factorization method for computing the greatest common divisor of polynomials with inexact coefficients*, IEEE Trans. Signal Proces., **48(11)** (2000), 3042–3051.