

De Branges 空間入門

東京工業大学・理学院 数学系・鈴木正俊*

Masatoshi Suzuki,
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology,
2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan.

Mathematics Subject Classification 2010: 46E22, 47B32.

Abstract

De Branges 空間とは整函数の成す再生核 Hilbert 空間の一種であり, Louis de Branges に
よって 1959 年から 1962 年にかけての一連の論文で導入された. 近年, de Branges 空間は函数
解析や調和解析などの分野で再び盛んに研究されているばかりでなく, 数論など他分野へも応
用されるようになってきた. 本論では de Branges 空間について入門的な解説を行う.

1 De Branges 空間を学ぶ動機について

筆者にとって Lagarias の論文 [19] がそうであったように, 特定の読者に de Branges 空間の理
論に興味を持ってもらうには, 彼・彼女らが関心を持っている研究テーマにそれが応用可能なこ
とを述べるのが最も効果的であろう. しかしながら, de Branges 空間の理論の応用範囲は存外広
いにも関わらず, 筆者が不勉強なため解説できるような例は数少ない. そこで本論では, 何か特
定の応用例を軸にして de Branges 空間を解説するのではなく, de Branges 空間の理論を調和解
析における Paley-Wiener 理論の拡張として述べることにした. De Branges 自身も Paley-Wiener
の定理が de Branges 空間の起源だと著書 [8] の巻頭言で述べている.

こういった方針をとったもう一つの理由は, de Branges 空間の理論は特定の事柄にしか応用
の効かない特殊なものなのではなく, Lebesgue 空間や Hardy 空間のように, 応用範囲の広い便利
な枠組みなのだという印象を読者諸氏に持ってもらうためである. De Branges 空間の理
論は de Branges が 1960 年前後に独力で構築して以来 (といっても Kreĭn の影響は無視できない
であろう), しばらくは限定的な人々にしか注目されて来なかったと思われる. しかしながら今世
紀に入ってから応用範囲の広がり, de Branges 空間の懐の深さを示しているように感じられ
る. 本解説が将来の新たな応用の発見への切っ掛けとなれば, 筆者にとって望外の喜びである.

2 Paley-Wiener spaces

まず Paley-Wiener 空間について復習する. 実数 $a > 0$ に対して, Paley-Wiener 空間 $PW(a)$ は
有界閉区間 $[-a, a]$ 上の Lebesgue 空間 $L^2(-a, a)$ の Fourier 変換像として定められる:

$$PW(a) := F(L^2(-a, a)), \quad (Ff)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{izx} dx.$$

*E-mail address: msuzuki@math.titech.ac.jp

Paley-Wiener 空間の元はどれも整函数に延長される. Paley-Wiener の定理によれば, $\text{PW}(a)$ は exponential type a の整函数であって, 任意の実軸に平行な直線上で二乗可積分なものの全体として特徴付けられる. しかも, $\text{PW}(a)$ は

$$\frac{\sin(a(w - \bar{z}))}{\pi(w - \bar{z})}$$

を再生核とする再生核 Hilbert 空間になっており, 以下のような複数の著しい性質を持つ.

[直交構造] $H^2 = H^2(\mathbb{C}_+) = \text{F}(L^2(0, \infty))$ を上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{\Im z > 0\}$ の Hardy 空間としたとき,

$$\begin{aligned} \text{PW}(a) &= \text{F}(L^2(-a, a)) = \text{F}(L^2(-a, \infty)) \ominus \text{F}(L^2(a, \infty)) \\ &= e^{-iaz} H^2 \ominus e^{iaz} H^2 = e^{-iaz} (H^2 \ominus e^{2iaz} H^2). \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $A \ominus B$ は A における B の直交補空間を表す. このように見ると, $\text{PW}(a)$ の構造は指数函数 e^{-iaz} で決定されているのが分かる.

[展開定理] $F \in \text{PW}(a)$ ならば,

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\pi n/a) \frac{\sin(a(z - \pi n/a))}{a(z - \pi n/a)} \quad (2)$$

が成り立つ. ここで $\frac{\sin(a(z - \pi n/a))}{a(z - \pi n/a)}$ ($n \in \mathbb{Z}$) たちは $\text{PW}(a)$ の直交基底を成す. 基底を成すこれらの函数と再生核との関連は明白であろう.

[整列構造] $0 < t < u \leq a$ ならば $\{0\} \neq \text{PW}(t) \subsetneq \text{PW}(u) \subset \text{PW}(a)$.

[生成元の発展] $\text{PW}(t)$ ($0 < t \leq a$) たちを決定する e^{-itz} は実整函数 $\cos(tz)$ と $\sin(tz)$ により

$$e^{-itz} = \cos(tz) - i \sin(tz)$$

と表され, $z \in \mathbb{C}$ でパラメータ付けられた次の常微分方程式系を満たす:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \cos(tz) \\ \sin(tz) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(tz) \\ \sin(tz) \end{bmatrix}, \quad 0 < t \leq a. \quad (3)$$

[Fourier 変換] $\text{F}f \in \text{PW}(a)$ ($f \in L^2(-a, a)$) について, $f_+(t) = (f(t) + f(-t))/2$ と $f_-(t) = (f(t) - f(-t))/(-2i)$ によって $f(t) = f_+(t) - if_-(t)$ と分解すると, $\text{F}f$ は微分方程式系 (3) の解 $t(\cos(tz) \sin(tz))$ を用いて

$$(\text{F}f)(z) = 2 \int_0^a f_+(t) \cos(tz) dt + 2 \int_0^a f_-(t) \sin(tz) dt.$$

と表される.

3 De Branges spaces

3.1 Hermite-Biehler class – 指数函数の一般化

Paley-Wiener 空間の表示 (1) において, 指数函数 e^{-iaz} をより一般の函数におきかえることを考える. 以下では記法

$$F^\sharp(z) := \overline{F(\bar{z})}$$

を用いる. この右辺でバーは複素共役を表す.

Definition 3.1. 整函数 $E(z)$ で二条件

(HB1) $|E^\sharp(z)| < |E(z)|$ if $z \in \mathbb{C}_+$,

(HB2) $E(z) \neq 0$ if $z \in \mathbb{R}$

を満たすものの全体の集合を **Hermite-Biehler** クラスと呼び, 本論では $\mathcal{HB}$ と表す. $\mathcal{HB}$ の元はしばしば **de Branges** 函数とも呼ばれる.

Hermite-Biehler クラスの元から以下のように de Branges 空間を定めるとき, 本質的なのは比 $E^\sharp(z)/E(z)$ なので (HB2) の条件は本質的な制限ではない. また, 講演時には正規化条件 $E(0) = 1$ を課したが, これも本質的な制限ではない. 本論ではこの正規化条件は課さないこととした.

Example 3.2. $a > 0$ ならば指数函数 e^{-iaz} は $\mathcal{HB}$ に属す. 実際, $y > 0$ ならば $|e^{ia(x+iy)}| < |e^{-ia(x+iy)}|$ が成り立つことが容易に分かる. また, すべての根が下半平面 $\mathbb{C}_- = \{\Im z < 0\}$ に含まれるような多項式 $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ はみな $\mathcal{HB}$ に属す. これは $z \in \mathbb{C}_+$ かつ $w \in \mathbb{C}_-$ ならば $|z - \bar{w}| < |z - w|$ が成り立つという簡単な幾何的事実による.

3.2 Definition of de Branges spaces

まず $H^2 = H^2(\mathbb{C}_+)$ を上半平面上の Hardy 空間, 即ち, $\mathbb{C}_+$ 上の正則函数 F で

$$\|F\|_{H^2}^2 = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx < \infty$$

を満たすものの全体の成す Hilbert 空間とする. 各 $F \in H^2$ に対し, 実軸への制限

$$F|_{\mathbb{R}}(x) := \lim_{y \rightarrow 0} F(x+iy)$$

がほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ について定まり,

$$\|F\|_{H^2} = \|F|_{\mathbb{R}}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

が成り立つ. これにより H^2 は $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間と同一視される. 以後, $F|_{\mathbb{R}}$ も単に F と表す. この同一視により, $H^2 = F(L^2(0, \infty))$.

Definition 3.3. 与えられた $E \in \mathcal{HB}$ に対し,

$$\mathcal{H}(E) := \left\{ F \text{ entire} \mid \frac{F}{E} \in H^2 \text{ and } \frac{F^\sharp}{E} \in H^2 \right\}$$

と定める. さらに $\mathcal{H}(E)$ の元に対して,

$$\langle F, G \rangle_{\mathcal{H}(E)} := \left\langle \frac{F}{E}, \frac{G}{E} \right\rangle_{H^2} = \int_{\mathbb{R}} F(x) \overline{G(x)} \frac{dx}{|E(x)|^2}$$

によって内積を定める. このとき, $\mathcal{H}(E)$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}(E)}$ について再生核 Hilbert 空間を成す. これを E で生成された **de Branges** 空間とよぶ.

この de Branges 空間の定義は de Branges による [8, Section 19] とは異なるが, [23, Proposition 2.1] で示されているように, それと同値な定義である. ($\mathcal{H}(E)$ が Hilbert 空間を成すことは [8, Theorem 21].) De Branges 空間 $\mathcal{H}(E)$ の再生核は, 生成元 E を用いて

$$K(z, w) = \frac{\overline{E(z)}E(w) - \overline{E^\sharp(z)}E^\sharp(w)}{2\pi i(\bar{z} - w)}$$

で与えられる ([8, Theorem 19]). 即ち,

$$\langle F, K(z, \cdot) \rangle_{\mathcal{H}(E)} = F(z).$$

また, $F \in \mathcal{H}(E)$ であることと, $\|F\|_{\mathcal{H}(E)} < \infty$ かつ

$$|F(z)|^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}(E)}^2 K(z, z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

が成り立つことは同値である ([8, Theorem 20]). つまり, de Branges 空間 $\mathcal{H}(E)$ の元は各点での評価で特徴付けられる.

Example 3.4. Paley-Wiener 空間 $\text{PW}(a)$ は $e^{-iaz} \in \mathcal{HB}$ で生成された de Branges 空間 $\mathcal{H}(e^{-iaz})$ に他ならない. この意味で de Branges 空間は Paley-Wiener 空間の一般化になっている.

3.3 Orthogonal basis

De Branges 空間 $\mathcal{H}(E)$ における直交系を記述するため, $\theta \in \mathbb{R}$ で定まる整函数の族

$$S_\theta(z) := e^{i\theta} E(z) - e^{-i\theta} E^\sharp(z) \in \mathcal{H}(E) + z\mathcal{H}(E) \quad (4)$$

を導入する (文献によって S_θ の定義は $\pm 2i$ 倍異なることがある). Definition 3.1 から S_θ は実零点のみを持つことが分かる. それらの実零点によって $\mathcal{H}(E)$ の直交基底が次のように定まる ([8, Theorem 22] およびその証明と [8, Problem 48]).

Theorem 3.5. 整函数の集合

$$\left\{ \frac{S_\theta(z)}{z - w} \mid w \in \mathbb{R}, S_\theta(w) = 0 \right\}$$

は $S_\theta \notin \mathcal{H}(E)$ ならば $\mathcal{H}(E)$ の直交基底を成し, $S_\theta \in \mathcal{H}(E)$ ならば $\mathcal{H}(E)$ における $\mathbb{C}S_\theta$ の直交補空間の直交基底を成す. しかも $S_\theta \notin \mathcal{H}(E)$ ならば, $F \in \mathcal{H}(E)$ は

$$F(z) = \sum_{S_\theta(t)=0} F(t) \frac{K(t, z)}{K(t, t)}$$

と展開され,

$$\|F\|_{\mathcal{H}(E)}^2 = \sum_{S_\theta(t)=0} \frac{|F(t)|^2}{K(t, t)}$$

が成り立つ.

$S_\theta \notin \mathcal{H}(E)$ である $\theta \in [0, \pi)$ は高々一つに限ることが知られている ([14, Proposition 6.1]).

Example 3.6. $\text{PW}(a) = \mathcal{H}(e^{-iaz})$ について, Riemann-Lebesgue の定理により

$$S_\theta(z) = e^{i\theta} e^{-iaz} - e^{-i\theta} e^{iaz} \notin \text{PW}(a), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

したがって, 例えば $\theta = 0$ とすると,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \frac{\sin(az)}{z - w} \mid w \in \frac{\pi}{a} \mathbb{Z} \right\}$$

は $\text{PW}(a)$ の正規直交基底を成す. これより展開定理 (2) が従う. De Branges 空間 $(\mathbb{C}[z]_n, \langle \cdot, \cdot \rangle_\mu)$ の生成元 E は多項式なので, $S_\theta \in \mathcal{H}(E)$ となる $\theta \in [0, \pi)$ が丁度一つ存在することが分かる.

3.4 Abstract de Branges spaces

$E \in \mathcal{HB}$ で生成される de Branges 空間 $\mathcal{H}(E)$ は次の (dB1)–(dB4) を満たす ([8, Problem 50]).

(dB1) $\mathcal{H}$ は整函数 F たちが成す Hilbert 空間である.

(dB2) 各 $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対し, point evaluation $F \mapsto F(w)$ は $\mathcal{H}$ 上の連続な線形汎函数である.

(dB3) 各 $F \in \mathcal{H}$ に対し, $F^\sharp$ は再び $\mathcal{H}$ に属し, $\|F\|_{\mathcal{H}} = \|F^\sharp\|_{\mathcal{H}}$ を満たす.

(dB4) $F \in \mathcal{H}$ が実軸の外に零点 $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ を持つならば,

$$\frac{z - \bar{w}}{z - w} F(z) \in \mathcal{H} \quad \text{と} \quad \left\| \frac{z - \bar{w}}{z - w} F(z) \right\|_{\mathcal{H}} = \|F\|_{\mathcal{H}}$$

が成り立つ.

逆に Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が (dB1)–(dB4) を満たすとき,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(E), \quad \langle F, G \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F, G \rangle_{\mathcal{H}(E)}, \quad \forall F, G \in \mathcal{H} \quad (5)$$

を満たすような $E \in \mathcal{HB}$ が存在する ([8, Theorem 23]). つまり, de Branges 空間 $\mathcal{H}$ は公理 (dB1)–(dB4) で特徴付けられる. 応用上は公理 (dB1)–(dB4) によって de Branges 空間を定義した方が便利であることも多い.

Example 3.7. $\mu(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度で $2n$ 次までのモーメント

$$s_k := \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\mu(x) < \infty, \quad 0 \leq k \leq 2n$$

がすべて存在するものとする. このとき, n 次以下の多項式の空間 $\mathbb{C}[z]_n$ に

$$\langle f, g \rangle_{\mu} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$$

によって内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mu}$ を定めると, $(\mathbb{C}[z]_n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mu})$ は (dB1)–(dB4) を満たし de Branges 空間になる.

3.5 Change of generators

与えられた de Branges 空間 $\mathcal{H}$ に対して (5) を満たす $E \in \mathcal{HB}$ は複数存在するが, それは次のようにして尽くされる. まず $E \in \mathcal{HB}$ に対して,

$$A(z) := \frac{1}{2}(E(z) + E^\sharp(z)), \quad B(z) := \frac{i}{2}(E(z) - E^\sharp(z)).$$

と定めると, $A(z)$ と $B(z)$ は単純な実零点のみを持つ実整函数である. さらに, $A(z)$ と $B(z)$ は共通零点を持たず, これらの零点は実軸上で交互に現れる ([2, Lemma 5]).

いま $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対して, 行列の積により

$$\begin{bmatrix} A_M(z) \\ B_M(z) \end{bmatrix} := M \begin{bmatrix} A(z) \\ B(z) \end{bmatrix}, \quad E_M(z) := A_M(z) - iB_M(z)$$

と定める. このとき, E_M は $\mathcal{HB}$ に属し,

$$\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}(E_M)$$

が成り立つ. さらに $\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}(\tilde{E})$ が成り立つならば $\tilde{E} = E_M$ となるような $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ が存在する ([3, Theorem I]).

3.6 Multiplication by the independent variable

De Branges 空間 $\mathcal{H}(E)$ 上の掛け算作用素 M を,

$$\mathfrak{D}(M) := \{F \in \mathcal{H}(E) \mid zF(z) \in \mathcal{H}(E)\}$$

を定義域とし,

$$(MF)(z) := zF(z), \quad F \in \mathfrak{D}(M)$$

により作用するものとする. 掛け算作用素 M は de Branges 空間論において特別の意味をもつ.

Theorem 3.8. De Branges 空間 $\mathcal{H}(E)$ 上の掛け算作用素 M について次が成り立つ.

- (i) M は閉対称作用素である. 即ち, $\langle MF, G \rangle_{\mathcal{H}(E)} = \langle F, MG \rangle_{\mathcal{H}(E)}$ が任意の $F, G \in \mathfrak{D}(M)$ について成り立ち, M のグラフは $\mathcal{H}(E) \oplus \mathcal{H}(E)$ 内の閉集合である.
- (ii) M は不足指数 $(1, 1)$ をもつ. 即ち, 共役作用素の定義域の分解

$$\mathfrak{D}(M^*) = \mathfrak{D}(M) \oplus \text{Ker}(M^* - i) \oplus \text{Ker}(M^* + i)$$

において, $\dim \text{Ker}(M^* \pm i) = 1$ が成り立つ.

- (iii) M は対合 $\sharp$ に関して実である. 即ち, 任意の $F \in \mathfrak{D}(M)$ について $M(F^\sharp) = (MF)^\sharp$.

- (iv) $\mathfrak{D}(M)$ が $\mathcal{H}(E)$ 内で稠密でなければ, ある $\theta \in [0, \pi)$ に対して $\overline{(\mathfrak{D}(M))}^\perp = \mathbb{C}S_\theta$.

論文 [2] の冒頭で述べられているように, (i)–(iii) は (dB2)–(dB4) から従う (cf. [14, Proposition 4.2]). (iv) は [8, Theorem 29]. 前半の二項から, 掛け算作用素 M は自己共役拡張を持つ. それらは (4) の S_θ を用いて次のように記述される ([14, Propositions 4.6 and 6.1]).

Theorem 3.9. θ を $S_\theta \notin \mathcal{H}(E)$ を満たす実数とし, $S_\theta(w_0) \neq 0$ を満たす $w_0 \in \mathbb{C}$ を一つとる. このとき

$$\mathfrak{D}(M_\theta) := \left\{ G(z) = \frac{S_\theta(w_0)F(z) - S_\theta(z)F(w_0)}{z - w_0} \mid F(z) \in \mathcal{H}(E) \right\}$$

を定義域とし,

$$M_\theta G(z) = zG(z) + F(w_0)S_\theta(z)$$

により定まる作用素 M_θ は M の自己共役拡張作用素である. ここで定義域 $\mathfrak{D}(M_\theta)$ は w_0 の選択に依存しない. また, Theorem 3.5 の $S_\theta(z)/(z - w)$ は, w を固有値とする M_θ の固有函数である. さらに, M の標準的な自己共役拡張作用素全体は $\{M_\theta \mid \theta \in [0, \pi), S_\theta \notin \mathcal{H}(E)\}$ に一致する.

Example 3.10. Paley–Wiener 空間 $\text{PW}(a)$ において常に $S_\theta \notin \text{PW}(a)$ であったから,

$$\overline{\mathfrak{D}(M)} = \text{PW}(a).$$

多項式が成す de Branges 空間 $(\mathbb{C}[z]_n, \langle \cdot, \cdot \rangle_\mu)$ については明らかに,

$$\overline{\mathfrak{D}(M)} = \mathfrak{D}(M) = \mathbb{C}[z]_{n-1}, \quad \dim \mathbb{C}[z]_n / \overline{\mathfrak{D}(M)} = 1.$$

したがって, $S_\theta \notin \mathbb{C}[z]_n$ となる $\theta \in [0, \pi)$ が唯一つ存在し,

$$\mathcal{H}(E) = \mathfrak{D}(M) \oplus \mathbb{C}S_\theta.$$

3.7 Meromorphic inner functions

Paley–Wiener 空間は (1) に見られるように, Hardy 空間 H^2 の不変部分空間 $e^{2iaz}H^2$ の直交補空間により記述される. これは一般の de Branges 空間でも同様である.

Definition 3.11. 上半平面上の有界正則函数 $\Theta \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ は実軸上で殆ど至るところ $|\Theta(z)| = 1$ であるとき, **inner function** と呼ばれる. さらに, inner function Θ が $\mathbb{C}$ 上の有理型函数であるとき, **meromorphic inner function** (MIF) と呼ばれる.

Definition 3.12. Θ が inner function ならば $\Theta H^2 \subset H^2$ が成り立ち, 直交補空間

$$\mathcal{K}(\Theta) := H^2 \ominus \Theta H^2$$

が定義される. $\mathcal{K}(\Theta)$ を inner function Θ により生成される **model subspace** とよぶ.

E が $\mathcal{HB}$ の元ならば, $\frac{E^\sharp}{E}$ は MIF であり,

$$\mathcal{H}(E) = E \cdot \mathcal{K}\left(\frac{E^\sharp}{E}\right) = EH^2 \ominus E^\sharp H^2$$

が成り立つ. 逆に, 任意の MIF Θ はある $E \in \mathcal{HB}$ によって $\Theta = \frac{E^\sharp}{E}$ と表される ([13, Sections 2.3 and 2.4]). つまり E 倍の差を除き, de Branges 空間は MIF で生成される model subspace に他ならない.

3.8 Relation with de Branges–Rovnyak spaces

先に定義した de Branges 空間と名前は似ているが異なる概念として de Branges–Rovnyak 空間がある. 両者は一般には異なる概念だが, 後者を $H^2 = H^2(\mathbb{C}_+)$ に限定して考えると直接的な関係性がある.

有界線形作用素 $T : H^2 \rightarrow H^2$ に対して, $\mathcal{M}(T)$ を像 TH^2 上に内積を

$$\langle Ta, Tb \rangle_T = \langle a', b' \rangle_{H^2}$$

によって導入することで定まる Hilbert 空間とする. ここで a' は a の $(\text{Ker } T)^\perp$ への射影を表す. H^2 を $\mathbb{R}$ 上での境界値により $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ の部分空間と見なしたとき, L^2 から H^2 への射影を P とする. 各 $b \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対して H^2 上の Toeplitz 作用素 $T_b F = P(bF)$ ($F \in H^2$) が定まり, $\|T_b\| = \|b\|_{L^\infty}$. このとき, 定数でない上半平面上の有界正則函数 $b \in H^\infty = H^\infty(\mathbb{C}_+)$ で $\|b\|_{H^\infty} \leq 1$ を満たすものに対して, $1 - T_b T_{\bar{b}} \geq 0$ なので $(1 - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}$ が定まる. このとき,

$$\mathcal{H}(b) := \mathcal{M}((1 - T_b T_{\bar{b}})^{1/2})$$

は de Branges–Rovnyak 空間を成す. (より一般的な状況での de Branges–Rovnyak 空間の定義は瀬戸 [27, 第二部] を見よ.)

もし $b \in H^\infty$ が inner function ならば, de Branges–Rovnyak 空間 $\mathcal{H}(b)$ はモデル空間 $\mathcal{K}(b)$ に一致する. 従って適当な $E \in \mathcal{HB}$ をとれば $E\mathcal{H}(b)$ は E で生成される de Branges 空間に一致する. こういった意味で, de Branges 空間は de Branges–Rovnyak 空間の一種になっている.

4 De Branges subspaces

4.1 Ordering structure

Paley-Wiener 空間全体は $L^2(-a, a)$ の定義域の包含関係から従う自然な包含関係により全順序付けられる. これは de Branges 空間に対して一般化される ([8, Theorem 35]).

Definition 4.1. $\mathcal{H}$ を de Branges 空間とする. $\mathcal{H}$ の $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての部分空間 $\mathcal{L}$ がそれ自身 de Branges 空間であって, しかもそのノルムが $\mathcal{H}$ から誘導されるものと一致するとき, $\mathcal{L}$ を $\mathcal{H}$ の **de Branges 部分空間** とよぶ.

Theorem 4.2. De Branges 空間 $\mathcal{H}$ の de Branges 部分空間全体の集合 $\text{Sub } \mathcal{H}$ は, 包含関係に関して全順序集合を成す.

この包含関係は, 大まかには de Branges 空間の生成元 E の増大度により定まる.

Example 4.3. Paley-Wiener 空間 $\text{PW}(a)$ と $(\mathbb{C}[z]_n, \langle \cdot, \cdot \rangle_\mu)$ の de Branges 部分空間は次の通り:

$$\text{Sub } \text{PW}(a) = \{\text{PW}(b), 0 \leq b \leq a\}, \quad \text{Sub } \mathbb{C}[z]_n = \{\mathbb{C}[z]_k, 0 \leq k \leq n\}.$$

4.2 Canonical systems

De Branges 空間における de Branges 部分空間たちは単に全順序集合を成すだけでなく, それは一階常微分方程式系で統制される. それを述べるためまず次を定義する.

Definition 4.4. 区間 $I = (t_0, t_1)$ ($-\infty < t_0 < t_1 \leq \infty$) 上で定義された二次の実対称行列に値を持つ写像 $H : I \rightarrow \text{Sym}_2(\mathbb{R})$ は, 以下の三条件を満たすとき **Hamiltonian** と呼ばれる:

- (H1) 高々 Lebesgue 測度 0 の $t \in I$ の集合を除き, 実対称行列 $H(t)$ は非負値.
- (H2) どんな Lebesgue 測度が正の部分集合に制限しても H は零写像でない.
- (H3) H の各成分は Lebesgue 測度に関して局所可積分な函数.

与えられた Hamiltonian $H : I \rightarrow \text{Sym}_2(\mathbb{R})$ に対して, $z \in \mathbb{C}$ でパラメータ付けられた I 上の一階常微分方程式系

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} A(t, z) \\ B(t, z) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} H(t) \begin{bmatrix} A(t, z) \\ B(t, z) \end{bmatrix} \quad (6)$$

を I 上の **canonical system** とよぶ.

例えば左端点での初期条件

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \begin{bmatrix} A(t, z) \\ B(t, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の下で canonical system が (一意な) 解 ${}^t[A(t, z) \ B(t, z)]$ を持ったとする. このとき $E(t, z) := A(t, z) - iB(t, z)$ と定めると, $E(t, z)$ は各 $t \in I$ に対して $\mathcal{HB}$ に属す整函数になる. つまり canonical system から $\mathcal{HB}$ の元が得られる. de Branges は $\mathcal{HB}$ の元から Hamiltonian が本質的に唯一つ定まることを示した.

4.3 Structure Hamiltonian

まず用語を一つ用意しておく.

Definition 4.5. I 上の Hamiltonian H に対して, 空でない開区間 $(a, b) \subset I$ が **indivisible** (for H) であるとは, (a, b) 上の $\mathbb{C}$ 値関数 $h(t)$ と $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して, H が (a, b) 上で

$$H(t) = h(t) \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad t \in (a, b) \text{ a.e.}$$

と表されることを言う. またこのとき, indivisible interval (a, b) は θ 型であるという. また, $t \in I$ がどの indivisible interval の内点でもないとき **regular** であるといい, そのような I の点全体の集合を I_{reg} と表す.

de Branges は次の逆定理を示した ([5, Theorem V], [8, Theorem 40]).

Theorem 4.6. 各 $E \in \mathcal{HB}$ に対し, ある区間 $I = (t_0, t_1]$ 上で定義された Hamiltonian H で, 次の条件を満たすものが存在する:

- (i) ${}^t[A(t, z) \ B(t, z)]$ ($t \in I, z \in \mathbb{C}$) を H で定まる canonical system (6) の解で初期条件

$$\begin{bmatrix} A(t_1, z) \\ B(t_1, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(z) \\ B(z) \end{bmatrix}$$

を満たす唯一のものとする. このとき, すべての $t \in I$ について

$$E_t(z) := A(t, z) - iB(t, z)$$

は $\mathcal{HB}$ に属す.

- (ii) $\text{Sub } \mathcal{H}(E) = \{\mathcal{H}(E_t) \mid t \in I_{\text{reg}}\}$.

- (iii) 各点 $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ において,

$$K_t(z, z) := \frac{\overline{A(t, z)}B(t, z) - A(t, z)\overline{B(t, z)}}{\pi(z - \bar{z})} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow t_0)$$

が成り立つ.

Definition 4.7. Theorem 4.6 のような H を $\mathcal{H}(E)$ の **structure Hamiltonian** とよぶ.

Theorem 4.6 の $H(t)$ は, 異なるものたちが絶対連続な変数変換 $t \mapsto x(t)$ で逆変換 $x \mapsto t(x)$ も絶対連続なもので移り合うという意味で一意である. 生成元 E を $M \in SL_2(\mathbb{R})$ で変換すれば, 対応する H は M による共役に移る. これらの性質から, 上記の structure Hamiltonian という名称は妥当に思われるであろう.

Example 4.8. Paley-Wiener 空間 $\text{PW}(a) = \mathcal{H}(e^{-iaz})$ の structure Hamiltonian H_a (の一つ) は $[0, a]$ でつねに単位行列に値を持つ写像である. また,

$$A(t, z) = \frac{1}{2}(e^{-itz} + e^{itz}) = \cos(tz), \quad B(t, z) = \frac{i}{2}(e^{-itz} - e^{itz}) = \sin(tz)$$

であり, これらは canonical system

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \cos(tz) \\ \sin(tz) \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} H_a(t) \begin{bmatrix} \cos(tz) \\ \sin(tz) \end{bmatrix} \quad (z \in \mathbb{C})$$

を満たす. 更に $\text{PW}(t)$ の再生核について,

$$K_t(z, w) = \frac{\cos(t\bar{z})\sin(tw) - \cos(tz)\sin(t\bar{w})}{\pi(w - \bar{z})} = \frac{\sin(t(w - \bar{z}))}{\pi(w - \bar{z})} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0.$$

Example 4.9. 多項式が成す de Branges 空間 $\mathbb{C}[z]_n$ の structure Hamiltonian は Winkler [30, Section 4] にあるように, 複数の indivisible intervals の閉包上で定義されたものになる. いま $E(z) = z^3 + 2iz^2 - z - i \in \mathcal{HB}$ を例にとると, まず $A(z) = z^3 - z$, $B(z) = 1 - 2z^2$. このとき,

$$t_0 := 0, \quad t_1 := \frac{1}{2}, \quad t_2 := \frac{1}{2} + 4, \quad t_3 := \frac{1}{2} + 4 + \frac{1}{2}$$

として,

$$H(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & t_0 \leq t < t_1, \quad t_2 \leq t \leq t_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & t_1 \leq t < t_2 \end{cases} \quad (7)$$

と定めると, この H は $I = [t_0, t_3] = [0, 5]$ 上の Hamiltonian である. ここで $(t_0, t_1) = (0, 1/2)$ と $(t_2, t_3) = (9/2, 5)$ は $\pi/2$ 型, $(t_1, t_2) = (1/2, 9/2)$ は 0 型 の indivisible intervals になっている. この H に付随する canonical system の解の一つは

$$A(t, z) = \begin{cases} -tz, & t_0 \leq t < t_1, \\ -\frac{1}{2}z, & t_1 \leq t < t_2, \\ (2t-9)z^3 - (t-4)z, & t_2 \leq t \leq t_3, \end{cases} \quad B(t, z) = \begin{cases} 1, & t_0 \leq t < t_1, \\ 1 + \frac{1}{4}(1-2t)z^2, & t_1 \leq t < t_2, \\ 1 - 2z^2, & t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

で与えられ, $A(t_3, z) = A(z)$, $B(t_3, z) = B(z)$ である. また, (t_0, t_1) 上で再生核は $K_t(z, w) = t/\pi$ なので, $K_t(z, z) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow t_0 = 0$) である. さらに, $I_{\text{reg}} = \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ であって,

$$E_{t_0}(z) = -i, \quad E_{t_1}(z) = -\frac{1}{2}z - i, \quad E_{t_2}(z) = -\frac{1}{2}z - i(1 - 2z^2), \quad E_{t_3}(z) = E(z)$$

だから, $\mathcal{H}(E_{t_0}) = \{0\}$, $\mathcal{H}(E_{t_1}) = \mathbb{C}[z]_0 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}(E_{t_2}) = \mathbb{C}[z]_1$, $\mathcal{H}(E_{t_3}) = \mathbb{C}[z]_2$. これらは $\mathcal{H}(E) = \mathbb{C}[z]_2$ の de Branges 部分空間を尽くしている.

$\mathbb{C}[z]_n$ の structure Hamiltonian の構成方法は [5] の Theorem VII などの証明が参考になる.

Remark. De Branges は与えられた Hamiltonian H がいつ structure Hamiltonian になっているかという問題を提起し, [8, Theorem 41] で部分的な解答を与えている. 最終的な解答は Romanov-Woracek [25] で得られた.

5 Generalized Fourier transforms

5.1 L^2 -space attached to a Hamiltonian

De Branges 空間の structure Hamiltonian H に付随した canonical system の解を用いて, Fourier 変換が一般化される. まず Paley-Wiener 空間の場合に Fourier 変換の原像たちが成す空間 $L^2(-a, a)$ にあたるものを導入する.

H を $I = (t_0, t_1)$ 上の Hamiltonian とする. $\mathcal{L}(H)$ をコンパクト台を持つ I 上の連続関数たちが成すベクトル値関数 $V(t) = {}^t[f(t) \ g(t)]$ の空間に

$$\|V\|_H^2 := \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_1} [f(t) \ g(t)] H(t) \begin{bmatrix} \overline{f(t)} \\ \overline{g(t)} \end{bmatrix} dt < \infty$$

によってノルムを定めたものとし,

$$\mathcal{L}^\circ(H) := \{V(t) \in \mathcal{L}(H) : \|V\|_H = 0\}$$

とおく. このとき商空間 $\mathcal{L}(H)/\mathcal{L}^\circ(H)$ は

$$\|V + \mathcal{L}^\circ(H)\| := \|V\|_H$$

により定められるノルムによって pre-Hilbert 空間を成す. これを完備化して得られる Hilbert 空間を $L^2(H)$ とする.

さらに, H が indivisible intervals を持たないならば $\widehat{L}^2(H)$ を $L^2(H)$ 自身とし, indivisible intervals を持つときは, $\widehat{L}^2(H)$ を $L^2(H)$ の元 $V(t) = {}^t[f(t) \ g(t)]$ であって, 各 θ 型の indivisible interval J 上で

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} = c_{J,\theta,V} \in \mathbb{C}$$

を満たすものの全体が成す部分空間とする.

Example 5.1. $\text{PW}(a)$ の structure Hamiltonian H_a は $[0, a]$ 上で単位行列に値をとる定数写像だったので,

$$\widehat{L}^2(H_a) = L^2(H_a) = L^2(0, a) \oplus L^2(0, a) = \left\{ \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} : f(t), g(t) \in L^2(0, a) \right\}.$$

Example 5.2. Example 4.9 の Hamiltonian H について, $\mathcal{L}^\circ(H)$ の元は

$$V^\circ(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t_0 \leq t < t_1), \quad \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(t) \end{bmatrix} \quad (t_1 \leq t < t_2), \quad \begin{bmatrix} f_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t_2 \leq t < t_3)$$

という形をした元なので, $\widehat{L}^2(H)$ の元は

$$V(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (t_0 \leq t < t_1), \quad \begin{bmatrix} c_2 \\ g_2(t) \end{bmatrix} \quad (t_1 \leq t < t_2), \quad \begin{bmatrix} f_3(t) \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (t_2 \leq t < t_3)$$

という形の関数の類から成る. ここで c_1, c_2, c_3 は定数, $f_1(t), g_2(t), f_3(t)$ は可積分関数である. 特に $\widehat{L}^2(H)$ は 3 次元なので, $\mathcal{H}(E) = \mathbb{C}[z]_2$ と次元が一致することが観察される.

5.2 De Branges transform/Weyl transform

H を de Branges 空間 $\mathcal{H}(E)$ の structure Hamiltonian とし, H で定まる canonical system (6) の解を ${}^t[A(t, z) \ B(t, z)]$ とする. このとき

$$K(w, z) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_1} [A(t, z) \ B(t, z)] H(t) \begin{bmatrix} A(t, \bar{w}) \\ B(t, \bar{w}) \end{bmatrix} dt$$

が成り立つので, t の関数として ${}^t[A(t, \bar{w}) \ B(t, \bar{w})]$ は $\widehat{L}^2(H)$ に属す. この $t \mapsto {}^t[A(t, \bar{w}) \ B(t, \bar{w})]$ と $z \mapsto K(w, z)$ の関係は

$$(\mathfrak{W}V)(z) := \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_1} [A(t, z) \ B(t, z)] H(t) V(t) dt.$$

によりユニタリ写像 $\mathfrak{W} : \widehat{L}^2(H) \rightarrow \mathcal{H}(E)$ へ拡張される. 次の例のように, これは Fourier 変換の一般化になっており, **de Branges transform**, **Weyl transform**, あるいは **generalized Fourier transform** などと呼ばれる.

Example 5.3. $PW(a)$ の場合, ${}^t[f(t) \ g(t)] \in L^2(0, a) \oplus L^2(0, a) = \widehat{L}^2(H_a)$ であるとき, 負の t に対して $f(-t) := f(t)$ and $g(-t) := -g(t)$ とおくことにより, de Branges transform は, 次のようにして通常の Fourier 変換に書き換えられる.

$$\begin{aligned} (\mathfrak{W} \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix})(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^a [\cos(tz) \ \sin(tz)] H_a(t) \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a (f(t) - ig(t)) e^{izt} dt. \end{aligned}$$

6 文献案内

De Branges 空間に関する文献としてまず挙げられるのは, de Branges 自身による著書 [8] である. しかしこれは読み易いものとは言いがたい. それは主要な結果の証明や, それに用いる命題の多くが練習問題になっており, 理論の詳細を追うのが困難なためである. もちろん練習問題に解答や略解などは付いていない. こういった理由で, 以前は [8] で述べられている諸結果の証明は原論文 [2, 3, 4, 5, 6, 7] を参照するか, 自分で練習問題を解くしかなかった. しかし最近になって Linghu [20] により多くの練習問題の解答例が提供され, [8] はある程度は楽に追えるようになった. また, 幾つかの結果の証明は Linghu の学位論文 [21] でも述べられている.

De Branges 空間の理論に関する概説としては, 論文集 [1] に収録されている Woracek [32] が基礎事項が簡潔にまとめられていて良い. 本解説もこれを参考にした部分が多い. 同論文集には de Branges の共同研究者であった Rovnyak による歴史的観点からの解説 [26] や, Winkler による canonical systems に関する概説 [31] も収録されており, それらの参考文献表と併せて de Branges 空間の理論の入門的学習に役立つ. この論文集にはこのほかにも, de Branges 空間とその周辺理論について様々な観点から解説した概説が多く収録されている. 基礎事項のまとめとしては, Remling の論文 [23] や著書 [24] にある de Branges 空間に関する節も簡潔で見やすい.

いっぽう, 例えば小谷 [16] で述べられているように, $[0, \ell)$ ($\ell \leq \infty$) 上の左連続単調増大関数 $m(x)$ により定まる拡散過程型作用素 $-d^2/(dm dx)$ から自然にある de Branges 空間が定まり, M. G. Kreĭn の逆問題 (cf. [17, 第 5 章]) の解法に用いられる. Kreĭn の string equation $dy'(x) + zy(x)dm(x) = 0$ は canonical system (6) に帰着されるので, de Branges の de Branges 空間の理論を用いた canonical system (6) の逆問題の解法は, Kreĭn の仕事の一般化になっている. Schrödinger 型を含む Sturm-Liouville 型微分方程式も canonical system (6) に帰着されるから, de Branges 空間の理論はもともと微分方程式と関連が深い. 微分方程式の観点からの de Branges 空間入門としては Dym [12] が良い. De Branges 空間の理論としては特別な場合だけにはなるものの, それだけに筋道や目的が見えやすいし, 証明なども追える形で述べられている.

7 数論への応用

最近になって de Branges 空間の理論が筆者が専門とする数論, 特にゼータ函数論, に応用されるようになってきたので, 最後にそれらを紹介する. ゼータ函数の原型は $\Re(s) > 1$ において

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

で定義される Riemann ゼータ函数である. 右辺は素数 p 全体を渡る無限積で, Euler 積表示と呼ばれる. Riemann ゼータ函数は $s = 1$ で一位の極を持つ他は正則な $\mathbb{C}$ 上の函数に解析接続される. このとき, 垂直帯領域 $0 < \Re(s) < 1$ に含まれる $\zeta(s)$ の零点は非自明零点と呼ばれ, Euler 積を通じた素数分布論との関係から, 数論において長年の研究対象となってきた. 端的な例は有名な

未解決問題である Riemann 予想であろう. これは非自明零点の実部がみな $1/2$ であることを予想する. Lagarias [18, 19] は $\xi(s) := s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ としたとき, Riemann 予想の下で

$$E_\zeta(z) := \xi(1/2 - iz) + \xi'(1/2 - iz) \quad \text{や} \quad E_{\zeta,\omega}(z) := \xi(1/2 + \omega - iz) \quad (\omega > 0)$$

が Hermite-Biehler クラスに属することを見出し, ゼータ関数の非自明零点の研究に de Branges 空間の理論を用いることを提案した. 筆者が de Branges 空間を勉強するきっかけになったのがこれらの論文であった. Lagarias は E_ζ や $E_{\zeta,\omega}$ で生成される de Branges 空間の structure Hamiltonian がどんなものかを問うたが, 構成法などには言及しなかった. その後, $E_{\zeta,\omega}$ で生成される de Branges 空間の structure Hamiltonian は [29] で研究された.

Riemann 予想はゼータ関数の非自明零点の実部に関する予想であるが, これを仮定したうえで虚部の分布もよく研究されている. 代表的なのが Montgomery-Odlyzko 予想に代表される, 非自明零点の虚部の対相関 (pair correlation) に関する研究である. Carneiro-Chandee-Littmann-Milinovich [9] は de Branges 空間における extremal problems をこの対相関の研究に応用した. 彼らは高々 exponential type π の整関数であって

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 d\mu(x) < \infty, \quad d\mu(x) = \left\{ 1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 \right\} dx$$

を満たすものの全体が成す空間 $\mathcal{B}_2(\mu)$ が de Branges 空間であることを利用して, 再生核の具体的な決定と展開定理 (Theorem 3.5) の応用によって非自明零点の対相関に関する結果を得ている.

また, Montgomery が対相関に関する最初の論文 [22] で既に述べている通り, 対相関の研究は単純な非自明零点の割合を調べるのにも役立つ. 宗野 [28] は [9] の方法を Riemann ゼータ関数の一般化である Dirichlet L 関数の零点の研究に応用し, 原始的な Dirichlet 指標により定まる Dirichlet L 関数について, 非自明零点の中で単純零点の占める割合に関する既存の結果を改良した.

ゼータ関数や L 関数の研究においては, 単独の L 関数の零点分布だけでなく, L 関数の family における零点分布も研究される. Katz-Sarnak [15] は自然な ‘良い’ family には 5 種の symmetry type G があり, 特定の family に属す L 関数の ‘虚部が小さい非自明零点たち’ の分布は, G で定まる具体的な密度関数 $W_G(x)$ を持つことを予想した. Carneiro-Chandee-Milinovich [10] は, 高々 exponential type $\pi\Delta$ ($\Delta > 0$) の整関数であって

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2 d\mu(x) < \infty, \quad d\mu(x) = W_G(x) dx$$

を満たすものの全体が成す de Branges 空間 $\mathcal{H}_{G,\pi\Delta}$ の再生核を具体的に決定し, 例えば, Katz-Sarnak が分類した family に属す L 関数たちの函数等式の中心点 $s = 1/2$ における零点の平均的位数を評価するのに応用している.

8 謝辞

講演および本記事執筆の機会を与えてくださいました開催責任者の澤野 嘉宏氏, 瀬戸 道生氏, 菱川 洋介氏にこの場を借りて感謝申し上げます. また研究発表ならびに研究交流の場として研究会会場を提供して下さった京都大学数理解析研究所にも感謝致します. なお, この研究は基盤研究 (C) (研究代表者: 鈴木正俊, 研究課題番号: 17K05163, 23K03050) の助成を受けています.

References

- [1] D. Alpay (ed.) Operator Theory, Springer, 2015.

- [2] L. de Branges, Some Hilbert spaces of entire functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 840–846.
- [3] L. de Branges, Some Hilbert spaces of entire functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **96** (1960), 259–295.
- [4] L. de Branges, Some Hilbert spaces of entire functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 129–134.
- [5] L. de Branges, Some Hilbert spaces of entire functions. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **99** (1961), 118–152.
- [6] L. de Branges, Some Hilbert spaces of entire functions. III, *Trans. Amer. Math. Soc.* **100** (1961), 73–115.
- [7] L. de Branges, Some Hilbert spaces of entire functions. IV, *Trans. Amer. Math. Soc.* **105** (1962), 43–83.
- [8] L. de Branges, Hilbert spaces of entire functions, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.* 1968.
- [9] E. Carneiro, A. Chirre, F. Littmann, M. B. Milinovich, Hilbert spaces and the pair correlation of zeros of the Riemann zeta-function, *J. Reine Angew. Math.* **725** (2017), 143–182.
- [10] E. Carneiro, A. Chirre, M. B. Milinovich, Hilbert spaces and low-lying zeros of L -functions, *Adv. Math.* **410** (2022), part B, Paper No. 108748.
- [11] B. Conrey, Riemann’s hypothesis, *The legacy of Bernhard Riemann after one hundred and fifty years. Vol. I*, 107–190, Adv. Lect. Math. (ALM), 35.1, Int. Press, Somerville, MA, 2016.
- [12] H. Dym, An introduction to de Branges spaces of entire functions with applications to differential equations of the Sturm-Liouville type, *Advances in Math.* **5** (1970), 395–471.
- [13] V. Havin, J. Mashreghi, Admissible majorants for model subspaces of H^2 . I. Slow winding of the generating inner function, *Canad. J. Math.* **55** (2003), no. 6, 1231–1263.
- [14] M. Kaltenbäck, H. Woracek, Pontryagin spaces of entire functions. I, *Integral Equations Operator Theory* **33** (1999), no. 1, 34–97.
- [15] N. Katz, P. Sarnak, Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy, American Mathematical Society Colloquium Publications, 45, *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1999.
- [16] 小谷 真一, M. G. Krein の逆問題について, 数学, 27 卷 4 号, 347–357.
- [17] 小谷 真一, 俣野 博微分方程式と固有関数展開, 岩波書店, 2006.
- [18] J. C. Lagarias, Zero spacing distributions for differenced L -functions, *Acta Arith.* **120** (2005), no. 2, 159–184.
- [19] J. C. Lagarias, Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L -functions, *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, 365–377, *Springer, Berlin*, 2006.
- [20] D. Linghu, Solution to “Hilbert Spaces of Entire Functions”, https://web.archive.org/web/20150514020454/http://www.its.caltech.edu/~dlinghu/research/index_files/dB-problems.pdf, 2015.

- [21] D. Linghu, Chains of Non-Regular de Branges Spaces, dissertation (Ph.D.), California Institute of Technology, 2015.
- [22] H. L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, *Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972)*, pp. 181–193, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.
- [23] C. Remling, Schrödinger operators and de Branges spaces, *J. Funct. Anal.* **196** (2002), no. 2, 323–394.
- [24] C. Remling, Spectral theory of canonical systems, De Gruyter Studies in Mathematics, 70, *De Gruyter, Berlin*, 2018.
- [25] R. Romanov, H. Woracek, Canonical systems with discrete spectrum, *J. Funct. Anal.* **278** (2020), no. 4, 108318.
- [26] J. Rovnyak, Hilbert spaces of entire functions: early history, *Operator Theory*, D. Alpay (eds.), *Springer, Basel*, 2015, pp. 473–487.
- [27] 瀬戸 道生 再生核と重み付き無限グラフ上の準同型写像について, 数理解析研究所講究録 No.1980 再生核の応用についての総合的な研究 (2016), 81–94
- [28] K. Sono, A note on simple zeros of primitive Dirichlet L -functions, *Bull. Aust. Math. Soc.* **93** (2016), no. 1, 19–30.
- [29] M. Suzuki, Hamiltonians arising from L -functions in the Selberg class, *J. Funct. Anal.* **281** (2021), no. 8, Paper No. 109116.
- [30] H. Winkler, The inverse spectral problem for canonical systems, *Integral Equations Operator Theory* **22** (1995), no. 3, 360–374.
- [31] H. Winkler, Two-dimensional Hamiltonian systems, *Operator Theory*, D. Alpay (eds.), *Springer, Basel*, 2015, pp. 525–547.
- [32] H. Woracek, De Branges spaces and growth aspects, *Operator Theory*, D. Alpay (eds.), *Springer, Basel*, 2015, pp. 489–523.