Remarks on the fractional operators on Orlicz-Morrey spaces

福島工業高等専門学校
一般教科・飯田毅士 *

Takeshi Iida,
Department of General Education, National Institute of Technology, Fukushima College
Nagao 30, Kamiarakawa-Aza, Taira, Iwaki city, Fukushima, Japan.
970-8034

Mathematics Subject Classification 2020 : 26A33, 42B25, 42B35

Abstract

本稿は, Morrey 空間上で成立する分数冪積分作用素に対する Adams の不等式や Olsen の不等式の Orlicz 分数冪極大作用素, 分数冪積分作用素, BMO 関数と分数冪積分作用素の交換子積に対する Orlicz-Morrey 上への一般化について述べる.

1 Introduction

Orlicz 極大作用素は Hardy-Littlewood 極大作用素 M を一般化した作用素であり, 後述する Luxemberg-Nakano ノルムによって構成する.

以下, 記号 Q は, 各座標軸に平行な n 次元立方体を表す. 記号 $|Q|$ により Q の体積, 記号 $\ell(Q)$ により Q の 1 辺の長さを表す. 本稿では, 記号 I_α, M_α, $[b, I_\alpha]$ はそれぞれ, 分数冪積分作用素, 分数冪極大作用素, 関数 b と I_α による交換子積を表す.

Definition 1.

(i) $0 < \alpha < n$ に対して

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

(ii) 関数 b に対して,

$$[b, I_\alpha] f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b(x)-b(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y) dy.$$

Orlicz 極大作用素, Orlicz 分数冪極大作用素, Orlicz-Morrey 空間を定義するために Young 関数を導入する. 各定義は [5, pp.97-100] を参照する.

*E-mail address: **tiida@fukushima.nct-ac.jp**

Definition 2. 関数 $B : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が Young 関数であるとは, 次の条件を満たすことである. (i) B: 連続関数. (ii) B: 凸関数. (iii) B: 単調増加関数. (iv) $B(0) = 0$. (v) $\lim_{t \to 0} B(t)/t = 0$. (vi) $\lim_{t \to \infty} B(t) = \infty$. 本稿では, $t^{-n/\alpha} B(t)$ は a.e. で単調減少でかつ, $t^{-n/\alpha} B(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ であると仮定する. 共役 Young 関数 $\bar{B}$ を定義する:

$$\bar{B}(t) := \sup_{s>0}(st - B(s)) \ (t > 0).$$

Young 関数に付加する条件 $\triangle_2$, $\triangledown_2$, $\triangle'$, $\triangledown'$ の定義をまとめる.

Definition 3. 関数 B は Young 関数であると仮定する.

(i) $B \in \triangle_2$ であるとは, ある定数 $K > 0$ に対して, $B(2x) \le KB(x) \quad x \ge 0$.

(ii) $B \in \triangledown_2$ であるとは, ある定数 $\ell > 1$ に対して, $B(x) \le \dfrac{1}{2\ell} B(\ell x) \quad x \ge 0$.

(iii) $B \in \triangle'$ であるとは, ある定数 $C > 0$ に対して, $B(xy) \le CB(x)B(y) \quad x, y \ge 0$.

(iv) $B \in \triangledown'$ であるとは, ある定数 $C > 0$ に対して, $B(x)B(y) \le B(Cxy) \quad x, y \ge 0$.

Example 1. $B(t) = t^p \,[\log(e + t)]^a$ *(*$a \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$*). このとき, 次が成立する:*

(a) $B \in \triangle_2 \cap \triangledown_2$.

(b) $a \ge 0$ *のとき,* $B \in \triangledown'$.

(c) $a \le 0$ *のとき,* $B \in \triangle'$.

以下, 記号 B, Φ, Ψ を Young 関数を表す. Luxemberg-Nakano ノルムを次のように定める.

Definition 4. n 次元立方体 Q に対して,

$$\|f\|_{B,Q} := \left\{ \lambda > 0 : \fint_Q B\left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dx \le 1 \right\}. \tag{1}$$

Definition 4 によって, Orlicz 極大作用素 M_B, Orlicz 分数冪極大作用素 $M_{B,\alpha}$ を定義する:

Definition 5. $0 \le \alpha < n$ とするとき,

$$M_{B,\alpha} f(x) := \sup_{Q \subset \mathbb{R}^n} \ell(Q)^\alpha \, \|f\|_{B,Q} \cdot \chi_Q(x), \quad M_B := M_{B,0}. \tag{2}$$

論文 [3, p.104] で, 次の各点評価が示された.

Proposition 1. *$0 < \alpha < n$, $b \in BMO$, $B(t) = t \log(e + t)$, $f(x) \ge 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ とするとき,*

$$M^\sharp \left([b, I_\alpha] f \right)(x) \lesssim \|b\|_{BMO} \left(I_\alpha f(x) + M_{B,\alpha} f(x) \right). \tag{3}$$

Young 関数に関して B_p 条件が導入された (論文 [13, p.138]).

Definition 6. Young 関数 B が, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{B(t)}{t^{p+1}} dt < \infty$ を満たすとき, $B \in B_p$ であると定める.

B_p 条件は作用素 M_B の L^p 空間上の有界性が成立する必要十分条件である.

Proposition 2. $1 < p < \infty$ とするとき, 次が同値である. *(i)* $B \in B_p$. *(ii)* $M_B : L^p \to L^p$.

$M_{B,\alpha} : L^p \to L^q$ が成立するための必要十分条件は, 論文 [3, 4, 11] により導入された.

Theorem A. $0 \le \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $1 < q < \infty$ とするとき, 次が同値である: *(i)* $M_{B,\alpha} : L^p \to L^q$. *(ii)* $B^{\frac{q}{p}} \in B_q$ かつ, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

Orlicz-Morrey 空間[1]を次のように定める:

Definition 7. $1 \le p_0 < \infty$ とするとき, Orlicz-Morrey ノルムを $\|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} := \sup_Q |Q|^{\frac{1}{p_0}} \|f\|_{\Phi,Q}$ により定める. このとき, $\mathcal{M}_\Phi^{p_0} := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}} : \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} < \infty \right\}$ を Orlicz-Morrey 空間という. 特に, $\Phi(t) = t^p$ $(0 < p \le p_0 < \infty)$ の場合, 関数空間 $\mathcal{M}_p^{p_0}$ は, 通常の Morrey 空間を表し, $\mathcal{M}_p^{p_0} = \mathcal{M}_\Phi^{p_0}$ となる.

Remark 1. $1 < p_0 < \infty$ のとき, $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$ であることと $\mathcal{M}_\Phi^{p_0} \neq \{0\}$ が同値である (論文 [8, p.245]).

作用素 I_α に対する Morrey 空間上の有界性が成立する (論文 [1]).

Proposition 3. $0 < \alpha < n$, $1 < p \le p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $1 < q \le q_0 < \infty$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$ とする. このとき, $I_\alpha : \mathcal{M}_p^{p_0} \to \mathcal{M}_q^{q_0}$.

Morrey 空間上の作用素 I_α に対する次の不等式が成立する (論文 [12]).

Proposition 4. $0 < \alpha < n$, $1 < p \le p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $1 < q \le q_0 < \infty$, $1 < r \le r_0 < \infty$, $q_0 < r_0$, $r_0 \ge \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$ とする. このとき, $a = 1 + \varepsilon > 1$ に対して, $g \in \mathcal{M}_{aq}^{r_0}$ とすると

$$\|g(I_\alpha f)\|_{\mathcal{M}_q^{q_0}} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_{aq}^{r_0}} \|f\|_{\mathcal{M}_p^{p_0}} .$$

作用素 $M_{B,\alpha}$ に対する Morrey 空間上の Propositions 3, 4 に相当する不等式は, 論文 [8] で示した. 一方で, Orlicz-Morrey 空間上の作用素 M_B に対する有界性が成立する (論文 [15, p.535]).

Proposition 5. 次が同値である.

(i) 任意の n 次元立方体 Q に対して,

$$\left\| M_B(f\chi_Q) \right\|_{\Phi,Q} \lesssim \|f\|_{\Phi,Q} . \tag{4}$$

(ii)

$$\int_1^t B\left(\frac{t}{s}\right) \Phi(s) \frac{ds}{s} \lesssim \Phi(t) \quad (t \ge 1). \tag{5}$$

Remark 2. 一般に,

$$\int_1^t B\left(\frac{t}{s}\right) \Phi(s) \frac{ds}{s} = \int_1^t \Phi\left(\frac{t}{s}\right) B(s) \frac{ds}{s}. \tag{6}$$

Example 2.

[1] 3 種類の Orlicz-Morrey 空間のうち, 第 2 種 Orlicz-Morrey 空間を扱う. 3 種類の分類に関する詳細は, 論文 [2, 6, 7] を参照.

(i) $1 < p < \infty$, $\Phi(t) = t^p$ かつ, $B \in B_p$ とすると, *2* 組 (B, Φ) は条件 (5) を満たす.

(ii) $1 < p < \infty$, $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{\log(e+t)}$, $B(t) = \dfrac{B_0(t)}{\log(e+t)}$ かつ, $B_0 \in B_p$ とすると, *2* 組 (B, Φ) は条件 (5) を満たす.

Proposition 5 により, 次が成立する.

Proposition 6. $1 < p_0 < \infty$, $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$ $(t \geq 1)$ とする. *2* 組 (B, Φ) が条件 (5) を満たすとき, $M_B : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \to \mathcal{M}_\Phi^{p_0}$.

Proposition 6 は, 次のように一般化できる.

Proposition 7. $1 < p_0 < \infty$, $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$ $(t \geq 1)$ とする. *3* 組 (B, Φ, Ψ) が条件

$$\int_1^t B\left(\frac{t}{s}\right)\Psi(s)\frac{ds}{s} \lesssim \Phi(t) \quad (t \geq 1) \tag{7}$$

を満たすとき, $M_B : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \to \mathcal{M}_\Psi^{p_0}$.

Remark 3. 3 組 $(B,\ \Phi,\ \Psi)$ が条件 (7) を満たすとき, $B(t), \Psi(t) \lesssim \Phi(t)\ (\lesssim t^{p_0})$ が成立する.

作用素 $M_{B,\alpha}$ に関する Orlicz-Morrey 空間上の有界性について次が成立する (論文 [9]).

Theorem B. $0 < \alpha < n$, $1 < p_0 < q_0 < \infty$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$, $\Psi(t) \lesssim t^{q_0}$ かつ,

$$\int_1^t B\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{q_0}{p_0}}\Psi(s)\frac{ds}{s} \lesssim \Phi(t)^{\frac{q_0}{p_0}} \quad (t \geq 1) \tag{8}$$

を満たすとき, $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \to \mathcal{M}_\Psi^{q_0}$.

Remark 4. 3 組 $(B,\ \Phi,\ \Psi)$ が条件 (8) を満たすとき, $B(t) \lesssim \Phi(t)$ (論文 [9, Lemma 4.6]).

Theorem B が成立する 3 組 (B, Φ, Ψ) の例を構築できる.

Example 3. $a, b \geq 0$, $1 < p \leq p_0 < \infty$, $1 < q_0 < \infty$,

$$B(t) = \frac{t^p}{[\log(e+t)]^{\frac{p_0}{q_0}a}}, \Psi(t) = \frac{t^{p \cdot \frac{q_0}{p_0}}}{[\log(e+t)]^b}$$

とするとき, 以下のように $\Phi(t)$ をとるとき, *3* 組 (B, Φ, Ψ) は, 条件 (8) を満たす *(*したがって, $M_{B,\alpha} : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \to \mathcal{M}_\Psi^{q_0}$ が成立*)(*論文 *[9, p.18])*.

(i) $a > b + 1$ のとき, $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{[\log(e+t)]^{\frac{p_0}{q_0}b}}$.

(ii) $a = b + 1$ のとき, $\Phi(t) = t^p \left(\dfrac{\log(\log(e+t))}{[\log(e+t)]^b}\right)^{\frac{p_0}{q_0}}$.

(iii) $b - 1 < a < b + 1$ のとき, $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{[\log(e+t)]^{\frac{p_0}{q_0}\max\{a,b\}-1}}$.

(iv) $a = b - 1$ のとき, $\Phi(t) = t^p \left(\dfrac{\log(\log(e+t))}{[\log(e+t)]^a}\right)^{\frac{p_0}{q_0}}$.

(v) $a < b-1$ のとき, $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{[\log(e+t)]^{\frac{p_0}{q_0}a}}$.

論文 [9] では Orlicz-Morrey 空間上の作用素 I_α, $[\beta, I_\alpha]$ に対する有界性に関して, 次が成立することを示した.

Theorem C. $0 < \alpha < n$, $1 < p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\beta \in BMO$ とする. さらに, $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$, $\Psi(t) \lesssim t^{q_0}$ と仮定する.

(i) 任意の $t \geqq 1$ に対して,

$$\int_1^t \frac{\overline{\Psi}(s)}{s^2} ds \lesssim \frac{\overline{\Psi}(t)}{t}, \tag{9}$$

$$\int_1^t \frac{\Psi(s)}{s^{1+\frac{q_0}{p_0}}} ds \lesssim \left(\frac{\Phi(t)}{t}\right)^{\frac{q_0}{p_0}} \tag{10}$$

を仮定するとき, $I_\alpha : \mathcal{M}_\Phi^{p_0} \to \mathcal{M}_\Psi^{q_0}$.

(ii) $\Psi \in \triangle_2 \cap \nabla'$ かつ,

$$\int_1^t \left(\frac{t}{s}\log\left(e+\frac{t}{s}\right)\right)^{\frac{q_0}{p_0}} \Psi(s) \frac{ds}{s} \lesssim \Phi(t)^{\frac{q_0}{p_0}} \quad (t \geqq 1)$$

を仮定するとき,

$$\|[\beta, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|\beta\|_{BMO} \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}.$$

Theorem C を示すには次の不等式を適用する (論文 [9, p.10, p.16]).

Theorem D. $0 < \alpha < n$, $1 < p_0 < \infty$, $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$ かつ $\Phi \in \triangle_2$ を仮定するとき,

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \lesssim \|M_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}.$$

Theorem E. $1 < p_0 < \infty$, $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$ かつ $\Phi \in \nabla'$, $Mf \in \mathcal{M}_\Phi^{p_0}$ を仮定すると,

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \lesssim \left\|M^\sharp f\right\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \tag{11}$$

Proof of Theorem C (ii). $|[\beta, I_\alpha]f(x)| \le M([\beta, I_\alpha])(x)$ であることと, Theorem E から,

$$\|[\beta, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \le \|M([\beta, I_\alpha]f)\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \left\|M^\sharp([\beta, I_\alpha]f)\right\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}}. \tag{12}$$

不等式 (3) より, $B(t) = t\log(e+t)$ とすると,

$$\left\|M^\sharp([\beta, I_\alpha]f)\right\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|\beta\|_{BMO}\left(\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} + \left\|M_{B,\alpha}f\right\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}}\right) \tag{13}$$

Theorem D と, $M_\alpha f(x) \lesssim M_{B,\alpha}f(x)$ に注意すると,

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|M_\alpha f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \left\|M_{B,\alpha}f\right\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \tag{14}$$

が成立する. 以上から,

$$\|[\beta, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \left\|M_{B,\alpha}f\right\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}}. \tag{15}$$

Theorem B より,

$$\|[\beta, I_\alpha]f\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}. \tag{16}$$

□

次に論文 [8, 9, 15] に関連する研究成果を述べる (論文 [10]).

2 Main results

作用素 I_α に対する Olsen 型の不等式が成立する.

Theorem 1. *$0 < \alpha < n$, $1 < p_0 < \frac{n}{\alpha}$, $1 < q_0 < r_0 < \infty$, $r_0 \geq \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$, $\Psi(t) \lesssim t^{q_0}$ とする. さらに, 2 組 (Φ, Ψ) が条件 (10) を満たし,*

$$\int_1^t \overline{A}(s)\overline{\Psi}\left(\frac{t}{s}\right)\frac{ds}{s} \lesssim \overline{\Psi}(t) \quad (t \geq 1) \tag{17}$$

を満たす Young 関数 $A(t) \lesssim t^{r_0}$ が存在するとき, $g \in \mathcal{M}_A^{p_0}$ とすると,

$$\|g(I_\alpha f)\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_A^{r_0}} \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}.$$

Remark 5. Theorem 1 において, $\Phi(t) = t^p$, $\Psi(t) = t^q$, $\frac{q}{p} = \frac{q_0}{p_0}$, $A(t) = t^{aq}$ $(1 < p < q < \infty,\ a > 1)$ とするとき,

$$\int_1^t \overline{A}(s)\overline{\Psi}\left(\frac{t}{s}\right)\frac{ds}{s} = t^{q'}\int_1^t s^{(aq)'-q'-1}ds < t^{q'} = \overline{\Psi}(t)$$

が成立するから, 条件 (17) を満たす (q' は q の共役指数). すなわち, Theorem 1 は, Proposition 4 を Corollary として含むことを示している.

次に作用素 $M_{B,\alpha}$ に対する Olsen 型の不等式が成立する.

Theorem 2. *$0 \leq \alpha < n$, $1 < p_0 < \frac{n}{\alpha} \leq r_0$, $q_0 < r_0$ かつ, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{\alpha}{n}$, $\Phi(t) \lesssim t^{p_0}$, $\Psi(t) \lesssim t^{q_0}$ $\Psi \in \triangle'$ かつ, 3 組 (B, Φ, Ψ) が条件 (8) をみたすとき,*

$$\left\|g(M_{B,\alpha}f)\right\|_{\mathcal{M}_\Psi^{q_0}} \lesssim \|g\|_{\mathcal{M}_\Psi^{r_0}} \|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}}.$$

Remark 6. Theorem 2 において, $\Phi(t) = t^p$, $\Psi(t) = t^q$, $\frac{q}{p} = \frac{q_0}{p_0}$ とするとき, 論文 [8, Corollary 2 in p.251] の結果を得る. すなわち, 作用素 $M_{B,\alpha}$ に対する Olsen 型の不等式が成立する.

3 今後の研究課題

Theorem C (ii) の証明において, Theorem E を使わずに, 証明できるかについての研究が残されている. 不等式 (11) の代わりに, 不等式

$$\|f\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \lesssim \left\|M^\sharp f\right\|_{\mathcal{M}_\Phi^{p_0}} \tag{18}$$

を示す. このとき, 不等式 (18) が成立する Young 関数の十分条件が Theorem E における不等式 (11) が成立する十分条件 $\Psi \in \nabla'$ と比較する.

4　謝辞

本研究は JSPS 科研費 (JP23K03156, 代表: 中央大学・理工学部・教授 澤野嘉宏氏) の助成を受けたものである.

References

[1] D. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J., 42, (1975), 765-778.

[2] F. Deringoz, V.S. Guliyev and S.G. Hasanov, *Maximal operator and its commutators on generalized weighted Orlicz-Morrey spaces*, Tokyo J. Math., 41, 2, (2018), 347-369, doi:10.3836/tjm1502179260.

[3] D. Cruz-Uribe, SFO and A. Fiorenza, *Endpoint estimates and weighted norm inequalities for commutators of fractional integrals*, Publ. Mat. 47, (2003), 103-131.

[4] D. Cruz-Uribe, SFO and K. Moen, *A fractional Muckenhoupt-Wheeden theorem and its consequences*, Integral Equations Operator Theory, 76, (2013), 3, 421-446.

[5] D. Cruz-Uribe, SFO, José Maria Martell and C. Pérez, *Weights, extrapolation and the theory of Rubio de Francia. Operator Theory: Advances and Applications*, 215. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. xiv+280 pp.

[6] S. Gala, Y. Sawano and H. Tanaka, *A remark on two generalized Orlicz-Morrey spaces*, J. Approx. Theory, 198 (2015), 1-9.

[7] V.S. Guliyev, S.G. Hasanov, Y. Sawano and T. Noi, *Non-smooth atomic decompositions for generalized Orlicz-Morrey spaces of the third kind*, Acta Appl. Math., 145, (2016), pp.137-174, doi:10.1007/s10440-016-0052-7.

[8] T. Iida, *Orlicz-fractional maximal operators in Morrey and Orlicz-Morrey Spaces*, Positivity, 25, (2021), 243-272, doi:10.1007/s11117-020-00762-w.

[9] T. Iida, *Commutators generated by BMO-functions and the fractional integrals on Orlicz-Morrey spaces*, Math, Ine. and Appl. 26, 3, pp.655-683, 2023.

[10] T. Iida, *Remarks on the fractional operators on Orlicz-Morrey spaces*, submitted.

[11] T. Iida and Y. Sawano, *Orlicz-fractional maximal operators on weighted L^p spaces*, J. Math. Inequal., 13 (2019), 2, 369-413.

[12] P. Olsen, *Fractional integration, Morrey spaces and Schrödinger equation*, Comm. Partial Differential Equations, 20 (1995), 2005-2055.

[13] C. Pérez, *On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights*, Proc. London Math. Soc. 3, 71, 1, (1995), 135-157.

[14] M.M. Rao, Z.D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[15] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, *Orlicz-Morrey spaces and fractional operators*, Potential Analysis, 36, (2012), 517-556.