有界領域上のポアソン方程式と Morrey 空間の関係について

北海道大学・情報科学研究院・原宇信 *

Takanobu Hara
Graduate School of Information Science and Technology,
Kita 14, Nishi 9, Kita-ku, Sapporo, Hokkaido, 060-0814, Japan.

Mathematics Subject Classification 2020: 35J25, 35J05, 35J08, 31B25

Abstract

容量密度条件をみたす領域上で Poisson 方程式の斉次 Dirichlet 境界値問題を考える. 非負外力に対し Hölder 連続な解が存在すれば, 外力はある種の Morrey 条件をみたすことが知られている. 本稿では, 同種の Morrey 条件をみたす外力に対し Hölder 連続な解が存在することを示す. 解の存在から, ある種の Sobolev 型のコンパクト埋め込み定理がしたがう. 結果の妥当性について例との照合をおこなう.

1 序

自然数 $n \geq 2$ を固定する. 発散形式楕円型方程式

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) &= \nu \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

を考える. ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ はある種の外部条件をみたす有界領域, 係数 A は一様楕円性条件

$$|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq L|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in \Omega$$

をみたす Ω 上の $n \times n$-対称行列値関数, 外力 ν は Ω 上の Radon 測度, もしくはより一般にふたつの Radon 測度の差 (Bourbaki の意味の "測度" であり, 電荷 (charge) ともよばれる) である. $\nu_+(\Omega)$ および $\nu_-(\Omega)$ の有限性は仮定しない.

方程式 (1) は Poisson 方程式 ($A(x)$ が単位行列の場合) の一般化のひとつであり, 膨大な量の先行研究が存在する. 物理的には, (1) は均質でない媒質上の拡散や波の定常状態の支配方程式であり, 自然な問題設定からあらわれる. それゆえ, 工学の面からもこの方程式は重要であり, 有限要素法などの数値的解法とその理論の研究が盛んにおこなわれている. 数学的には, (1) は手頃かつ幅広い応用が見込める研究対象である. Poisson 方程式を Lipschitz 写像で座標変換した際にも (1) はあらわれる.

方程式 (1) の解の存在証明を二つ挙げる. もっとも標準的な方法は関数解析と Sobolev 空間の利用である. Riesz の表現定理から $\nu \in H^{-1}(\Omega)$ のとき, そしてそのときに限りエネルギー有

*E-mail address: **takanobu.hara.math@gmail.com**

限な弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在する．別の有力な方法として Green 関数の利用がある．簡単のため Poisson 方程式を考える．$G_\Omega(\cdot,\cdot)$ を Ω の Green 関数とし, ν の Green ポテンシャル

$$u(x) = \int_\Omega G_\Omega(x,y)\,d\nu(y) \tag{2}$$

を考える．Green 関数は Newton 核で上から各点評価されるから, この積分は ν が有限測度であればほとんどすべての x に対して有限になり, u は (1) の解となる．変数係数方程式の Green 関数の存在証明とその領域内部での各点評価はたとえば [9] にある．

これらふたつの方法の弱点として $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ の解を取り逃がしてしまうことがある．このクラスは古典解のクラス $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ の自然な一般化であり, いわゆる Kato クラスの研究のなかでさまざまな応用が知られている (たとえば [1])．ところが, このクラスと $H_0^1(\Omega)$ には包含関係がない．Green 関数の利用は有効だが, 境界近傍でよくない振る舞いをする関数 u に対して Δu が有限測度になることは期待できない．したがって (2) の有限性自体を考える問題が生じる．

表示 (2) を用いて問題の難点を確認する．適切な領域 Ω の外部への条件のもと, $G_\Omega(x,\cdot)$ は境界で減衰し, この積分は ν が有限でなくても有限になりうる．領域境界がなめらかであれば $G_\Omega(x,\cdot)$ は境界近傍で境界からの距離と比較可能である．しかし, 多角形領域の角のまわりではこの比較は正しくないことは Schwarz-Christoffel 変換で障壁をつくればわかる．(下図を参照し境界 Harnack 原理を思い出す.) 測度 ν が $G_\Omega(x,\cdot)$ の "たるみ" に集中する可能性を考慮せねばならない．変数係数方程式では Green 関数の境界挙動は係数関数 $A(x)$ の精密な情報に依存しており事情はより複雑である．一様楕円性の仮定のみでは, たとえ領域境界がなめらかであっても Hopf の補題も境界 Lipschitz 評価もなりたたない．Green 関数と距離の比較ができないのである．

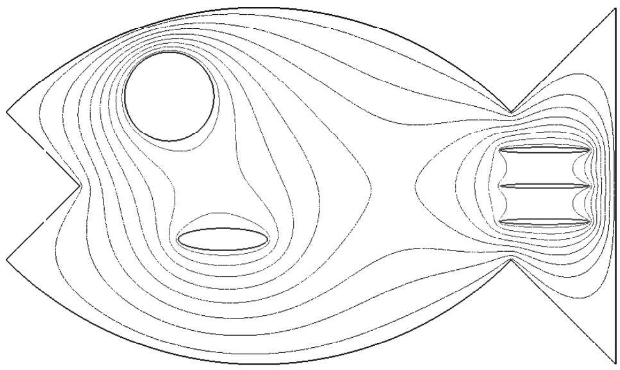

Figure 1: 平面領域上の調和関数の等高線図 (FreeFEM++で作成)．境界の凹んだ角 (たとえば魚の口) のまわりでは減衰が急になり, 領域内部のことばで言えば "たるみ" が生じている．

最近, 著者は優解と比較原理の利用により大域的に Hölder 連続な (1) の解の存在定理をえた ([7, 8])．この方法は楕円型方程式論の標準的な方法のひとつだが, 我々の設定では優解の存在自体が非自明である．証明の鍵である優解の存在証明は, [3] の方法と境界正則性評価を組み合わせたもので, 小さなサブドメイン上の優解を貼り合わせることでおこなわれる．この方法は方程式の線形性には依存しておらず, ある種の準線形方程式に対してはそのまま拡張される．

本稿では上述プレプリントの結果と優解の構成法を紹介する．また, 結果の妥当性について例との照合をおこなう．具体的には, 領域外部の容量密度条件 (以下の (3)) と外力のある種の Morrey 条件 (以下の (4)) のもと (1) の優解を構成する (Theorem 2.2)．また, それと比較原理からみち

びかれる解の存在定理を説明する (Theorem 2.3). 解の存在と一意性の証明や関連研究との比較などの詳細は, 一般化された形で [8] に書かれる.

本稿の構成は以下のとおり. 第 2 節で Ω と ν の仮定を述べ, Theorem 2.2 および Theorem 2.3 とそこから得られる系を提示する. 第 3 節で Theorem 2.2 を証明する. 第 4 節で上述の仮定をみたす ν の例について考察する.

諸注意と記号について述べる. 本稿通じて我々は方程式 (1) を超関数の意味で理解する. Ω 上の Radon 測度の全体を $\mathcal{M}^+(\Omega)$ と書く. $\mathcal{M}(\Omega) = \{\mu_+ - \mu_- \colon \mu_\pm \in \mathcal{M}^+(\Omega)\}$ と定める. Ω 上の正則 (有限) 符号付き測度の全体を $\mathcal{M}_b(\Omega)$ と書く. $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ に対し ν についての L^p 空間を $L^p(\Omega;\nu)$ と書く. Lebesgue 測度を記号 m であらわす. $L^p(\Omega;m)$ を単に $L^p(\Omega)$ と書く. $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$, $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ は L^2 ベースの Sobolev 空間である. 点 $x \in \Omega$ に対し, $\delta(x)$ で x と $\partial\Omega$ の距離をあらわす. 球 $B = B(x,r)(\subset \mathbb{R}^n)$ と正数 λ に対し $\lambda B = B(x,\lambda r)$ と書く. 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対し $\mathrm{diam}(E)$ で E の直径をあらわす.

2 主定理とその系

有界領域 Ω は次の容量密度条件をみたすものとする:

$$\exists\gamma > 0, \quad \frac{\mathrm{cap}(\overline{B(\xi,R)} \setminus \Omega, B(\xi,2R))}{\mathrm{cap}(\overline{B(\xi,R)}, B(\xi,2R))} \geq \gamma \quad \forall R > 0,\ \forall\xi \in \partial\Omega. \tag{3}$$

ここで $K \Subset U(\subset \mathbb{R}^n)$ に対し $\mathrm{cap}(K,U)$ は

$$\mathrm{cap}(K,U) := \inf_{\substack{\varphi \in C_c^\infty(U) \\ \varphi \geq 1 \text{ on } K}} \int_U |\nabla\varphi|^2 \, dm$$

で定義されるコンデンサー (K,U) の相対容量.

境界各点で領域外部に開き角一定の錐がとれれば (3) はみたされる. とくに有界 Lipschitz 領域は我々の仮定をみたす.

外力 ν には次の上限をとる球の大きさに制限がある Morrey 条件を課す. この条件からは $|\nu|(\Omega)$ の有限性はしたがわないことに注意する.

Definition 2.1. 指数 $q \in [1,\infty]$, に対し

$$\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega) := \left\{\nu \in \mathcal{M}(\Omega) \colon \|\nu\|_{\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)} < \infty\right\}$$

と定める. ここで

$$\|\nu\|_{\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)} := \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 0 < r < \delta(x)/2}} r^{-n/q'} |\nu|(B(x,r)). \tag{4}$$

$\mathsf{M}^{q,+}_{\partial\Omega}(\Omega) = \mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega) \cap \mathcal{M}^+(\Omega)$ と定める.

以下で重要なのは $q \in (n/2,\infty]$ の場合である. この範囲の q に対し

$$\beta := 2 - \frac{n}{q}$$

とおく. 非負外力 ν に対し β-Hölder 連続な (1) の解が存在するなら (4) は有限になる ([12] の議論を参照).

これらの条件のもと, 次の結果を得た.

Theorem 2.2 ([8])**.** Ω を (3) をみたす有界領域とする．ある $q \in (n/2, \infty]$ について $\nu \in \mathsf{M}^{q,+}_{\partial\Omega}(\Omega)$ とする．このとき, 非負関数 $s \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\Omega)$ で

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla s) \geq \nu \quad \text{in } \Omega, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{C}\mathrm{diam}(\Omega)^{\beta-\beta_0}\|\nu\|_{\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)}\delta(x)^{\beta_0} \\ &\quad\leq s(x) \leq C\mathrm{diam}(\Omega)^{\beta-\beta_0}\|\nu\|_{\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)}\delta(x)^{\beta_0} \quad \forall x \in \Omega \end{aligned} \tag{6}$$

をみたすものが存在する．ここで C と β_0 は n, L, q, γ にのみ依存する正定数.

Theorem 2.3 と比較原理から解を構成し, 内部正則性の結果 ([12, 5] を参照) と組み合わせて次を得る.

Theorem 2.3 ([8])**.** Ω を (3) をみたす有界領域とする．ある $q \in (n/2, \infty]$ について $\nu \in \mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)$ とする．このとき, (1) の解が $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 内にただひとつ存在する．さらに, $u \in C^{\beta_1}(\overline{\Omega})$ かつ不等式

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta_1}} \leq C\mathrm{diam}(\Omega)^{\beta-\beta_1}\|\nu\|_{\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)}$$

がなりたつ．ここで C と $\beta_1 \leq \min\{\beta, 1\}$ は n, L, q, γ にのみ依存する正数.

Corollary 2.4 ([8])**.** Ω を (3) をみたす有界領域とし, ν を Ω 上の非負 *Radon* 測度とする．このとき, ある $q \in (n/2, \infty]$ について $\nu \in \mathsf{M}^{q,+}_{\partial\Omega}(\Omega)$ のとき, そのときに限り (1) の *Hölder* 連続な弱解 $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ が存在する.

有界な (1) の解が存在すれば $L^2(\Omega; \nu)$ への埋め込みがなりたつことは, よく知られたことのようである．発展的な内容については, たとえば [1, 2, 4] にある．コンパクト性の主張は [11, Sect. 11.9.1, Theorem 3] の大域版である.

Corollary 2.5 ([8])**.** Ω を (3) をみたす有界領域とする．ある $q \in (n/2, \infty]$ について $\nu \in \mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)$ とする．このとき埋め込み $H^1_0(\Omega) \to L^2(\Omega; \nu)$ は成立しコンパクト.

3 優解の構成 (Theorem 2.2 の証明)

優解どうしの貼り合わせのため, 次の Lemma をもちいる.

Lemma 3.1 ([7, Lemma 3.1])**.** $\nu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ とする．$u_1, u_2 \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ を方程式 $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u_i) = f_i\nu$ *in* Ω *(*$i = 1, 2$*)* の解とする．ここで $0 \leq f_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega, \nu)$．このとき,

$$-\operatorname{div}\left(A(x)\nabla \min\{u_1, u_2\}\right) \geq \min\{f_1, f_2\}\nu \quad \text{in } \Omega.$$

優解どうしの上下関係を制御するため, 解の定量的な評価が必要である．次の大域的な Morrey 条件のもとでの解の正則性評価はよく研究されている.

Definition 3.2. 指数 $q \in [1, \infty]$ に対し

$$\mathsf{M}^q(\Omega) := \left\{\nu \in \mathcal{M}_b(\Omega) \colon \|\nu\|_{\mathsf{M}^q(\Omega)} < \infty\right\}$$

と定める．ここで

$$\|\nu\|_{\mathsf{M}^q(\Omega)} := \sup_{\substack{x\in\Omega\\ 0<r<\infty}} r^{-n/q'}|\nu|(\Omega \cap B(x,r)).$$

Example 3.3. (i) Lebesgue 測度を m と書く．$f \in L^q(\Omega)$ なら $fm \in \mathsf{M}^q(\Omega)$. (ii) π を $\mathbb{R}^n$ 内の超平面とし $\sigma(E)$ を $E \cap \pi$ の $n-1$ 次元 Hausdorff 測度とする．このとき, $\sigma \in \mathsf{M}^n(\Omega)$.

Lemma 3.4 ([10, Theorem 3.1.2])**.** ある $q \in (n/2, \infty]$ について $\mu \in \mathsf{M}^q(\Omega)$ とする．$u \in H^1(\Omega)$ を $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \nu$ *in* Ω の弱劣解とする．このとき

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u + C_1 \|\nu\|_{\mathsf{M}^q(\Omega)} \operatorname{diam}(\Omega)^{\beta}.$$

ここで $\sup_{\partial\Omega} u := \inf\{k \in \mathbb{R}^n : (u-k)_+ \in H_0^1(\Omega)\}$, C_1 は n, L, q にのみ依存する定数.

次の補題は [10, Theorem 3.13] と標準的な議論 ([6, Chapter 8] 参照) からしたがう．

Lemma 3.5. Ω は (3) をみたす領域とする．B を中心 $\xi \in \partial\Omega$ 半径 $R > 0$ の球とする．ある $q \in (n/2, \infty]$ について $\nu \in \mathsf{M}^q(\Omega)$ とする．$u \in H^1(\Omega)$ を $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \nu$ *in* Ω の解とする．このとき, 任意の $0 < r < R$ に対し

$$\operatorname*{osc}_{\Omega \cap B(\xi, r)} u \leq C_2 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} \operatorname*{osc}_{\Omega \cap B(\xi, R)} u + \operatorname*{osc}_{\partial\Omega \cap B(\xi, R)} u + C_3 \|\nu\|_{\mathsf{M}^q(\Omega)} R^{\beta}.$$

ここで $\operatorname{osc} u := \sup u - \inf u$, また C_2, C_3, α は n, L, q, γ にのみ依存する定数.

Lemma 3.6. Ω は (3) をみたす領域とする．B を中心 $\xi \in \partial\Omega$ 半径 $0 < R \leq 1$ の球とする．ある $q \in (n/2, \infty]$ について $\nu \in \mathsf{M}^q(\Omega)$ とする．$\beta_0 := \min\{\alpha/2, \beta\}$ とし, 正数 θ を

$$\theta \leq \left(\frac{1}{4^{\alpha} \cdot 16 \cdot C_2}\right)^{1/(\alpha - \beta_0)} \tag{7}$$

となるようにとる．さらに,

$$\|\nu\|_{\mathsf{M}^q(\Omega)} \leq \min\left\{\frac{\theta^{\beta_0}}{8C_3}, \frac{1}{C_1}\right\}, \tag{8}$$

と仮定する．ここで C_1, C_2, C_3, α は *Lemma 3.4* および *Lemma 3.5* の定数．関数 $\eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ を

$$\eta = \frac{1}{4}(\theta R)^{\beta_0} \ \ on\ \overline{\Omega \cap B/2}, \quad \eta = R^{\beta_0} \ \ on\ \overline{\Omega} \setminus B,$$

$$\frac{1}{4}(\theta R)^{\beta_0} \leq \eta \leq R^{\beta_0} \ \ in\ \overline{\Omega}.$$

となるようにとる．関数 $u \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ を

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \nu & in\ \Omega \cap B, \\ u \in \eta + H_0^1(\Omega \cap B) \end{cases}$$

の解とする．このとき,

$$\frac{1}{4}(\theta R)^{\beta_0} \leq u \leq 2R^{\beta_0} \quad in\ \Omega \cap B, \tag{9}$$

$$u \leq \frac{1}{2}(\theta R)^{\beta_0} \quad on\ \Omega \cap 2\theta B. \tag{10}$$

Proof. Hedberg-Wolff の定理から $\nu \in (H_0^1(\Omega \cap B))^*$. Riesz の表現定理から求める解 u が存在する．u の Ω 内での正則性は内部正則性評価と Lemma 3.5 からしたがう．(9) は Lemma 3.4 と比較原理からしたがう．(10) をしめす．仮定から $C_2 4^{\alpha} \theta^{\alpha - \beta_0} \leq 1/16$. Lemma 3.5 から

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega \cap 2\theta B} u &\leq C_2 4^{\alpha} \theta^{\alpha - \beta_0} \theta^{\beta_0} \sup_{\Omega \cap B/2} u + \sup_{\partial\Omega \cap B/2} u + C_3 \|\nu\|_{\mathsf{M}^q(\Omega)} R^{\beta} \\
&\leq \frac{1}{16} \theta^{\beta_0} \cdot 2R^{\beta_0} + \sup_{\partial\Omega \cap B/2} u + C_3 \|\nu\|_{\mathsf{M}^q(\Omega)} R^{\beta} \\
&\leq \frac{1}{8} \theta^{\beta_0} R^{\beta_0} + \frac{1}{4}(\theta R)^{\beta_0} + \frac{1}{8} \theta^{\beta_0} R^{\beta_0} = \frac{1}{2}(\theta R)^{\beta_0}.
\end{aligned}$$

ここで (9) と $R^\beta \le R^{\beta_0}$ であることを使った. $\square$

Proof of Theorem 2.2. スケール変換から $\mathrm{diam}(\Omega) \le 1$ かつ $\|\nu\|_{\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)}$ は十分小として一般性を失わない.

β_0 を Lemma 3.6 の正数とし, 正数 $0 < \theta < 8^{-1/\beta_0}$ で (7) をみたすものをとる. 各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し $\Gamma_k = \{x \in \Omega\colon \delta_\Gamma \le \theta^k\}$ とおく. また $\nu_k = \mathbf{1}_{\Omega\setminus\Gamma_{k+2}}\nu$ とおく. 境界点に中心をもつ半径 θ^k の球 B をとると,

$$\|\nu_k\|_{\mathsf{M}^q(\Omega\cap B)} = \sup_{\substack{x\in\Omega\cap B\\ 0<r<2\theta^k}} r^{-n/q'}\nu_k((\Omega\cap B)\cap B(x,r)).$$

右辺を評価する. $x \in \Omega\cap B$ かつ $0 < r < 2\theta^k$ とし, $B(x,r)$ を半径 $\theta^2 r/6$ の球の族 $\{\hat{B}_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}}$ で覆う. ただし $\mathcal{N}$ は n と θ にのみ依存する定数. もし $\hat{B}_i \cap (\Omega\setminus\Gamma_{k+2}) \ne \emptyset$ なら $2\hat{B}_i \subset \Omega$. したがって,

$$\nu_k((\Omega\cap B)\cap B(x,r)) \le \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \nu_k((\Omega\cap B)\cap\hat{B}_i) \le \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \nu_k(\hat{B}_i) \le \mathcal{N}\|\nu\|_{\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)} r^{n/q'}.$$

ふたつの不等式から

$$\|\nu_k\|_{\mathsf{M}^q(\Omega\cap B)} \le \mathcal{N}\|\nu\|_{\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)}.$$

以下では左辺が (8) をみたすものとする.

Γ_{k+1} を有限個の球の族 $\{2\theta B_{k,j}\}_{j\in J_k}$ で覆う. ただし各 $B_{k,j}$ は境界点 $\xi_j \in \Gamma$ に中心をもつ半径 θ^k の球. 定義から

$$\Gamma_{k+1} \subset D_k := \Omega \cap \bigcup_{B_{k,j}\in J_k} B_{k,j} \subset \Gamma_k.$$

各 $k \in \mathbb{Z}$ と $j \in J_k$ に対し $u_{k,j}$ を Lemma 3.6 の関数とする ($\Omega = \Omega\cap B_{k,j}$, $B = B_{k,j}$, $\nu = \nu_k$). Ω 上の関数 v_k を

$$v_k(x) := \begin{cases} \displaystyle\min_{\substack{j\in J_k\\ B_{k,j}\ni x}} u_{k,j}(x), & \forall x \in D_k,\\ \theta^{k\beta_0} & \forall x \in \Omega\setminus D_k \end{cases}$$

で定める. (9) と (10) から

$$\frac{1}{4}\theta^{(k+1)\beta_0} \le v_k \le 2\theta^{k\beta_0} \quad \text{in } \Gamma_k, \tag{11}$$

$$v_k \le \frac{1}{2}\theta^{(k+1)\beta_0} \quad \text{on } \Gamma_{k+1}, \tag{12}$$

Lemma 3.1 から

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla v_k) \ge \nu_k \quad \text{in } D_k. \tag{13}$$

Ω 上の関数 s を

$$s(x) = \inf_{\Gamma_k\ni x} v_k(x)$$

で定める. $\theta^{-\beta_0} > 8$ としていたので, $k-2 \ge k'$ なら

$$v_k(x) \le 2\theta^{k\beta_0} = \left(2\theta^{\beta_0}\right)\theta^{(k-1)\beta_0} < \frac{1}{4}\theta^{(k'+1)\beta_0} \le v_{k'}(x), \quad \forall x \in \Gamma_k.$$

よって

$$s(x) = \min\{v_k(x), v_{k-1}(x)\} \quad \text{in } \Gamma_k\setminus\Gamma_{k+1}.$$

Lemma 3.1 と (13) から $-\operatorname{div}(A(x)\nabla s) \geq \nu_k$ in $D_k \setminus \Gamma_{k+1}$. 一方, (12) から

$$v_{k-1} \leq \frac{1}{2}\theta^{k\beta_0} < \theta^{k\beta_0} = v_k, \quad \text{on } \Gamma_k \setminus D_k.$$

v_k の連続性から開近傍 O_k of $\Gamma_k \setminus D_k$ で $s = v_{k-1}$ in O_k となるものがとれる. したがって $-\operatorname{div}(A(x)\nabla s) \geq \nu_k = \nu$ が $\Gamma_k \setminus \Gamma_{k+1}$ の開近傍でなりたつ. これは s が (5) をみたすことをしめしている. 両側評価 (6) は (11) からしたがう. □

4 $\mathsf{M}^q_{\partial\Omega}(\Omega)$ に属する測度の例

単純計算から次がなりたつ.

Proposition 4.1 ([8])**.** $\mu \in \mathsf{M}^q(\Omega)$ *(*$1 \leq q \leq \infty$*)* とし

$$0 \leq t \leq \begin{cases} \dfrac{n(q-1)}{q} & (1 \leq q < \infty), \\ n & (q = \infty) \end{cases}$$

とする. このとき,

$$\delta(\cdot)^{-t}\,\mu \in \begin{cases} \mathsf{M}^{qn/(n+qt)}_{\partial\Omega}(\Omega) & (1 \leq q < \infty), \\ \mathsf{M}^{n/t}_{\partial\Omega}(\Omega) & (q = \infty). \end{cases} \tag{14}$$

測度 μ として Lebesgue 測度 m をとり (14) の指数が $(n/2, \infty]$ に入る条件を考える.

Example 4.2 ([8])**.** m で Lebesgue 測度をあらわす. このとき $0 \leq t < 2$ に対して $\delta(\cdot)^{-t}m(=: \nu) \in \mathsf{M}^{n/t}_{\partial\Omega}(\Omega)$.

Theorem 2.3 と Example 4.2 の組み合わせは [3, Theorem 6.2] の精密化を与えている (係数関数のなめらかさによらず大域 Hölder 評価がなりたつ). 有界 Lipschitz 領域では境界からの距離関数のべきが可積分になるかのしきい値は -1 である. したがって, $1 \leq t < 2$ の場合上述の ν が有限測度になることは期待できない. 一方, 表示 (2) をみなおすと, べき t の上限 2 は Ω の境界がなめらかであれば Green 関数が領域境界で一次減衰することとよく合致している. 外力が "均されている" 場合は, 領域境界がなめらかな場合の類似がなりたつのである.

一方, μ が次元の小さい集合に集中していれば t の範囲は変わってくる.

Example 4.3 ([8])**.** σ を Example 3.3 の測度とする. このとき, $0 \leq t < 1$ に対し $\delta(\cdot)^{-t}\sigma \in \mathsf{M}^{n/(1+t)}_{\partial\Omega}(\Omega)$.

実際, 角がある平面領域の Green 関数を考えれば 2 に近い t に対しては積分 (2) が発散する場合があることがわかる (たとえば Figure 1 において水平方向から口に近づく場合). 我々の領域の仮定 (3) からは Green 関数の境界 Lipschitz 評価はしたがわず, Hölder 評価の指数も正数であることしかわからないことに注意する.

5 謝辞

この研究は JST CREST (doi:10.13039/501100003382) Grant Number JPMJCR18K3 および JSPS KAKENHI (doi:10.13039/501100001691) Grant Number 23H03798 の補助を得て行われた.

References

[1] M. Aizenman and B. Simon. Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(2):209–273, 1982.

[2] W. Allegretto and Y. X. Huang. A Picone's identity for the p-Laplacian and applications. *Nonlinear Anal.*, 32(7):819–830, 1998.

[3] A. Ancona. On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in $\mathbf{R}^n$. *J. London Math. Soc. (2)*, 34(2):274–290, 1986.

[4] C. Cascante, J. M. Ortega, and I. E. Verbitsky. Trace inequalities of Sobolev type in the upper triangle case. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 80(2):391–414, 2000.

[5] F. Chiarenza. Regularity for solutions of quasilinear elliptic equations under minimal assumptions. volume 4, pages 325–334. 1995. Potential theory and degenerate partial differential operators (Parma).

[6] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[7] T. Hara. Strong barriers for weighted quasilinear equations, *arXiv, https://doi.org/10.48550/arxiv.2211.12183* , 2022.

[8] T. Hara. Global Hölder solvability of linear and quasilinear Poisson equations, *arXiv, https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.09701* , 2023.

[9] W. Littman, G. Stampacchia, and H. F. Weinberger. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)*, 17:43–77, 1963.

[10] J. Malý and W. P. Ziemer. *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations*, volume 51 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[11] V. Maz'ya. *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*, volume 342 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer, Heidelberg, augmented edition, 2011.

[12] J.-M. Rakotoson and W. P. Ziemer. Local behavior of solutions of quasilinear elliptic equations with general structure. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 319(2):747–764, 1990.