ヘルツ空間についての一考察

東京都市大学・共通教育部 自然科学系・出耒光夫[*],
神奈川工科大学・教育開発センター・野井貴弘[†],
中央大学・理工学研究科・澤野嘉宏[‡]

Mitsuo Izuki,
Faculty of Liberal Arts and Sciences, Tokyo City University,
1-28-1 Tamazutsumi, Setagaya-ku, Tokyo, Japan.
Takahiro Noi,
Center for Basic Education and Integrated Learning, Kanagawa Institute of Technology,
1030 Shimoogino Atsugi-city, Kanagawa, Japan.
Yoshihiro Sawano
Department of Mathematics, Graduate School of Science and Engineering,
Chuo University, 13-27 Kasuga 1-chome, Bunkyoku, Tokyo, Japan.

Mathematics Subject Classification 2010 : 42B35, 42B20, 42B25.

Abstract

本稿ではヘルツ空間について新しいノルム同値を提案し，それを応用して作用素の有界性を示すのに有効な不等式を示す.

1 Introduction

斉次ヘルツ空間 $\|\cdot\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}$, $1<p<\infty$, $0<q\leq\infty$, $\alpha\in\mathbb{R}$ は以下の要領で定義される．まずは，$k\in\mathbb{Z}$ に対して，$C_k\equiv[-2^k,2^k]^n\setminus[-2^{k-1},2^{k-1}]^n$ と定めて，その特性関数を χ_k とする．ノルムは $\|\cdot\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}$ で表記されるが，具体的には可測関数 f に対して，

$$\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}\equiv\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}(2^{j\alpha}\|f\chi_j\|_{L^p})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

と与えられる．$\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ とはこのようなノルムが有限であるような f 全体を表す．正値可測関数 w と $1<p<\infty$ に対して，荷重付き L^p-ノルムは $\|f\|_{L^p(w)}\equiv\|w^{\frac{1}{p}}f\|_{L^p}$ で与えられる．ここで，f は可測関数である．次のノルム同値が種々の作用素の有界性を保証してくれる．

Theorem 1.1. $1<p<\infty$, $0<q\leq\infty$, $\alpha\in\mathbb{R}$ とする．補助パラメータ $\kappa_1,\kappa_2\in\mathbb{R}$ が

$$\frac{\kappa_1}{p}<\alpha<\frac{\kappa_2}{p}. \tag{1}$$

[*]E-mail address: **izuki@tcu.ac.jp**
[†]E-mail address: **taka.noi.hiro@gmail.com**
[‡]E-mail address: **yoshihiro-sawano@celery.ocn.ne.jp**

を満たしているとしよう．

$$w(x) \equiv \min(|x|^{\kappa_1}, |x|^{\kappa_2}) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{2}$$

とおき，$l \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$w_l \equiv w(2^{-l}\cdot) \quad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{3}$$

と定める．このとき，ノルム同値

$$\|f\|_{\dot{K}^\alpha_{p,q}} \sim \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} (2^{l\alpha} \|f\|_{L^p(w_l)})^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ．ここで，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ は可測関数で，$\sim$ に含まれる定数は f とは関係がない．

この定理の証明は拙論文 [7] に載っているので，ここでは応用例を一つ与える．

Theorem 1.2. $1 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．$r \gg p$ とする．

$$-\frac{n}{p} < \alpha < \frac{n}{p'}$$

を仮定する．

1. ハーディー・リトルウッドの極大作用素は有界である．
2. 球の列 $\{B(x_j, r_j)\}_{j=1}^\infty$ と関数列 $\{a_j\}_{j=1}^\infty \subset L^r(\mathbb{R}^n)$ が $\mathrm{supp}(a_j) \subset B(x_j, r_j)$, $j \in \mathbb{N}$ を満たしているならば，
$$\left\| \sum_{j=1}^\infty a_j \right\|_{\dot{K}^\alpha_{p,q}} \lesssim \left\| \sum_{j=1}^\infty \frac{\|a_j\|_{L^r}}{|B(x_j, r_j)|^{\frac{1}{r}}} \chi_{B(x_j,r_j)} \right\|_{\dot{K}^\alpha_{p,q}}$$
が成り立つ.（宮地の不等式の弱形）

宮地 [5] によると，$r > p$ の場合は正しいことが知られているが，この形でもかなりいろいろな応用ができる．

不等号に関連する記号は標準的（と信じるもの）である．これについては拙著 [6] ならびにその日本語版である「ベゾフ空間論」をご覧いただきたい．

本稿の残りの部分の構成は以下のとおりである．2 節ではヘルツ空間の性質を議論する．定理 1.1 に基づき，定理 1.2 の証明を 3 節にて行う．4 節は種々の結果に関する補足である．

2　ヘルツ空間の性質

Proposition 2.1. $1 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．

1. C_0 に台を持つ可測関数 f に対して，$\|f\|_{L^p} = \|f\|_{\dot{K}^\alpha_{p,q}}$ が成り立つ．
2. $\{a_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^q$ に対して，
$$\left\| \sum_{j=1}^\infty a_j \chi_{[2^j, 2^{j+1}] \times [0,1]^{n-1}} \right\|_{\dot{K}^\alpha_{p,q}} \sim \|\{a_j\}_{j=1}^\infty\|_{\ell^q}$$
が成り立つ．

3. $\|f(t\cdot)\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} = t^{-\alpha-\frac{n}{p}}\|f\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}}$ が成り立つ.

証明はいずれも容易なので，省略する.

同じようにして以下の命題が示せる.

Corollary 2.2. $1<p<\infty$, $0<q\le\infty$, $\alpha\in\mathbb{R}$ とする.

1. $|\cdot|^{-\alpha-\frac{n}{p}} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \setminus \bigcup_{q\in(0,\infty)} \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ.

2. $\chi_{B(1)} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ必要十分条件は
$$0<q<\infty, \alpha+\frac{n}{p}>0$$
もしくは
$$q=\infty, \alpha+\frac{n}{p}\ge 0$$
が成り立つことである.

3. $\chi_{B(1)}|\cdot|^{-n} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ必要十分条件は
$$0<q<\infty, \alpha-n+\frac{n}{p}<0$$
もしくは
$$q=\infty, \alpha-n+\frac{n}{p}\le 0$$
が成り立つことである.

4. $\alpha-n+\frac{n}{p}=0$, $u>0$ とする. $\frac{\chi_{B(1/2)}}{|\cdot|^n|\log|\cdot||^u} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ必要十分条件は $u^{-1}<q\le\infty$ である.

3 定理 1.2 の証明

A_p クラスについて復習する．立方体の集まり $\mathcal{Q}$，平均 m_E などはやはり拙著 [6] ならびにその日本語版である「ベゾフ空間論」をご覧いただきたい．ここでは $1<p<\infty$ とする．局所可積分荷重 w が A_p-荷重であるとは $0<w<\infty$ がほとんどいたるところ成り立ち，$A_p(w) \equiv \sup_{Q\in\mathcal{Q}} m_Q(w)m_Q(w^{-\frac{1}{p-1}})^{p-1}<\infty$ を満たすことである．さらに，A_p とはこのような加重の集まりを表す．ここで，$|\cdot|^{\kappa}\in A_p$ であるための必要十分条件は $-n<\kappa<n(p-1)$ であることが知られている．[1, 6] などを参考にされたし．M はハーディー・リトルウッドの極大作用素とする．つまり，
$$Mf(x) \equiv \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|}\int_Q |f(y)|\mathrm{d}y \quad (x\in\mathbb{R}^n)$$
である．ここで，再び $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ は可測関数である．そもそもどうして A_p が大事かというと，$1<p<\infty$ としてマッケンハウプト理論として知られているように M が $L^p(w)$ 有界であることは $w\in A_p$ と同値だからである．より詳しく，極大作用素の荷重有界性
$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p w(x)\mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

がすべての可測関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ について成り立つこととと，$w \in A_p$ は同値で，実際に $w \in A_p$ ならば，$\lesssim$ に含まれる定数は $A_p(w)^{\min\left(1,\frac{1}{p-1}\right)}$ の定数倍で抑えられることが示される．

最初の定理 1.1 と作用素の性質をつなぐ次の補題が重要である．

Lemma 3.1. $1 < p < \infty$ とする．

$$-n < \kappa_1 < \kappa_2 < n(p-1).$$

ならば，(2) で与えらえる荷重 w は A_p に属する．

これは，$w_1, w_2 \in A_p$ ならば，$w_1 + w_2 \in A_p$ であること（極大作用素の特徴づけを参考）と，$w \in A_p$ ならば，$w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$ であることから得られるが，ここでは直接的に極大作用素の荷重有界性 (4) を検証して確認しておこう．$B(r)$, $r > 0$ とは原点中心の半径 $r > 0$ の球である．

Proof. 予告した通り，(4) を示す．証明を 4 つに分ける．

$$\int_{B(1)} M[\chi_{B(4)} f](x)^p w(x) \mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \mathrm{d}x \tag{5}$$

$$\int_{B(1)} M[\chi_{B(4)^c} f](x)^p w(x) \mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \mathrm{d}x, \tag{6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(1)} M[\chi_{B(4)} f](x)^p w(x) \mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \mathrm{d}x, \tag{7}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(1)} M[\chi_{B(4)^c} f](x)^p w(x) \mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \mathrm{d}x. \tag{8}$$

(5) は簡単である．実際に，$|\cdot|^{\kappa_2} \in A_p$ だから，

$$\begin{aligned}
\int_{B(1)} M[\chi_{B(4)} f](x)^p w(x) \mathrm{d}x &= \int_{B(1)} M[\chi_{B(4)} f](x)^p |x|^{\kappa_2} \mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} M[\chi_{B(4)} f](x)^p |x|^{\kappa_2} \mathrm{d}x \\
&\lesssim \int_{B(4)} |f(x)|^p |x|^{\kappa_2} \mathrm{d}x \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

となる．同じ議論が (8) にも適用される．

(6) を証明しよう．幾何学的な考察によって，

$$M[\chi_{B(4)^c} f](x) \sim \sup_{r \ge 4} \frac{1}{r^n} \int_{B(r) \setminus B(4)} |f(y)| \mathrm{d}y \lesssim \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(4)} |f(y)| \cdot |y|^{-n} \mathrm{d}y, x \in B(1)$$

である．ヘルダーの不等式と分解

$$|y|^{-n} = |y|^{-n-\frac{\kappa_1}{p}} |y|^{\frac{\kappa_1}{p}}$$

により，

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(4)} |f(y)| \cdot |y|^{-n} \mathrm{d}y \lesssim_\varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(4)} |f(y)|^p |y|^{\kappa_1} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(4)} |y|^{-np' - \kappa_1 \frac{p'}{p}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}$$

と分ける．

仮定により，

$$np' + \kappa_1 \frac{p'}{p} > np' - n\frac{p'}{p} = n$$

だから，先ほどの y の負べきの積分の有限性が担保される．さらに，w は $B(1)$ 上可積分なので，

$$\int_{B(1)} M[\chi_{B(4)^{\mathrm{c}}} f](x)^p w(x) \mathrm{d}x \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(4)} |f(y)| \cdot |y|^{-n} \mathrm{d}y \right)^p \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \mathrm{d}x$$

となる．

残りは (7) の証明である．やはり幾何学的な考察により，

$$M[\chi_{B(4)} f](x) \sim |x|^{-n} \int_{B(4)} |f(y)| \mathrm{d}y, x \in B(8)^{\mathrm{c}}$$

である．今度は

$$|f(y)| = |f(y)| \cdot |y|^{\frac{\kappa_2}{p}} |y|^{-\frac{\kappa_2}{p}},$$

と分解して，ヘルダーの不等式を用いることで，

$$\int_{B(4)} |f(y)| \mathrm{d}y \lesssim \left(\int_{B(4)} |f(y)|^p |y|^{\kappa_2} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(4)} |y|^{-\kappa_2 \frac{p'}{p}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p'}}$$

が得られる．仮定より，

$$\kappa_2 \frac{p'}{p} < n(p-1)\frac{p'}{p} = n.$$

なので，$x \in B(8)^{\mathrm{c}}$ に対する各点評価

$$M[\chi_{B(4)} f](x) \lesssim |x|^{-n} \left(\int_{B(4)} |f(y)|^p |y|^{\kappa_2} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim |x|^{-n} \left(\int_{B(4)} |f(y)|^p w(y) \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{p}}$$

が得られる．よって，

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(8)} M[\chi_{B(4)} f](x)^p w(x) \mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \mathrm{d}x$$

となる．他方で，$|\cdot|^{\kappa_2} \in A_p$ だから，

$$\begin{aligned} \int_{B(8) \setminus B(1)} M[\chi_{B(4)} f](x)^p w(x) \mathrm{d}x &\leq \int_{B(8) \setminus B(1)} M[\chi_{B(4)} f](x)^p |x|^{\kappa_2} \mathrm{d}x \\ &\lesssim \int_{B(4)} |f(x)|^p |x|^{\kappa_2} \mathrm{d}x \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

となる．以上で，(7) の証明が完了した． □

定理 1.2 を証明しよう．次の補題を必要とする．

Lemma 3.2. $w \in A_p$ に対して，

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right\|_{L^p(w)} \lesssim \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|a_j\|_{L^r}}{|B(x_j, r_j)|^{\frac{1}{r}}} \chi_{B(x_j, r_j)} \right\|_{L^p(w)}$$

が成り立つ．

補題 3.2 の証明．極限移行が簡単にできる状態なので，$a_j \in L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n)$ として，さらに有限和を考えていると仮定してよい．$|a_j|$ を a_j の代わりに考えて，$a_j \ge 0$ と仮定してよい．$g \in L^{p'}(w^{-\frac{1}{p-1}})$ をノルムが 1 で，

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right\|_{L^p(w)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j(x) g(x) \right) {\rm d}x$$

となるようにとる．ヘルダーの不等式と極大作用素の定義により，

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right\|_{L^p(w)} &\le \sum_{j=1}^{\infty} \|a_j\|_{L^r} \left(\int_{B(x_j, r_j)} |g(x)|^{r'} {\rm d}x \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|a_j\|_{L^r}}{|B(x_j, r_j)|^{\frac{1}{r}}} |B(x_j, r_j)| \inf_{z \in B(x_j, r_j)} \left(M[|g|^{r'}](z) \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|a_j\|_{L^r}}{|B(x_j, r_j)|^{\frac{1}{r}}} \chi_{B(x_j, r_j)}(x) \left(M[|g|^{r'}](x) \right)^{\frac{1}{r'}} {\rm d}x \end{aligned}$$

が得られる．$r \gg p$ なので，もう一度ヘルダーの不等式と openness property $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'} = \bigcup_{1<u<p'} A_u$ を用いて，結論を得る． □

補題 3.2 を用いて定理 1.2 を証明しよう．極大作用素の証明は宮地の定理の弱形より簡単に示せるので，省略する．極大作用素の荷重つき不等式については [1, 6] などを参照すること．κ_1, κ_2 を

$$-n < \kappa_1 < p\alpha < \kappa_2 < n(p-1)$$

となるようにする．$f \in L^\infty_{\rm c}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} &\sim \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(2^{l\alpha} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right\|_{L^p(w_l)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\lesssim \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(2^{l\alpha} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|a_j\|_{L^r}}{|B(x_j, r_j)|^{\frac{1}{r}}} \chi_{B(x_j, r_j)} \right\|_{L^p(w_l)} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\sim \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|a_j\|_{L^r}}{|B(x_j, r_j)|^{\frac{1}{r}}} \chi_{B(x_j, r_j)} \right\|_{\dot{K}^{\alpha}_{p,q}} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，w_l は (2) と (3) で与えられる．伸長について $A_p(w_l) = A_p(w_0)$, $l \in \mathbb{Z}$ が成り立つので，$\lesssim$ の部分が示せる．

分数積分作用素の有界性も同じように示せる．

4 注意

- $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とする．M が $\dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ で有界であるとする．このとき，

$$-\frac{n}{p} < \alpha < \frac{n}{p'}$$

が成り立つことを確認しよう．

  (i) $q < \infty$ とする．$\chi_{C_0} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ なので，$\chi_{B(1)} \lesssim M\chi_{C_0} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ である．よって，系 2.2 から

$$\alpha + \frac{n}{p} > 0$$

  が成り立たないといけない．また，$M[\chi_{B(1)}|\cdot|^{-n}] = \infty$ なので，$\chi_{B(1)}|\cdot|^{-n} \notin \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ である．したがって，系 2.2 から

$$\alpha - n + \frac{n}{p} \leq 0$$

  が成り立たないといけない．$\alpha - n + \frac{n}{p} = 0$ とする．仮に M が有界であるとしよう．十分大きな無理数 β に対して，系 2.2 から $\frac{\chi_{B(1/2)}}{|\cdot|^n|\log|\cdot||^{\beta}} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ であるが，$M\left[\frac{\chi_{B(1/2)}}{|\cdot|^n|\log|\cdot||^{\beta}}\right] \gtrsim \frac{\chi_{B(1/2)}}{|\cdot|^n|\log|\cdot||^{\beta-1}}$ より，$\frac{\chi_{B(1/2)}}{|\cdot|^n|\log|\cdot||^{\beta-1}} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ となる．この議論を $[\beta]$ 回繰り返して，$\frac{\chi_{B(1/2)}}{|\cdot|^n|\log|\cdot||^{\beta-[\beta]}} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ を得るが，この関数に M を施すと ∞ となるので，矛盾が得られた．

  (ii) $q = \infty$ とする．$\chi_{C_0} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ なので，$\chi_{B(1)} \lesssim M\chi_{C_0} \in \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ である．よって，系 2.2 から

$$\alpha + \frac{n}{p} \geq 0$$

  が成り立たないといけない．また，$M[\chi_{B(1)}|\cdot|^{-n}] = \infty$ なので，$\chi_{B(1)}|\cdot|^{-n} \notin \dot{K}^{\alpha}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ である．したがって，系 2.2 から

$$\alpha - n + \frac{n}{p} < 0$$

  が成り立たないといけない．$\alpha + \frac{n}{p} = 0$ の場合に極大作用素の有界性が成り立つか否かについては現時点ではよくわからなかった．部分的な結果，弱有界性については [4, Theorem 2] として知られている．

- w を上記のものとする．このノルム同値は $L^p(w)$, $w \in A_p$ への埋め込みを兼備しているので，$L^p(w)$ 上で定義されている作用素が $\dot{K}^{\alpha}_{pq}(\mathbb{R}^n)$ 上定義できるかどうかの議論は不要となる．

- この方法でいろいろな作用素の有界性が示せることは確かであるが，この考え方はモレー空間を荷重つきルベーグ空間の共通部分として表す方法を参考にして本稿の方法を思いついた．一見万能に見えるこの方法だが，L^{∞} に近いところでは要請が強いためにこの方法は限界があると言わざるを得ない．

- 荷重の付いたヘルツ空間については，出耒，野井と合同 [2] で調べており，近日中に結果を公開する．

5 謝辞

この研究は京都大学の補助を得て行われた．

References

[1] L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, Graduate texts in mathematics; 250, New York, Springer, 2014.

[2] M. Izuki, T. Noi and Y. Sawano, Extrapolation to two weighted Herz spaces with three variable exponents, in preparation

[3] X. Li and D. Yang, Boundedness of some sublinear operators on Herz spaces, Illinois J. Math. **40** (1996), 484–501.

[4] S. Lu, K. Yabuta and D. Yang, Boundedness of some sublinear operators in weighted Herz-type spaces, Kodai Math. J. **23** (2000), 391–410.

[5] A. Miyachi, Remarks on Herz-type Hardy spaces. Acta Math. Sinica. English Series **17** (2001), 339–360.

[6] Y. Sawano, Theory of Besov spaces. Dev. Math., 56 Springer, Singapore, 2018. xxiii+945 pp. ISBN:978-981-13-0835-2 ISBN:978-981-13-0836-9

[7] Y. Sawano, An equivalent norm of Herz spaces and its application to the Carleson operator, submitted.