Littlewood–Paley characterization for mixed Morrey spaces

中央大学　野ヶ山徹 *
Toru Nogayama
Department of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering,
Chuo University

1 Introduction

Morrey 空間は，1938 年に C.B.Morrey [5] によって 2 階楕円型偏微分方程式の解の局所的な振る舞いを解析するためにその原型となるノルムが導入され，1969 年の Peetre による survey [7] にて現在の形に定式化された．その後，この空間自身の研究のみならず，関数空間として拡張されたり偏微分方程式へ応用されるなど，多くの研究がなされている．Morrey 空間については [8] の本に非常に多くの結果がまとまっている．本講演では，その一般化の 1 つである混合 Morrey 空間の Littlewood–Paley 分解を用いた特徴付けについて考える．まずはじめに Morrey 空間の定義を与える．パラメータ p, q は $1 \le q \le p < \infty$ を満たすとする．このとき，可測関数 f に対して，Morrey ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_q}$ を

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup\left\{ |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(x)|^q \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \ : \ Q \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の立方体} \right\}$$

と定義し，Morry 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} < \infty$ を満たす可測関数 f 全体の集合とする．

次に，Morrey 空間の一般化である混合 Morrey 空間の定義を与える．

Definition 1.1. [6] パラメータ $\vec{q} = (q_1, \ldots, q_n) \in [1, \infty]^n$ と $p \in [1, \infty)$ は

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j} \ge \frac{n}{p}$$

を満たすとする．このとき，混合 Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ を次のノルムが有限であるような可測関数 f 全体の集合と定める:

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \equiv \sup\left\{ |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{q_j}\right)} \|f\chi_Q\|_{\vec{q}} \ : \ Q \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の立方体} \right\}.$$

ここでノルム $\|\cdot\|_{\vec{q}}$ は混合 Lebesgue ノルム

$$\|f\|_{\vec{q}} \equiv \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^{q_1} \mathrm{d}x_1 \right)^{\frac{q_2}{q_1}} \mathrm{d}x_2 \right)^{\frac{q_3}{q_2}} \cdots \mathrm{d}x_n \right)^{\frac{1}{q_n}}$$

を表す.

混合 Lebesgue 空間 $L^{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ は [1] にて Benedek と Panzone より導入された関数空間である．

*address: Department of Mathematics, Chuo University, Bunkyo-ku 112-8551, Tokyo, Japan
e-mail:toru.nogayama@gmail.com　本研究は JSPS 科研費 22KJ2771 の助成を受けたものである．

2 主結果

主結果を述べるために，次の準備をしておく．$r>0$ に対し，$B(r)$ で原点を中心とする半径 r の球を表す．$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を $\chi_{B(2)} \le \psi \le \chi_{B(4)}$ を満たすように取り，$\varphi \equiv \psi - \psi(2\cdot)$ とおく．また，$j \in \mathbb{Z}$ に対し，$\varphi_j \equiv \varphi(2^{-j}\cdot)$ と書くことにする．$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれフーリエ変換，フーリエ逆変換を表す.

Theorem 2.1. パラメータ $p, \vec{q}$ は $1 < p, \vec{q} < \infty, \dfrac{n}{p} \le \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{q_j}$ を満たすとする．このとき，

(1) 任意の $f \in \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ に対し，$f = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f]$ が $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ の汎弱位相の意味で成り立ち，

$$\left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f] \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \sim \|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}$$

が成り立つ.

(2) $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ が

$$\left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f] \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} < \infty$$

を満たすとする．このとき，極限 $F \equiv \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f]$ が $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ の汎弱位相の意味で成り立ち，

$$\left\| \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f] \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \sim \|F\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}$$

が成り立つ.

通常の Morrey 空間に対する Theorem 2.1 は，Izumi, Sawano, Tanaka ([3]) により調べられており，Theorem 2.1 において $q_1 = \ldots = q_n = q$ とおくことで彼らの結果を再現できる．また，Mazzucato は通常の Morrey 空間に対する Theorem 2.1 (1) のノルム評価を [4] にて導出している．さらに，Torres と Ward は混合 Lebesgue 空間の Littlewood–Paley 分解による特徴付けを [9] にて与えている.

Remark 2.2. Theorem 2.1 (2) より，$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$F = \lim_{J\to\infty} \sum_{j=-J}^{J} \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f]$$

が $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ の汎弱位相で成り立ち，$F \in \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ である．このとき，すべての混合 Morrey 空間の前双対の元 h で $0 \notin \operatorname{supp} h$ であるものに対して

$$\langle \mathcal{F}(f-F), h \rangle = \lim_{J\to\infty} \left\langle \sum_{|j|\ge J+1} \varphi_j \mathcal{F} f, h \right\rangle = 0$$

となるので，$\mathcal{F}(f-F)$ は原点に台をもつ．したがって，$f-F$ は多項式でなければならない.

3 熱半群によるノルム収束の特徴付け

Theorem 2.1 では $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f]$ が $\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ の汎弱位相の意味で成り立つことを主張しているが，ノルム収束が成り立つときの特徴付けを与えることは関数空間を調べる上で重要なことの 1 つである．実はこれは熱半群を用いて特徴付けることができる．ここで，熱半群 $e^{t\Delta}$ は $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$e^{t\Delta} f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-t|\cdot|^2} \mathcal{F} f\right](x) = \frac{1}{\sqrt{(4\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) f(y) \mathrm{d}y$$

である．

先行研究として，非斉次型の Littlewood–Paley 分解の熱半群による特徴付けがある．

Lemma 3.1 ([2, Theorem 1.2])**.** $1 < q \le p < \infty$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} f = \mathcal{F}^{-1}[\psi \mathcal{F} f] + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f] \quad & \mathit{in}\ \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n) \\ \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} e^{t\Delta} f = f \quad & \mathit{in}\ \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

このことから，高周波部分の分解と熱半群の t を 0 に近づけたときの特徴付けが対応することが分かる．そのため，低周波部分の分解は熱半群の t を無限大にしたときの特徴付けが対応すると推測でき，実際にそれは正しい．

Theorem 3.2. パラメータ $p, \vec{q}$ は $1 < p, \vec{q} < \infty$, $\frac{n}{p} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{q_j}$ を満たすとする．このとき，

$$\begin{aligned} f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\varphi_j \mathcal{F} f] \quad & \mathit{in}\ \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) \\ \Longleftrightarrow \quad \lim_{t \to 0} \left(e^{t\Delta} f - e^{t^{-1}\Delta} f\right) = f \quad & \mathit{in}\ \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Proof. $\Longleftarrow$ のみ示す．逆は Littlewood–Paley 分解と熱半群の減衰を利用して

$$\lim_{t \to 0} e^{t\Delta} f = f, \quad \lim_{t \to \infty} e^{t\Delta} f = f \quad \text{in } \mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つことをそれぞれ示せばよい．仮定より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $t \in (0, \delta)$ に対し

$$\left\| (e^{t\Delta} f - e^{t^{-1}\Delta} f) - f \right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \le \varepsilon \tag{3.1}$$

が成り立つ．

そのような t を 1 つ固定し，$J\in\mathbb{N}$ を任意に大きく取っておく．このとき，三角不等式により

$$
\begin{aligned}
\left\| f-\sum_{|j|\le J}\mathcal{F}^{-1}[\varphi_j\mathcal{F}f]\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} &\le \left\| f-(e^{t\Delta}f-e^{t^{-1}\Delta}f)\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \\
&\quad+\left\|(e^{t\Delta}-e^{t^{-1}\Delta})\left(f-\sum_{|j|\le J}\mathcal{F}^{-1}[\varphi_j\mathcal{F}f]\right)\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \\
&\quad+\left\|\left(\sum_{|j|\le J}\mathcal{F}^{-1}\left[\varphi_j\mathcal{F}\left((e^{t\Delta}-e^{t^{-1}\Delta})f-f\right)\right]\right)\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \\
&\equiv \mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}
\end{aligned}
$$

と 3 つに分解する．

I は仮定 (3.1) から $\mathrm{I}\le\varepsilon$ となる．III については，$(e^{t\Delta}-e^{t^{-1}\Delta})f-f\in\mathcal{M}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ なので，duality argument と Theorem 2.1 (1)，(3.1) により，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III}\lesssim\left\|\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}^{-1}\left[\varphi_j\mathcal{F}\left((e^{t\Delta}-e^{t^{-1}\Delta})f-f\right)\right]\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} &\lesssim \left\|(e^{t\Delta}-e^{t^{-1}\Delta})f-f\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \\
&\le\varepsilon
\end{aligned}
$$

となる．II を評価するために次のような核を考える：

$$
m_t(\xi)=\frac{e^{-t|\xi|^2}-e^{-t^{-1}|\xi|^2}}{|\xi|^2}(1+|\xi|^4).
$$

$e^{-t|\xi|^2}-e^{-t^{-1}|\xi|^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ なので，任意の多重指数 α に対し $|\partial^\alpha m_t(\xi)|\lesssim|\xi|^{-|\alpha|}$ が成り立つ．したがって，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}&=\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[m_t\times\frac{|\cdot|^2}{1+|\cdot|^4}\mathcal{F}\left(f-\sum_{|j|\le J}\mathcal{F}^{-1}[\varphi_j\mathcal{F}f]\right)\right]\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}} \\
&\lesssim\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{|\cdot|^2}{1+|\cdot|^4}\mathcal{F}\left(\sum_{|j|>J}\mathcal{F}^{-1}[\varphi_j\mathcal{F}f]\right)\right]\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}\sim\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{|j|>J}\frac{|\cdot|^2}{1+|\cdot|^4}\varphi_j\mathcal{F}f\right]\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}
\end{aligned}
$$

を得る．φ_j のサポート条件と三角不等式，Theorem 2.1 (1) より

$$
\mathrm{II}\lesssim\sum_{|j|>J}\frac{(2^j)^2}{1+(2^j)^4}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\varphi_j\mathcal{F}f\right]\right\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}\lesssim\sum_{|j|>J}\frac{(2^j)^2}{1+(2^j)^4}\|f\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}
$$

となり，

$$
\sum_{|j|>J}\frac{(2^j)^2}{1+(2^j)^4}\le\sum_{j<-J}4^j+\sum_{j>J}4^{-j}\sim 4^{-J}
$$

なので，J の任意性から，$\mathrm{II}\lesssim\varepsilon$ をえる．以上より，求めたい結果が従う．∎

この特徴付けから,（混合）モレー空間の閉部分空間を次のように分類できる.

Definition 3.3. $1 < p, \vec{q} < \infty$ $\dfrac{n}{p} \le \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{q_j}$ とする．このとき,

$$\overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in \mathcal{M}^p_{\vec{q}} : e^{t\Delta} f \to f \text{ in } \mathcal{M}^p_{\vec{q}} \text{ as } t \to 0 \right\}.$$

$$\overset{\square}{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in \mathcal{M}^p_{\vec{q}} : e^{t\Delta} f \to 0 \text{ in } \mathcal{M}^p_{\vec{q}} \text{ as } t \to \infty \right\}.$$

$$\overset{\triangle}{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) \equiv \left\{ f \in \mathcal{M}^p_{\vec{q}} : (e^{t\Delta} - e^{t^{-1}\Delta}) f \to f \text{ in } \mathcal{M}^p_{\vec{q}} \text{ as } t \to 0 \right\}.$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) \equiv \overline{C^\infty_c(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_{\vec{q}}}}.$$

これらの部分空間は以下のような関係になっている.

Proposition 3.4. $1 < p, \vec{q} < \infty$ *and* $\dfrac{n}{p} \le \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{q_j}$ とする．このとき,

$$\widetilde{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) \subset \overset{\triangle}{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n), \qquad \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) \cap \overset{\square}{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n) = \overset{\triangle}{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n).$$

特に $\overset{\square}{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ と $\overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_{\vec{q}}(\mathbb{R}^n)$ は互いに互いを含まないことが以下の例で分かる．簡単のために $n = 1$，つまり通常の Morrey 空間の場合を考える.

Example 3.5. $n = 1$, $1 < q < p < \infty$ とし，$\varepsilon \in (0, p)$ をとる．$\tilde{q} = \dfrac{p - \varepsilon}{p} q$ とおき,

$$f(t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[0,1]} \left(t - k + 1 - k^{\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-\tilde{q}}} \right) \sin^3 \left(2^{k+1} \pi \left(t - k + 1 - k^{\frac{p-\varepsilon}{p-\varepsilon-\tilde{q}}} \right) \right)$$

とする．このとき,

$$f \in \left(\overset{\square}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}) \right) \setminus \overset{\diamond}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}).$$

ここで，$\overline{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}) \equiv \overline{L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_q}}$ である.

さらに，$\widetilde{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R})$ と $\overset{\triangle}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R})$ は違う部分空間になっていることが分かる.

Example 3.6. $n = 1$, $1 < q < p < \infty$ とする．集合 E を長さ 1 の閉区間の加算和で書けているとする，つまり，ある $c_1, c_2, \ldots \in E$ が存在して,

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j + [0, 1])$$

である．$\psi \in C^\infty_{\rm c}(0, 1)$ を $\Delta\psi \neq 0$ を満たすように取る．ここで，Δ はラプラシアンである.

$$f \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \Delta\psi(\cdot - c_j).$$

とすると，$f \in \overset{\triangle}{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R}) \setminus \widetilde{\mathcal{M}}{}^p_q(\mathbb{R})$ である.

References

[1] A. Benedek and R. Panzone, *The space L^P, with mixed norm*, Duke Math. J. **28** (1961), 301–324.

[2] D. I. Hakim, S. Nakamura, Y. Sawano, *Complex Interpolation of Smoothness Morrey Subspaces*, Constr. Approx. **46** (2017) 489—563.

[3] T. Izumi, Y. Sawano and H. Tanaka, *Littlewood–Paley theory for Morrey spaces and their preduals*, Rev. Mat. Complut. **28** (2015), no. 2, 411–447.

[4] A. L. Mazzucato, *Decomposition of Besov-Morrey spaces*, Harmonic analysis at Mount Holyoke (South Hadley, MA, 2001), 279–294, Contemp. Math., 320, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[5] C. B. Morrey Jr., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), no. 1, 126–166.

[6] T. Nogayama, *Mixed Morrey spaces*, Positivity **23**(4) (2019) , 961–1000.

[7] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.

[8] Y. Sawano, G. Di Fazio and D.I. Hakim, *Morrey spaces. Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's. Vol. I and II.* Monographs and Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall CRC Press, Boca Raton, FL, 2020.

[9] R. Torres and E. Ward, *Leibniz's rule, sampling and wavelets on mixed Lebesgue spaces*, J. Fourier Anal. Appl. **21** (2015), No. 5, 1053–1076.