“Fold maps on complex projective spaces”

近畿大学理工学部 (Kindai University)

佐久間　一浩

1. Introduction

スティーンロッド著「ファイバー束のトポロジー」の § 28 には，

“n 次元球面 S^n が球面をファイバーとする p 次元球面 S^p 上のファイバー束 $\pi : S^n \to S^p$ の構造を持つならば，$n = 2p-1$ である”

ことが証明されている．さらに今日では厳密に “S^n が球面をファイバーとする S^p 上のファイバー束 $\pi : S^n \to S^p$ の構造を持つのは $n = 2p-1$ のときであり，$p = 1, 2, 4, 8$ の場合に限る” ことが分かってる．

$p = 1$ の場合は，二重被覆 $\pi : S^1 \to S^1$, $\pi(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ であり，$p = 2, 4, 8$ のときは $K = \mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ or $\mathbb{O}$ とおくとき，写像を

$$f : K^2 \to K \times \mathbb{R},\ f(z_0, z_1) = (2z_0\bar{z}_1, |z_0|^2 - |z_1|^2),$$

と定義するとき，$S^{2p-1} = \{(z_0, z_1) \in K^2;\ |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ に制限すると $f|_{S^{4m-1}} : S^{2p-1} \to S^p$ は Hopf fibration である．すなわち，写像 $f|_{S^{4m-1}}$ は submersion であり，そこに特異点（写像の微分の階数が退化する点）は現れない．

一方，1950 年代に J. P. Serre は球面のホモトピー群（の有限性）に関して，次のことを証明した：

Serre's finiteness theorem on homotopy groups

$\pi_n(S^p)$ is a finite group except the cases where $\pi_m(S^m) \cong \mathbb{Z}$ and $\pi_{4m-1}(S^{2m}) \cong \mathbb{Z} \oplus T$ for $m > 0$, where T is a finite group.

次元対 $(4m-1, 2m)$ の $m = 1, 2, 4$ の場合を正確に述べると

$$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_7(S^4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}, \quad \pi_{15}(S^8) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{120},$$

であり，無限群の生成元 $1 \in \mathbb{Z}$ は上で定義された Hopf fibration である．したがって，ホモトピー群 $\pi_n(S^p)$ の任意のホモトピー類は，$n = 2p-1$ $(p = 1, 2, 4, 8)$ のとき生成元を除いて，微分可能写像 $f : S^n \to S^p$ には必ず特異点が現れることになる．

Hopf fibration に関することをもう少し述べておこう．まずは well-defined な準同型写像

$$H : \pi_{4m-1}(S^{2m}) \to \mathbb{Z},\ \text{Hopf invariant},$$

が微分可能写像 $f : S^{4m-1} \to S^{2m}$ の異なる正則値 y_1, y_2 に対して，その正則ファイバーの絡み数として

$$H(f) = \mathrm{lk}(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) \in \mathbb{Z}.$$

が定義され，写像 f の Hopf invariant という．

J. F. Adams(1960)

$\exists f \in \pi_{4m-1}(S^{2m}) \quad \text{s.t.} \quad H(f) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad m = 1, 2$ and 4.

このような背景を念頭に置いて，1969 年 Amsterdam での「多様体」の国際会議で，John Mather は次の問題を提起した：

Homotopy problem

For any $f \in \pi_n(S^p)$ is f homotopic to a *fold map* with $n \geq p$?

$f : M^n \to N^p$ $(n \geq p)$ を多様体間の微分可能写像とするとき，f の特異点集合 $S(f) = \{x \in M^n; \operatorname{rank} df_x < p\}$ が定義される．点 $q \in S(f)$ を中心とする局所座標を $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とする．このとき，写像 f が次のような局所的対応

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{p-1}, \pm x_p^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$$

で表される点 $q \in S(f)$ を fold singularity という．ちょうど，このころ微分可能写像の特異点論における「構造安定性問題」を解決していた Mather は特異点型のヒエラルキーが

$$\text{fold} \quad \to \quad \text{cusp} \quad \to \quad \text{swallowtail} \quad \to \cdots$$

であることも知っていたため，微分可能写像 $f : S^n \to S^p$ が特異点を持てば，必ず fold が現れることから，$S(f)$ の特異点がすべて fold である（このような写像は ‘fold map’ と呼ばれる），すなわち submersion に最も近い微分可能写像の存在を問うたのである．ただし，ここで注意して欲しいのが cusp 特異点集合の closure をとると，fold 以外の特異点集合がすべて含まれること，すなわち fold map の存在問題は fold 以外の特異点をすべて消去出来るか否かを問う「特異点消去問題」であるという点である．

そこで我々は Mather の問題を拡張して，次の問題を考える：

Generalized Mather's problem

Find the necessary and sufficient condition for the existence so that M^n admits a fold map into N^p.

さて，R. Thom は Mather のホモトピー群問題から遡ること 15 年ほど前に，‘微分可能写像の特異点’ [23] において,「モース理論の一般化」を提唱し，いわゆるモースの不等式（[?] 参照）の一般化と称して，あるジェット横断性に関する良い条件を満たす微分可能写像に現れる特異点型のトム多項式の存在定理を証明し，簡単な場合にその表示を決定した（再び [23] を参照）．

そこで，我々は generalized Mather's problem の特別な場合として，$N^p = \mathbb{R}^p$ に焦点を当てて考えることにする．まずは $p = 1$ の場合はよく知られているように “任意の n 次元多様体 M^n は $\mathbb{R}$ への折り目写像（すなわちモース関数）を許容する !” したがって，$p \geq 2$ の場合が非自明な問題となる．実はホモトピー群問題との関連で，次の結果が得られている：

Kikuchi-Saeki([13]), Saeki-S([20])

Let M^n be a closed n-manifold with $\chi(M^n)$ *odd*. If there is a fold map $f : M^n \to \mathbb{R}^p$, then p must be $1, 3$ and 7. This restriction on p is coming from the non-existence of the Hopf invariant one problem by Adams.

上記の定理より値域次元 $p=3$ および 7 の場合の fold map の存在問題は特別な位置を占めると解釈される．尚，上の結果に含まれるが $p=2$ の場合に Thom-Levine-Eliashberg の定理（完全解）が得られている：

> "Any closed n-manifold M^n admits a fold map into $\mathbb{R}^2$ if and only if $\chi(M^n)$ is even."

したがって，$p \geq 3$ の場合が残された重要な問題となる．

2. $p=3$ の FOLD MAP

$f: M^n \to \mathbb{R}^3$ をジェネリックな微分可能写像とする．このとき，写像空間 $C^\infty(M^n, \mathbb{R}^3)$ の中に開かつ稠密な部分集合 S があって，$f \in S$ が成り立つことに注意する（[11] 参照）．写像 f の特異点集合を $S(f)$ とするとき，$x \in S(f)$ を中心とする局所座標を $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ とする．写像 f に現れる特異点型は次の三つのいずれかであり，それぞれの局所的対応は

(1) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1.x_2, \pm x_3^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$
(2) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1.x_2, x_3^3 + x_1x_2 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$
(3) $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1.x_2, x_3^4 + x_1^2x_2 + x_1x_2 \pm x_4^2 \pm \cdots \pm x_n^2)$

である．(1) はもちろん fold（2 次元），(2) は cusp（1 次元），(3) は swallowtail（離散点）と呼ばれ，括弧内は部分多様体としての次元を表す．そこで，fold 全体を $F(f)$ とし，cusp 全体を $C(f)$ とし，swallowtail 全体を $SW(f)$ と表すとき，

$$S(f) = \overline{F(f)}, \quad \overline{C(f)} = C(f) \cup SW(f)$$

が成り立ち，Stiefel-Whitney 類による Thom 多項式の表示は

$$[S(f)]_2^* = w_{n-2}(M^n) \in H^{n-2}(M^n; \mathbb{Z}_2)$$

であることを Thom（[23]）が決定した[1]．もしも f が fold map であるとき，制限写像 $f|_{S(f)}: S(f) \to \mathbb{R}^3$ は余次元 1 のはめ込みであることがすぐに分かる．そこで，そのはめ込みの法束が自明になるとき，f を tame fold map という．このとき，次のことが証明できる．

Theorem (S)
Let M^{2m} be a closed, *non-orientable* $2m$-manifold with $m \geq 3$. There exists a tame fold map $f: M^{2m} \to \mathbb{R}^3$ if and only if $w_{2m}(M^{2m}) = 0$ and $w_{2m-1}(M^{2m}) = 0$.

多様体の次元が奇数の場合には，次の結果が得られている．

S [21]
Let M^n be a closed n-manifold with n being *odd*. There is a fold map $f: M^n \to \mathbb{R}^3$ if and only if $w_{n-1} = 0$.

ここで注意して貰いたいのが，M^n は必ずしも向き付け可能である必要はないことと，cusp の Thom 多項式が唯一つの障害になっているということである．すなわち f をジェネリック写像とするとき，cusp の Thom 多項式が w_{n-1} であるという結果が含まれている．

[1] 上付きの $*$ はポアンカレ双対をとることを表す．

したがって，[23] にもあるように，Thom 多項式の表示は多様体の取り方には依らないので，次元 n が偶数であっても cusp の Thom 多項式が w_{n-1} であるということが分かる．

3. 射影空間上の $\mathbb{R}^3$ への FOLD MAP

本節では，定義域多様体を射影空間としたときに，$\mathbb{R}^3$ への fold map が存在するか否かを考察する．まずは直ちに分かる場合を見る．前節の最後に言及した結果より，必要十分条件が求まっているので特性類の計算から分かる．実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の全 Stiefel-Whitney 類は，$\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ を生成元とするとき

$$w(\mathbb{R}P^n) = (1+\alpha)^{n+1}$$

であることが計算されている（[1, 2]）．したがって，二項係数の性質から $n = 4m+1$ ならば $w_{n-1}(\mathbb{R}P^n) \neq 0$ であり，$n = 4m+3$ ならば $w_{n-1}(\mathbb{R}P^n) = 0$ である．また，$n = 4m+2$ ならば $w_{n-1}(\mathbb{R}P^n) \neq 0$ である．よって，これらの三つの場合は fold map $f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}^3$ が存在するか否かが決定したことになる．ただし，$n = 4m$ のときは $w_{n-1}(\mathbb{R}P^n) = 0$ であるが実射影空間は向き付け不可能であり，かつオイラー標数が奇数なので，tame fold map が存在しないことは前節の定理から従うが，non-tame fold map が存在するかは残念ながら未解決である．

次に複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 上の $\mathbb{R}^3$ への fold map を考える．実は，佐伯修氏により [17] において，ジェネリック写像 $f : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{R}^3$ の cusp の Thom 多項式は消えているが，cusp は消去できないことが証明された．後にこの結果は，[18] において，M^4 を向き付けられた 4 次元閉多様体とするとき，fold map $f : M^4 \to \mathbb{R}^3$ が存在するための必要十分条件を決定する形に一般化された．その結果によると，cusp 消去のための二次障害類が存在することも明らかにされた[2]．

一方，[16] において，向き付け可能な 6 次元閉多様体 M^6 上には $\mathbb{R}^3$ への fold map がいつでも存在することを示した．したがって，特に $\mathbb{C}P^3$ 上には $\mathbb{R}^3$ への fold map がいつでも存在する．さらに R. Sadykov は自身によるチェス予想の解の議論を精密化することにより次のことを証明した：

<u>Sadykov, preprint</u>
Let M^{2m} be a closed, *orientable* $2m$-manifold with $m \geq 3$. Then there is a fold map $f : M^{2m} \to \mathbb{R}^3$.

したがって，これらの結果を纏めると

<u>Theorem (Okada-S, [6])</u>
(1) $\exists f : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{R}^3$, fold map $\iff$ $n \geq 3$.
(2) If $n = 4m+1$, $4m+2$, then $\mathbb{R}P^n$ does not admit a fold map into $\mathbb{R}^3$. If $n = 4m+3$, then $\mathbb{R}P^n$ admits a fold map into $\mathbb{R}^3$.

となる．

References

[1] 『特異点のこころえ』佐久間一浩著（日本評論社），2019 年 5 月．
[2] 『特性類講義』J. W. ミルナー＆ J. D. スタシェフ共著（佐伯修/佐久間一浩共訳），シュプリンガー・フェアラーク東京，2001 年 11 月．
[3] 『幾何学と特異点』泉屋周一・佐野貴志・佐伯修・佐久間一浩著（共立出版），2001 年 5 月．

[2] さらにその結果は次元対を一般化した形で [15] において与えられた．

[4] 『数 “8” の神秘』佐久間一浩著（日本評論社），2013 年 8 月.
[5] 『埋め込みとはめ込み』足立正久著 (岩波書店)，1984 年 12 月.
[6] 岡田侃也「射影空間上の折り目写像の存在と構成」近畿大学大学院理工学研究科修士論文，2024 年 2 月.
[7] Y. Ando, *Existence theorems of fold-maps*, Japan. J. Math. (N.S.) **30** (2004), 29–73.
[8] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. **4** (1970), 1119–1134.
[9] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. **6** (1972), 1302–1326.
[10] Y. Eliashberg and N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, Grad Studies in Math. vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2002..
[11] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math., vol. 14, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1973.
[12] B. Kalmar, *Fold maps on low dimensional manifolds*, preprint (2021).
[13] S. Kikuchi and O. Saeki, *Remarks on the topology of folds*, Proc. Amer. Math. Soc. **123**(1995), 905–908.
[14] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Studies vol. 51, Princeton Univ. Press, 1963.
[15] T. Ohmoto, O. Saeki and K. Sakuma, *Self-intersection classes for singularities and its applications to fold maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3825–3838.
[16] R. Sadykov, O. Saeki and K. Sakuma, *Obstruction to the existense of fold maps*, J. London Math. Soc. **81** (2010), 338–354.
[17] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551–565.
[18] O. Saeki, *Fold maps on 4-manifolds*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), 627–647.
[19] O. Saeki, *Topology of Singular Fibers of Differentiable Maps*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., vol. 1854, 2004.
[20] O. Saeki and K. Sakuma, *Maps with only Morin singularities and the Hopf invariant one problem*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **124**(1998), 501–511.
[21] K. Sakuma, *Existence problem for fold maps*, Real and Complex Singularities, pp. 342–387, World Scientific, Hackensack, NJ, 2007.
[22] K. Sakuma, *Fold dimension set of manifolds*, JP Journal of Geometry and Topology **18** (2015), 37–64.
[23] R. Thom, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6** (1955-56), 43–87.