

# Non-singular extensions of circle-valued Morse functions

岩倉康樹\*

(九州大学マス・フォア・イノベーション連係学府)

## 1 はじめに

本稿の内容は [5] に基づいている．詳細はそちらを参照していただきたい．以下，多様体や多様体間の写像は断らない限り  $C^\infty$  とし，値域に現れる  $S^1$  は向き付けられているとする．

本稿では以下の問題を考える．

**Question 1.1.**  $M$  を向き付け可能な閉曲面， $g: M \times [0, 1) \rightarrow S^1$  を境界への制限が *circle-valued Morse* 関数であるような沈め込みとする．このとき，境界が  $M$  であるようなコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体  $N$ ，沈め込み  $G: N \rightarrow S^1$  で図式

$$\begin{array}{ccc} M \times [0, 1) & \xrightarrow{g} & S^1 \\ i \downarrow & \nearrow G & \\ N & & \end{array}$$

を可換にするものが存在するための条件は何か？但し， $i$  は  $M \times \{0\}$  と  $\partial N$  を同一視するようなカラー近傍とする．

Question 1.1 を circle-valued Morse 関数に関する **non-singular extension problem** と呼び，上記の問題の答えとして“組み合わせ的”な条件を与えるべく研究を行なった．Question 1.1 に対する答えは Theorem 3.1 で与える．

Question 1.1 は以下の Morse 関数に関する non-singular extension problem を参考にした．

**Question 1.2.**  $M$  を  $n$  次元閉多様体 ( $n \geq 1$ )， $g: M \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  を境界への制限が *Morse* 関数であるような沈め込みとする．このとき，境界が  $M$  であるようなコンパクト  $(n+1)$  次元多様体  $N$ ，沈め込み  $G: N \rightarrow \mathbb{R}$  で図式

$$\begin{array}{ccc} M \times [0, 1) & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ i \downarrow & \nearrow G & \\ N & & \end{array}$$

を可換にするものが存在するための条件は何か？但し， $i$  は  $M \times \{0\}$  と  $\partial N$  を同一視するようなカラー近傍とする．

---

\* e-mail: iwakura.kouki.285@s.kyushu-u.ac.jp

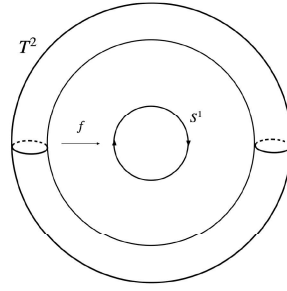


Figure1: 沈めこみ  $f: T^2 \rightarrow S^1$ .

Question 1.2 は Morse 関数に関する non-singular extension problem と呼ばれ, 多く研究されている. 以下, 先行研究の紹介を行う.

$n = 1$  の場合は, Blank-Laudenbuch[2] により研究されている.  $n = 2$  の場合は,  $M$  が向き付け可能な閉曲面のときは Curley[3], 向き付け不可能な閉曲面のときは Laroche[6] によって研究されている. Curley や Laroche は Reeb グラフを用いた組み合わせ的な方法で Question 1.2 に対する答えを与えた. また, 一般の  $n$  については,  $M = S^n$  の場合が研究されている. Barannikov[1], Seigneur[9] では Morse 複体を用いて研究が行われており, 前者では組み合わせ的, 後者では代数的な観点から拡張が可能になるための必要条件を与えている.

## 2 用語

主定理である Theorem 3.1 を紹介するために, いくつかの用語を準備する. 詳しくは [5] を参考にしたい.

### 2.1 circle-valued Morse 関数

まずは circle-valued Morse 関数を定義する. 本稿における circle-valued Morse 関数に関する事実は [4] を参考にした.

**Definition 2.1** (circle-valued Morse 関数).  $M$  は閉曲面とする. 写像  $f: M \rightarrow S^1$  に対して,  $f$  の臨界点が全て非退化で, 臨界値が互いに異なるとき,  $f$  を **circle-valued Morse 関数**という.

**Remark 2.2.** 本稿では *circle-valued Morse 関数* として, 沈め込みも許すことにする. 例えば Figure1 に描かれている沈めこみ  $f$  も本稿では *circle-valued Morse 関数* として許容する.

### 2.2 labeled Reeb グラフ

次に circle-valued Morse 関数の Reeb グラフを定義する.

**Definition 2.3** (Reeb グラフ).  $M$  を向き付け可能な閉曲面,  $f: M \rightarrow S^1$  を *circle-valued Morse*

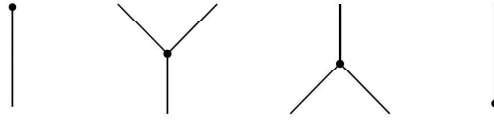


Figure2: Reeb グラフの頂点周りの様子.

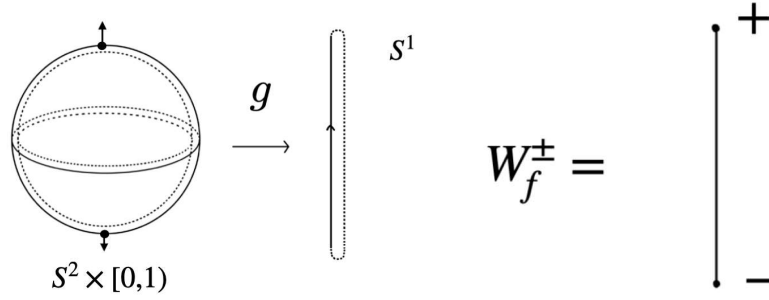


Figure3: labeled Reeb グラフの具体例.

関数とする. このとき,  $x, y \in M$  に対して, 同値関係  $\sim$  を次のように定義する:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y) \text{ かつ } x, y \text{ は } f^{-1}(f(x)) \text{ の同じ連結成分に含まれる.}$$

この同値関係による商空間を  $W_f := M / \sim$  で定め,  $f$  の **Reeb グラフ** という. また, 下の可換図式を満たす連続写像  $\bar{f}: W_f \rightarrow S^1$  は一意的に定まる. 但し,  $q_f: M \rightarrow W_f$  は商写像とする.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & S^1 \\ q_f \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ W_f & & \end{array}$$

$f$  の逆像の連結成分で臨界点を含むものに対応する  $W_f$  の点を頂点とすると,  $W_f$  はいくつかの有限グラフと  $S^1$  の非交和で表され, グラフの頂点周りでの様子は, Morse の補題 [7] から Figure 2 のいずれかである.

次に, 境界への制限  $f$  が circle-valued Morse 関数である沈めこみ  $g: M \times [0, 1) \rightarrow S^1$  について考える.  $p \in M \times \{0\}$  を  $f$  の臨界点,  $w \in T_p(M \times [0, 1))$  を外向きベクトルとする. このとき,  $g$  が沈めこみであることから  $dg_p(w) \in T_{g(p)}S^1$  は 0 でなく,  $S^1$  の向きについて正, 負のいずれかである. 正であるとき  $p$  に対応する  $W_f$  の頂点に “+”, 負であるとき “-” を付与する.

**Definition 2.4** (labeled Reeb グラフ). 上の方法で各頂点に符号を付与した Reeb グラフを  $f$  の **labeled Reeb グラフ** と呼び,  $W_f^\pm$  で表す.

Figure 3 は labeled Reeb グラフの例である.

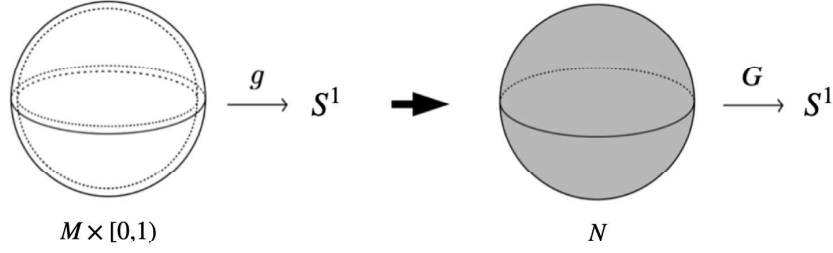


Figure4:  $g$  の non-singular extension のイメージ図

## 2.3 non-singular extension

non-singular extension を定義する.

**Definition 2.5** (non-singular extension).  $M$  は向き付け可能な閉曲面,  $g: M \times [0, 1) \rightarrow S^1$  は境界への制限が *circle-valued Morse* 関数であるような沈め込みとする. このとき, 境界が  $M$  であるようなコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体  $N$ , 沈め込み  $G: N \rightarrow S^1$  で以下の図式を可換にするものが存在するとき,  $G$  を  $g$  の **non-singular extension** という.

$$\begin{array}{ccc} M \times [0, 1) & \xrightarrow{g} & S^1 \\ i \downarrow & \nearrow G & \\ N & & \end{array}$$

但し,  $i: M \times [0, 1) \rightarrow N$  は  $M \times \{0\}$  と  $\partial N$  を同一視するカラー近傍である.

$g$  の non-singular extension のイメージ図は Figure 4 に描かれている.

## 2.4 collapse

**Definition 2.6** (collapse).  $M$  は向き付け可能な閉曲面,  $g: M^2 \times [0, 1) \rightarrow S^1$  は  $f = g|_{M \times \{0\}}$  が *circle-valued Morse* 関数であるような沈め込みとする. また,  $V$  は有限グラフといくつかの  $S^1$  の非交和,  $h: V \rightarrow S^1$  はグラフの辺,  $S^1$  への制限がはめ込みであるような連続写像とする. 連続写像  $C: W_f^\pm \rightarrow V$  が以下の条件を満たすとする.

1.  $C$  により,  $W_f^\pm$  の頂点は  $V$  の頂点と一対一に対応する,
2. 下の図式は可換である,

$$\begin{array}{ccc} W_f^\pm & \xrightarrow{\bar{f}} & S^1 \\ C \downarrow & \nearrow h & \\ V & & \end{array}$$

3.  $C$  の局所的な変化は  $W_f^\pm$ ,  $V$  の頂点周辺で Figure 5 のいずれかである.

このとき,  $C$  を **collapse** という.

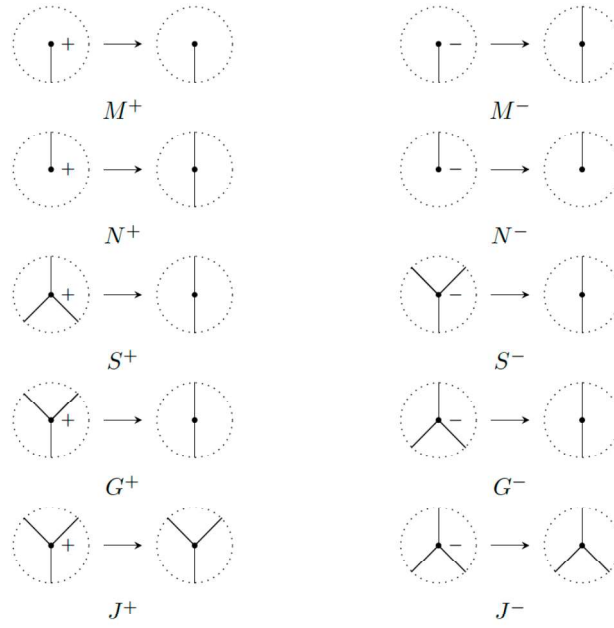


Figure5: collapse の  $W_f^\pm$ ,  $V$  の頂点周りでの様子.

さらに collapse には “**allowable**” という性質を定義できる. Figure 5 の  $G^+$ ,  $G^-$  の像で現れる  $V$  の頂点は他の頂点達と少し違った性質を持っている. そこで,  $C$  の像に現れている  $G^+$ ,  $G^-$  での  $V$  の頂点が対で現れるとき, collapse  $C$  を **allowable collapse** という. 正確な定義は [5] を参照されたい.

### 3 主結果

#### 3.1 主定理

**Theorem 3.1.**  $M$  を向き付け可能な閉曲面,  $g: M \times [0, 1) \rightarrow S^1$  を境界への制限  $f$  が *circle-valued Morse* 関数であるような沈め込みとする. このとき, コンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体  $N$ ,  $g$  の *non-singular extension*  $G: N \rightarrow S^1$  が存在するための必要十分条件は,

- $V$ : いくつかの有限グラフと  $S^1$  の非交和,
- $h: V \rightarrow S^1$ : 有限グラフの辺,  $S^1$  上ではめ込みであるような連続写像,
- $C: W_f^\pm \rightarrow V$ : *allowable collapse*,

が存在することである.

上の定理の証明の流れを少し説明しておく.

コンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体  $N$ ,  $g$  の *non-singular extension*  $G: N \rightarrow S^1$  が与えられたとする. このとき, Definition 2.5 における可換図式でのカラー近傍から誘導される collapse が実際に条件を満たすことで示される.

逆は, 与えられた  $V$ ,  $h$ ,  $C$  という組み合わせ的な条件に従って, Figure 6 に描かれているパーツを

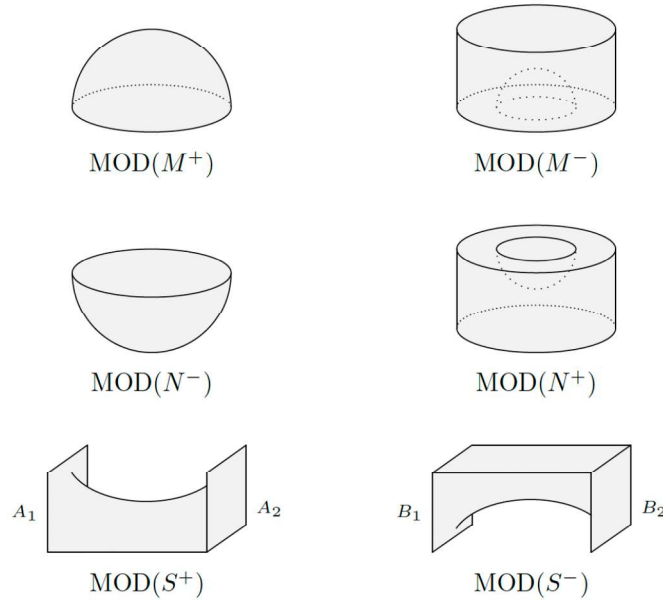


Figure6: Theorem 3.1 にて  $N$ ,  $G$  の構成に用いるパーツ.

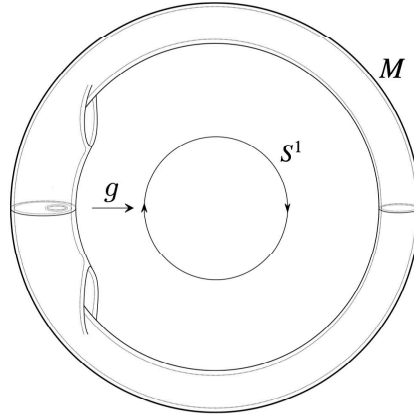


Figure7: 沈め込み  $g: M \times [0, 1) \rightarrow S^1$ .

貼り合わせ,  $N$ ,  $G$  を具体的に構成することで示される. 証明の後半は, 以下で具体例を用いて詳しく説明する.

### 3.2 具体例

Theorem 3.1 の証明では,  $V$ ,  $h$ ,  $C$  が与えられた状況で Figure 6 のパーツを用いてコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体  $N$ ,  $g$  の non-singular extension  $G: N \rightarrow S^1$  を構成する. 以下では, この構成を具体例を用いて説明する.

まず, 沈め込み  $g: M \times [0, 1) \rightarrow S^1$  を Figure 7 のように与える. このとき,  $f$  の labeled Reeb グラフ  $W_f^\pm$  と Theorem 3.1 の条件を見たす  $V$ ,  $h$ ,  $C$  として Figure 8 のようなものが考えられる.  $S^1$  の点で,  $h$  による  $V$  の頂点の像でないものから,  $S^1$  の向きとは逆に進み,  $h$  の逆像が  $G$  の逆像の曲面

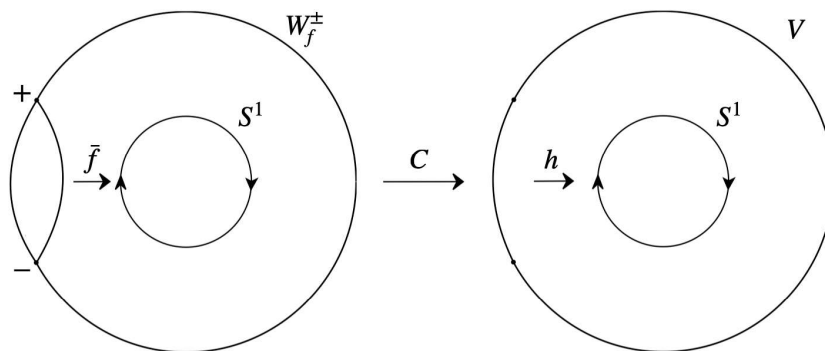


Figure8:  $N, G$  を構成するのに用いる  $W_f^\pm, V, h, C$ .

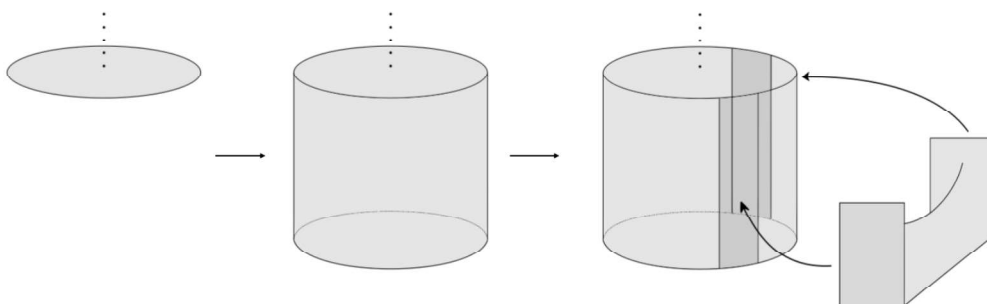


Figure9: collapse  $C$  の  $S^+$  に対応する構成. 円板を引き延ばしたものに,  $\text{MOD}(S^+)$  の  $A_1, A_2$  を貼り合わせている.

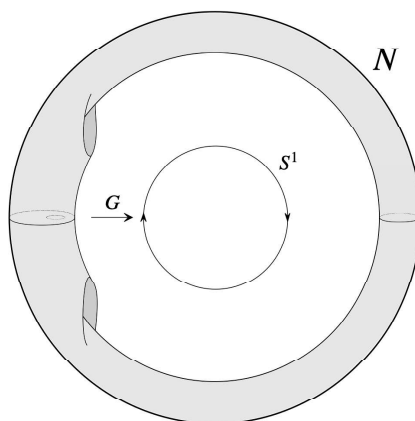


Figure10:  $S^+, S^-$  における構成と最初と最後の曲面の貼り合わせで得られた  $N, G$ .

の連結成分,  $\bar{f}$  の逆像がその曲面の境界の連結成分で,  $C$  によってそれらが関係付けられているように  $N, G$  を構成していく. 例えば, 円板から始めて  $S^+, S^-$  に対応する頂点での構成を考えれば良い. Figure 8 で  $C$  の  $W_f^\pm, V$  の頂点周りでの局所的な遷移は  $S^+, S^-$  である. 従って, Figure 9 のように  $S^+$  に対応する頂点周りでの構成が考えられる. ほとんど同様に,  $S^-$  に対応する頂点周りでも構成ができる. 上で述べた方法で  $W_f^\pm, V, h$  から得られた多様体の最初と最後の円板を貼り合わせると, Figure 10 のように  $N, G$  が得られる.

## 4 今後の課題

本稿では, Question 1.1 の組み合わせ的な答えである Theorem 3.1 を紹介した. Question 1.1 は Question 1.2 を参考にして立てられた. そこで, Morse 関数の non-singular extension problem の一般化として, 次のような問題も考えられる.

**Question 4.1.**  $M$  を  $n$  次元閉多様体,  $L$  を  $l$  次元多様体,  $g: M \times [0, 1) \rightarrow L$  を境界への制限が安定写像であるような沈め込みとする. このとき, 境界が  $M$  であるコンパクト  $(n+1)$  次元多様体  $N$ , 沈め込み  $G: N \rightarrow L$  で図式

$$\begin{array}{ccc} M \times [0, 1) & \xrightarrow{g} & L \\ \downarrow i & \nearrow G & \\ N & & \end{array}$$

を可換にするものが存在するための条件は何か? 但し,  $i$  は  $M \times \{0\}$  と  $\partial N$  を同一視するようなカラー近傍とする.

また, Question 4.1 において,  $g$  や  $G$  の条件で空でない特異点集合を指定するような問題も考えられる. さらに, circle-valued Morse 関数は結び目との関係が深いことが知られており, circle-valued Morse 関数を用いた結び目の不変量として Morse-Novikov 数というものが知られている [8]. そのため, 今回の研究の Morse-Novikov 数へ応用を期待している. また, Theorem 3.1 より結び目の不変量を組み合わせ的に得られるのではないかと期待している.

## 謝辞

本研究は JSPS KAKENHI Grant Number JP23H05437 により部分的に支援していただいている. さらに, 九州大学マスフォアイノベーション卓越大学院プログラムの支援を受けている. また, 国際共同利用・共同研究拠点である京都大学数理解析研究所の支援を受けている.

## References

- [1] S. A. Barannikov, *The framed Morse complex and its invariants*, Adv. Soviet Math. **21** (1994), 93–115.
- [2] S. Blank and F. Laudenbach, *Extension à une variété de dimension  $2d$  d'un germe de fonction donné le long du bord*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 1663–1665.
- [3] C. Curley, *Non-singular extensions of Morse functions*, Topology (1) **16** (1977), 89–97.
- [4] I. Gelbukh, *Reeb graphs of circle-valued functions: A survey and basic facts*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (1) **61** (2023), 59–81.
- [5] K. Iwakura, *Non-singular extensions of circle-valued Morse functions*, Preprint (2023), arXiv:2311.07309.

- [6] C. Laroche, *Extending a Morse function to a non-orientable 3-manifold*, Preprint (2017), arXiv:1709.03328v1.
- [7] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Stud. 51, Princeton Univ. Press (1963).
- [8] A. Pazhitnov, L. Rudolph, L. K. Weber, *The Morse-Novikov number for knots and links*, (Russian)Algebra i Analiz **13** (2001), no. 3, 105–118; translation in St. Petersburg Math. J. **13** (2002), no. 3, 417–426.
- [9] V. Seigneur, *Extensions de fonctions d'un voisinage de la sphère à la boule*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (7) 356 (2018), 712–716.