# パラメトリック多変数代数方程式の根の連続性とボーダーベースとの関係について

# Continuity of the roots of a parametric polynomial system and border bases.

東京理科大学・理学部応用数学科　　佐藤洋祐 *[1]
Yosuke Sato
Tokyo University of Science

**Abstract**

We study continuity of the roots of a prametric polynomial system. We introduced several results concerning the relationship between the continuity and a comprehensive Gröbner system in our paper of ISSAC2018. In this paper, we define the notion of a parametric border basis (PBB) and extend our results in terms of a PBB.

## 1 Border Basis

Border Basis について必要最小限の概説を与える. 詳しい解説は例えば [1] を参照されたい.

0 次元イデアル $I \subset \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ にたいして、剰余環 $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]/I$ は $\mathbb{Q}$ 上の有限次元線形空間である. この線形空間の種々の演算の効率的実装は応用上重要である. 例えば [2] では $I$ の Gröbner Basis を用いた実装を限量子記号消去に利用している.

パラメトリックなイデアルのたいしては Gröbner Basis(GB) の真の拡張である Border Basis を用いてより効率的な実装が可能になる.

イデアル $I = \langle X^2 + Y^2/4 - 1, X^2/4 + Y^2 - 1\rangle \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ の極小 GB は (どのような項順序に対しても) $\{5X^2 - 4, 5Y^2 - 4\}$ である. これから $\mathbb{Q}[X, Y]/I$ の線形空間としての基底 $\{1, X, Y, XY\}$ がただちに得られる.
$I' = \langle X^2 + Y^2/4 - aXY - 1, X^2/4 + Y^2 - aXY - 1\rangle \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ に対しても $a$ の値が 0 と異なるような 0 の近傍においても、$\{1, X, Y, XY\}$ は $\mathbb{Q}[X, Y]/I'$ の線形空間としての基底である. しかし、どのような項順序に対しても $LT(G) = \{X^2, Y^2\}$ となる $I'$ の極小 GB $G$ は存在しない. よってどのような GB からも、この基底はただちには得られない.

$I$ を体 $K$ 上の多項式環 $K[\bar{X}]$ の 0 次元イデアルとする.

---

*[1] E-mail: `ysato@rs.tus.ac.jp`

**定義 1**

$\bar{X}$ の項の有限集合 $\mathcal{O}$ が以下をみたすとき、$I$ の **order ideal** とよぶ.

*(1)* $\mathcal{O}$ は線形空間 $K[\bar{X}]/I$ の基底である.

*(2)* $t \in \mathcal{O} \to \forall t'(t'$ *divides* $t \to t' \in \mathcal{O})$.

$\partial\mathcal{O} = X_1\mathcal{O} \cup X_2\mathcal{O} \cup \cdots \cup X_n\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}$ を $\mathcal{O}$ の **border** とよぶ.

$\{t + h : t \in \partial\mathcal{O}, t + h \in I, h$ *is a K-linear combination of terms in* $\mathcal{O}\}$

を $I$ の $\mathcal{O}$**-border basis** とよぶ.

**重要事実 1**

・ $\mathcal{O}$-border basis は $\mathcal{O}$ にたいしてユニークに決まる.

・ $\mathcal{O}$-border basis(実際にはその一部分) を用いて GB の monomial reduction と同等の計算ができる.

**例 1**

$I = \langle X^2 + Y^2/4 - 1, X^2/4 + Y^2 - 1\rangle \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ にたいして、$\mathcal{O}$ は $\{1, X, Y, XY\}$ のみ. $\partial\mathcal{O}$ は $\{X^2, Y^2, X^2Y, XY^2\}$. $\mathcal{O}-$*border basis* は $\{X^2 - 4/5, Y^2 - 4/5, X^2Y - 4/5Y, XY^2 - 4/5X\}$.

$I' = \langle X^2+Y^2/4-aXY-1, X^2/4+Y^2-aXY-1\rangle \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ *(a* は 0 と異なるような 0 の近傍の値*)* にたいしては, $\mathcal{O}_1 = \{1, Y, Y^2, Y^3\}, \mathcal{O}_2 = \{1, X, X^2, X^3\}, \mathcal{O}_3 = \{1, X, Y, Y^2\}, \mathcal{O}_4 = \{1, Y, X, X^2\}, \mathcal{O} = \{1, X, Y, XY\}$ のいずれも $I'$ の *order ideal* である.

*(*$\mathcal{O}_1$ は $X > Y$ なる辞書式順序、$\mathcal{O}_2$ は $Y > X$ なる辞書式順序、$\mathcal{O}_3$ は $X > Y$ なる全次数逆辞書式順序、$\mathcal{O}_4$ は $Y > X$ なる全次数逆辞書式順序の $I'$ の *GB* から得られる.*)*

$\mathcal{O}_1-$*border basis* は

$\{Y^4 + \frac{40}{16a^2-25}Y^2 - \frac{16}{16a^2-25}, X + \frac{16a^2-25}{16a}Y^3 + \frac{5}{4a}Y, XY - \frac{5}{4a}Y^2 + \frac{1}{a}, XY^2 - \frac{5}{4a}Y^3 + \frac{1}{a}Y, XY^3 + \frac{16a^2+25}{a(16a^2-25)}Y^2 - \frac{20}{a(16a^2-25)}\}$

**重要事実 2**

$I$ の order ideal $\mathcal{O}$ が $\mathcal{O} = \{t : t$ strictly divides $LT(g)$ for some $g \in G\}$ となるようなある項順序の極小 GB を用いて求まるなら、$\mathcal{O}-$border basis から薄い字で書いた多項式を除いたものはその項順序における $I$ の reduced GB に他ならない.

**最重要事実**

どのような GB からも得られないような $\mathcal{O}-$border basis が存在し得る. したがって、Border Basis は GB の真の拡張になっている.

## 2 パラメトリック Border Basis

**定義 2**

有限集合 $F \subset K[\bar{A}, \bar{X}]$ と $\mathcal{S} \subset \bar{K}^m$ にたいして、$\forall \bar{a} \in \mathcal{S}\ \langle F(\bar{a})\rangle$ は *0* 次元であるする.

$\mathcal{S}$ の *partition* $\{\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_r\}$、$K(\bar{A})[\bar{X}]$ の有限集合 $B_1, \ldots, B_r$、$\bar{X}$ の項の有限集合 $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r$ が以下をみたすとき、$\mathcal{B} = \{(\mathcal{S}_1, B_1, \mathcal{O}_1), \ldots, (\mathcal{S}_r, B_r, \mathcal{O}_r)\}$ を $\langle F\rangle$ の $\mathcal{S}$ 上の $\bar{A}$ をパラメーターとするパラメトリック *Border Basis(PBB)* とよぶ.

*1.* $\forall f \in B_i\ f$ のどの係数 $(\in K(\bar{A}))$ の分母も $\mathcal{S}_i$ 上で 0 にならない.
*2.* $\forall \bar{a} \in \mathcal{S}_i\ \mathcal{O}_i$ は $\langle F(\bar{a})\rangle$ の *order ideal* である.
*3.* $\forall \bar{a} \in \mathcal{S}_i\ B_i(\bar{a})$ は $\langle F(\bar{a})\rangle$ の $\mathcal{O}_i$*-border basis* である.

**重要事実 3**

(1) Comprehensive Gröbner System(CGS) と同様に、$B_i$ を用いて $\mathcal{S}_i$ 上で一様な monomial reductions が

可能である.
(2) 一般に CGS よりも分割部の個数が少ない PBB が存在し計算できる.

**例 2**
$F=\{X^2+Y^2/4-AXY-1, X^2/4+Y^2-AXY-1\}\subset\mathbb{Q}[A,X,Y]$、$A$: パラメーター、$X,Y$: 主変数 にたいして、
$\mathcal{G}=\{(\mathcal{S}_1,G_1),(\mathcal{S}_2,G_2),(\mathcal{S}_3,G_3),(\mathcal{S}_4,G_4)\}$ は $\langle F\rangle$ の辞書式項順序 $X\succ Y$ の *reduced CGS* である.
ここで
$\mathcal{S}_1=\mathbb{V}(A)$, $\mathcal{S}_2=\mathbb{V}(A-\frac{5}{4})$, $\mathcal{S}_3=\mathbb{V}(A+\frac{5}{4})$, $\mathcal{S}_4=\mathbb{C}\setminus\mathbb{V}(A(A-\frac{5}{4})(A+\frac{5}{4}))$,
$G_1=\{X^2-\frac{4}{5},Y^2-\frac{4}{5}\}$, $G_2=\{Y^2-\frac{2}{5},X+Y\}$, $G_3=\{Y^2-\frac{2}{5},X-Y\}$, $G_4=\{(-16A^2+25)Y^4-40Y^2+16, 16AX+(16A^2-25)Y^3+20Y\}$ である.
この *CGS* から以下のような $\langle F\rangle$ の *PBB* $\mathcal{B}$ がただちに得られる.
$\mathcal{B}=\{(\mathcal{S}_1,B_1,\mathcal{O}_1),(\mathcal{S}_2,B_2,\mathcal{O}_2),(\mathcal{S}_3,B_3,\mathcal{O}_3),(\mathcal{S}_4,B_3,\mathcal{O}_4)\}$
$\mathcal{O}_1=\{1,X,Y,XY\}$, $\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\{1,Y\}$, $\mathcal{O}_4=\{1,Y,Y^2,Y^3\}$,
$B_1=\{X^2-\frac{4}{5},Y^2-\frac{4}{5},X^2Y-\frac{4}{5}Y,XY^2-\frac{4}{5}X\}$, $B_2=\{Y^2-\frac{2}{5},X+Y,XY+\frac{2}{5}\}$, $B_3=\{Y^2-\frac{2}{5},X-Y,XY-\frac{2}{5}\}$, $B_4=\{Y^4+\frac{40}{16A^2-25}Y^2-\frac{16}{16A^2-25},X+\frac{16A^2-25}{16A}Y^3+\frac{5}{4A}Y,XY-\frac{5}{4A}Y^2+\frac{1}{A},XY^2-\frac{5}{4A}Y^3+\frac{1}{A}Y,XY^3+\frac{16A^2+25}{A(16A^2-25)}Y^2-\frac{20}{A(16A^2-25)}\}$

すべての *PBB* が *CGS* から導入されるわけではない. 以下の $\langle F\rangle$ の *PBB* $\mathcal{B}'$ はどのような *CGS* からも導入できない.
$\mathcal{B}'=\{(\mathcal{S}_2,B_2,\mathcal{O}_2),(\mathcal{S}_3,B_3,\mathcal{O}_3),(\mathcal{S}'_1,B'_1,\mathcal{O}_1)\}$
$\mathcal{S}'_1=\mathcal{S}_1\cup\mathcal{S}_4=\mathbb{C}\setminus\mathbb{V}((A-\frac{5}{4})(A+\frac{5}{4}))$,
$B_2=\{Y^2-\frac{2}{5},X+Y,XY+\frac{2}{5}\}$, $B_3=\{Y^2-\frac{2}{5},X-Y,XY-\frac{2}{5}\}$, $B'_1=\{X^2+\frac{4}{5}AXY-\frac{4}{5},Y^2+\frac{4}{5}AXY-\frac{4}{5},X^2Y-\frac{16A}{16A^2-25}X+\frac{20}{16A^2-25}Y,XY^2+\frac{20}{16A^2-25}X-\frac{16A}{16A^2-25}Y\}$

$\mathcal{B}$ における 2 つの *segment* $(\mathcal{S}_1,B_1,\mathcal{O}_1)$ と $(\mathcal{S}_4,B_4,\mathcal{O}_4)$ を 1 つの *segment* $(\mathcal{S}'_1,B'_1,\mathcal{O}_1)$ に統合できるのであるが、このような *segment* はどのような *CGS* からも得られないのである.

このような PBB を計算することが実際に可能であることを証明した.

**定理 3**
*イデアル $\langle F\rangle\subset K[\bar{A},\bar{X}]$ の CGS $\mathcal{G}=\{(\mathcal{S}_1,G_1),\dots,(\mathcal{S}_l,G_l)\}$ にたいして、$G_i$ による $\mathcal{S}_i$ 上一様な monomial reduction を用いて以下の計算が可能である.*
*(1) かってな order ideal $\mathcal{O}$ が与えられたとき、すべての $\bar{a}\in\mathcal{S}_i$ で $\mathcal{O}$ が線形空間 $\bar{K}[\bar{X}]/\langle G_i(\bar{a})\rangle$ の基底になるかどうかの判定.*
*(2) (1) が成り立つ場合、さらに $(\mathcal{S}_i,B_i,\mathcal{O})$ が $\langle F\rangle$ の PBB の segment であるような $B_i$ の計算.*
*さらに、$\mathcal{S}_i$ と $\mathcal{S}_j$ が連結であり、$\bar{K}[\bar{X}]/\langle G_i(\bar{a})\rangle$ と $\bar{K}[\bar{X}]/\langle G_j(\bar{a})\rangle$ が $\mathcal{S}_i\cup\mathcal{S}_j$ 上の $\bar{a}$ にたいして共通の基底 $\mathcal{O}$ を持つときは、 $(\mathcal{S}_i,B_i,\mathcal{O})$ と $(\mathcal{S}_j,B_j,\mathcal{O})$ を一つの segment $(\mathcal{S}_i\cup\mathcal{S}_j,B,\mathcal{O})$ に統合することができる.*

# 3 PBB と根の連続性との関係

まず [3] で得られている結果を述べる.

**定理 4**

$F \subset \mathbb{Q}[\bar{A}, \bar{X}]$ の極小 *CGS* $\mathcal{G} = \{(\mathcal{S}_1, G_1), \ldots, (\mathcal{S}_l, G_l)\}$ にたいして、 $\langle G(\bar{a})\rangle$ が $\bar{a} \in \mathcal{S}_i$ 上で 0 次元 ($\mathbb{C}[\bar{X}]/\langle G(\bar{a})\rangle$ の線形空間としての次元 $s$ も不変) であるとき、$F(\bar{a}, \bar{X})$ の解 (重根も含めて $s$ 個) は $\mathcal{S}_i$ 上で $\bar{a}$ の連続関数になる.

この定理の逆は成り立たない. したがって、CGS の言葉ではパラメトリックな代数方程式の根の連続性を特徴付けることはできない.

**例 3**

例 2 と同じ $F$ にたいして、$A = 0$ の近傍において、$\langle F\rangle$ は重根でない 4 個の解を持ち、それらは $A$ の連続関数であるが、$A = 0$ の近傍を含む $\langle F\rangle$ の *CGS* の *segment* はどのような項順序についても存在しない.

一方、例 2 の $\langle F\rangle$ の PBB $\mathcal{B}'$ は $A = 0$ を含む $\mathcal{S}'_1$ の segment $(\mathcal{S}'_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{O}_1)$ を持つ.

PBB にたいしても、定理 4 と同様の証明で以下が成り立つことを示すことができる.

**定理 5**

$F \subset \mathbb{Q}[\bar{A}, \bar{X}]$ の *PBB* の *segment* $(\mathcal{S}_i, B_i, \mathcal{O}_i)$ にたいして、$F(\bar{a}, \bar{X})$ の解 (重根も含めて) は $\mathcal{S}_i$ 上で $\bar{a}$ の連続関数になる.

PBB については条件付きでこの定理の逆も成り立つことを証明した.

**定理 6**

$F \subset \mathbb{Q}[\bar{A}, \bar{X}]$ にたいして、$\bar{a}$ が孤立点でないような領域 $\mathcal{S}$ において、任意の $\bar{b} \in \mathcal{S}$ に対して $F(\bar{b}, \bar{X})$ が重根でない ($\Leftrightarrow \langle F(\bar{b}, \bar{X})\rangle$ が根基イデアル) 同じ個数の有限個の零点を持ち、それらが $\mathcal{S}$ 上で $\bar{b}$ の連続関数になるならば、ある $\mathcal{O}$ にたいして、$F$ は $\mathcal{S} \cup \{\bar{a}\}$ において一様な $\mathcal{O}-$ *border basis* を持つ.

これにより、重根を持たないようなパラメトリックな代数方程式の根の連続性を PBB の言葉で特徴付けることができるが、重根を持つときは未解決である. その場合も以下の予想が成り立つと考えられるが証明にはいたっていない.

**Conjecture**

$F \subset \mathbb{Q}[\bar{A}, \bar{X}]$ にたいして、$\bar{a}$ が孤立点でないような領域 $\mathcal{S}$ において、任意の $\bar{b} \in \mathcal{S}$ に対して $F(\bar{b}, \bar{X})$ が同じ個数の有限個の零点を持ち、それらが $\mathcal{S}$ 上で $\bar{b}$ の連続関数になるならば、ある $\mathcal{O}$ にたいして、$F$ は $\mathcal{S} \cup \{\bar{a}\}$ において一様な $\mathcal{O}-$ border basis を持つ.

## 謝　辞

本研究は JSPS 科研費 JP21K03375 の助成を受けています.

## 参 考 文 献

[1] Kreuzer, M., Robbiano, L.: Computational Commutative Algebra 2, Section 6.4 Border Bases. Springer, 2005.

[2] Fukasaku,R., Iwane,H., Sato,Y.: Real Quantifier Elimination by Computation of Comprehensive Gröbner Systems. Proc. ISSAC2015, pp. 173–180, 2015.

[3] Sato,Y., Fukasaku,R., Sekigawa,H.:On Continuity of the Roots of a Parametric Zero Dimensional Multivariate Polynomial Ideal. Proc.ISSAC2018, pp.359-365. 2018.