On the number of points with bounded dynamical canonical height

東北大学理学研究科数学専攻 竹平航平 *
Kohei Takehira, Mathematical Institute, Tohoku University

1 序文

本稿は 2023 年 10 月 10 日から 10 月 13 日にかけて行われた研究集会，RIMS 共同研究（公開型）「解析整数論とその周辺」における筆者の講演「On the number of points with bounded dynamical canonical height」に関する報告である.

高さ関数は, 点の「数論的複雑さ」に関する定量的な指標として, 数論の至るところで活用されている. 加えて, 高さ関数は単に道具として重要というだけでなく, それ自身興味深い研究対象である. 例えば, Schanuel [5] は代数体 K 上の射影 N 空間 $\mathbb{P}^N_K$ 上の点であって, 高さが与えられた値 B 以下になる点の個数の漸近公式を示している. この公式には, K の Dedekind ゼータ関数の特殊値や, K の類数, レギュレータ等, 数論的に興味深い定数を含む.

一方, 大域体 K を係数に持つ有理関数 $\phi \in K(z)$ が定める写像 $\phi\colon \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ による力学系に対し, 高さ関数の類似 $\widehat{H}_\phi$ が定義できる. これは Call-Silverman [1] によるもので, dynamical canonical height と呼ばれている. 通常の高さ関数と同様に, $\widehat{H}_\phi$ が B 以下となるような点の個数は有限であることが知られている.

本研究は, dynamical canonical height が与えられた値 B 以下になるような点の個数の漸近挙動を求めようというものである. 特に, 基礎体 K が有限体上の曲線の関数体である場合に議論を行う. そのために, Hsia [3] によって研究された dynamical height zeta function と呼ばれるある種のゼータ関数を用いる. 研究は主に次の二つの部分からなる.

(1) dynamical height zeta function $Z_K(\phi, s)$ の明示計算

(2) $Z_K(\phi, s)$ から漸近公式を導く

(1) は Riemann-Roch の定理を用いた計算が主軸となり, これは Hsia による先行研究に追従するものである. (2) はゼータ関数の情報から漸近挙動を導くという, より解析数論的な議論であるため, 本稿ではこちらにより比重を置いて解説を行う.

*kohei.takehira.p5@dc.tohoku.ac.jp

2 準備

まず, 高さ関数および dynamical canonical height を復習する. 高さ関数については [2], dynamical canonical height に関しては [6] が基本的な文献の一つであると思われる.

K を代数体または有限体上の曲線の関数体とする. この時, M_K を K の素点の集合, すなわち K の非自明な乗法付値の同値類とする. 各素点 $v \in M_K$ に対し, $\| \bullet \|_v$ を次のように定める：

$$\|x\|_v = \begin{cases} q_v^{-v(x)} & \text{if } v \text{ が } \mathcal{O}_K \text{ の素イデアルに対応する素点} \\ |x|_{\mathbb{R}} & \text{if } v \text{ が実素点} \\ |x|_{\mathbb{C}}^2 & \text{if } v \text{ が虚素点} \end{cases}$$

ただし, 素イデアルに対応する素点 v は対応する正規加法付値と同一視し, q_v を v における剰余体の濃度とする. $| \bullet |_{\mathbb{R}}, | \bullet |_{\mathbb{C}}$ はそれぞれ $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ の通常の絶対値である. $x \in K$ の高さとは

$$H_K(x) = \prod_{v \in M_K} \max\{1, \|x\|_v\}$$

によって定まる量であり, $K = \mathbb{Q}$ の場合には, 既約分数 $x = a/b$ に対し, $H_{\mathbb{Q}}(x) = \max\{|a|, |b|\}$ が成立する.

多項式 $\phi \in K[z]$ であって, $d = \deg(\phi) \geq 2$ を満たすものをとる. ϕ を K の自己写像とみなし, その反復合成 $\phi^0(z) := z, \phi^{n+1}(z) := \phi(\phi^n(z))$ を考える. ϕ に対する dynamical canonical height とは,

$$\widehat{H}_\phi(x) = \lim_{n \to \infty} H_K(\phi^n(x))^{1/d^n}$$

である (cf. [6, Section 3.4], ただし, [6] では上記を $1/[K : \mathbb{Q}]$ 乗したものを定義としている). $\widehat{H}_\phi(x)$ も H_K と同様に各素点にわたる積として表現できる. 実際, local canonical height を

$$\widehat{H}_{\phi,v}(x) = \lim_{n \to \infty} \max\{1, \|\phi^n(x)\|_v\}^{1/d^n}$$

で定めると,

$$\widehat{H}_\phi = \prod_{v \in M_K} \widehat{H}_{\phi,v}$$

が成立する.

以下, 正の実数 $B > 0$ に対し,

$$N(K, \widehat{H}_\phi, B) = \#\{x \in K \colon \widehat{H}_\phi(x) \leq B\}$$

と定め, この量の $B \to \infty$ における漸近挙動を調べる.

3 dynamical height zeta function と Hsia による議論

K を代数体または有限体上の曲線の関数体とする. また, $\phi \in K[z]$ で, $d = \deg(\phi) \geq 2$ なるものをとる. Hsia は [3] において, 次の dynamical height zeta function を考察した.

$$Z_K(\phi, s) = \sum_{x \in K} \frac{1}{\widehat{H}_\phi(x)}.$$

[3] によれば, この関数を導入したのは Silverman であるそうだが, セミナーで話されたのみで, 文献は存在しない. Hsia は K が関数体かつ, ϕ が高々mildly bad reduction (定義は [3]) を持つという仮定の下で, 次を証明した.

定理 3.1 (Hsia, [3])**.** K を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の種数 g の曲線の関数体とする. また, 多項式 $\phi \in K[z]$ は高々 worst mildly bad reduction を持つとする. この時, $Z_K(\phi, s)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型接続され, さらに

$$\begin{aligned} Z_K(\phi, s) &= q^{1-g} \int_{\mathbb{A}_K} \widehat{H}_\phi(x)^{-s} d\mu(x) + R(s) \\ &= q^{1-g} \frac{\zeta_K(s-1)}{\zeta_K(s)} \prod_{v \in S} \frac{\int_{K_v} \widehat{H}_{\phi,v}(x)^{-s} d\mu_v(x)}{\int_{K_v} H_v(x)^{-s} d\mu_v(x)} + R(s) \end{aligned}$$

とかける. ここで, ζ_K は K の Dedekind ゼータ関数である. また, $\mathbb{A}_K$ は K のアデール環で, μ はその上の Haar 測度であり, 整数環の直積の測度が 1 になるように正規化されたもの, $S = \{v \in M_K \colon \phi \text{ doesn't have good reduction at } v\}$ であり, $R(s)$ は $\mathbb{C}$ 上のある有理型関数で, $R(s) \prod_{v \in S}(1 - q^{-f_v s})$ が整関数となるようなものである.

上記の定理と, ζ_K が $s = 1$ に極を持つことから, $Z_K(\phi, s)$ は $s = 2$ に極を持つ.

この定理の証明の概略を述べる. まず, 仮定を用いて K を有限個の部分集合の非交和であって, 次を満たすものに分割する.

- $K = \mathbb{D}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{D}_l$,
- 各 $\mathbb{D}_i$ 上で, $\widehat{H}_\phi / H_K$ は定数 ρ_i となる.

すると,

$$Z_K(\phi, s) = \sum_i \sum_{x \in \mathbb{D}_i} \widehat{H}_\phi(x)^{-s} = \sum_i \rho_i^{-s} \sum_{x \in \mathbb{D}_i} H_K(x)^{-s}.$$

が成立するので, $\sum_{x \in \mathbb{D}_i} H_K(x)^{-s}$ を考察すればよい. $x \in K$ に対し, $(x)_\infty$ を x の極が定める因子とすると,

$$\sum_{x \in \mathbb{D}_i} H_K(x)^{-s} = \sum_{D \geq 0} \#\{x \in \mathbb{D}_i \colon (x)_\infty = D\} (q^{-s})^{\deg D}$$

が成立する. $\#\{x \in \mathbb{D}_i \colon (x)_\infty = D\}$ は local system $L(E)$, ただし E は K の因子, と関連付けることができ, Riemann-Roch の定理から, $\deg(E) \geq 2g-1$ の時は $\#L(E) = q^{\deg(E)+1-g}$ である. これを用いてゼータ関数を計算することができる. Hsia の定理における第二項 $R(s)$ は, $\deg(E) \geq 2g-1$ が成り立たず $\#L(E) = q^{\deg(E)+1-g}$ が使えない有限個の例外をまとめたものである.

4 $Z_K(\phi, s)$ の明示計算

Hsia の定理 3.1は $Z_K(\phi, s)$ に関する抽象的な表示を与えるものであるが, $R(s)$ などについては非自明な場合には具体的な計算を与えていない. $R(s)$ の出自は前節で述べたとお

り, Riemann-Roch を使ってきれいに変形することができない部分であり, 一般には複雑な関数となることが予想される．しかし, いくつかの非自明なケースで具体的に計算することが可能である．

定理 4.1. K を $\mathbb{F}_q$ 上の曲線の関数体であって, 種数 g が 0 または 1 であるようなものとする．また, $d \geq 2$ を 2 以上の整数とする．$\mathcal{O}_K$ の元 $f \in \mathcal{O}_K$ を, すべての素点 $v \in M_K$ に対し $v(f) < d$ を満たすようにとり, $S = \{v \in M_K \colon v(f) > 0\}$ とおく．このとき, $\phi(z) = z^d + f^{-1}$ に対する dynamical height zeta function $Z_K(\phi, s)$ は次の公式で与えられる．

$$Z_K(\phi, s) = q^{1-g}\frac{\zeta_K(s-1)}{\zeta_K(s)}\prod_{v \in S}\frac{u_v^{v(f)} + (q_v - 1)u_v^d - q_v u_v^{d+v(f)}}{1 - u_v^d} + \frac{c(g)}{\zeta_K(s)}\prod_{v \in S}\frac{u_v^{v(f)} - u_v^d}{1 - u_v^d}.$$

ここで, ζ_K は K の Dedekind ゼータ関数, q_v は $v \in M_K$ における剰余体の濃度, $u_v = q_v^{-s/d}$, $c(0) = 0$, $c(1) = q - 1$ である．特に $Z_K(\phi, s) \in \mathbb{Q}(q^{-s/d})$ が成立する。

証明は, Hsia の議論をより精密に実行することで行われる．そのためには, 各素点 v における局所的な力学系のふるまいが追跡でき, また, Riemann-Roch の定理を使った変形がうまくいかない場合にも明示的な計算ができる必要がある．力学系の追跡が分かりやすくなるための仮定が $\phi(z) = z^d + f^{-1}$ であり, 剰余項 $R(s)$ を計算しやすくするための仮定が $g = 0, 1$ である．

5 ゼータ関数から漸近公式へ

本節では, ゼータ関数から漸近公式を導くための命題を導く．

今回の考察対象であるゼータ関数 $Z_K(\phi, s)$ は $\mathrm{Re}(s) = 2$ に無限個の極を持つ．これは, ある整数 N に対し, $Z_K(\phi, s)$ が $q^{-s/N}$ の有理関数であり, 虚軸方向に周期を持つ周期関数であるためである．そのため, Wiener-Ikehara の定理など, ゼータ関数から漸近挙動を導くためによく使われる手法を適用するのが困難である．また, Perron の公式などを用いた積分評価による手法も, 同様に無限個の留数を扱う必要があり困難である．

以上の状況を踏まえ, ゼータ関数の情報から漸近公式を導くための公式を別に用意する．本節の議論は, 例えば [4, Proposition 5] などで行われているような議論の一般化にあたる．

まず, 第 2 種 Stirling 数に関する補題を示す．第 2 種 Stirling 数 $\left\{ n \atop k \right\}$ とは, 漸化式

$$\left\{ n+1 \atop k \right\} = k\left\{ n \atop k \right\} + \left\{ n \atop k-1 \right\}, \tag{5.1}$$

および初期条件

$$\left\{ n \atop n \right\} = 1 \text{ for all } n \geq 0, \quad \left\{ n \atop 0 \right\} = \left\{ 0 \atop n \right\} = 0 \text{ for all } n > 0. \tag{5.2}$$

によって定まる数であった．また, Bernoulli 数 B_n とは,

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}. \tag{5.3}$$

によって定まる数であった.

補題 5.1. 正整数 $n > 0$ に対し, 以下の等式が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+k}\frac{(k-1)!}{(n-1)!}\left\{ {n \atop k} \right\}}{(1-e^{-x})^k} = \frac{1}{x^n} - \frac{1}{(n-1)!}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{m+n}}{m+n}\frac{(-x)^m}{m!}.$$

証明. 変数変換 $x \to -x$ および定数倍により, 主張は次と同値である：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\left\{ {n \atop k} \right\}}{(e^x-1)^k} = \frac{(n-1)!}{x^n} - (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{n+m}}{n+m}\frac{x^m}{m!}.$$

$F_n(x), G_n(x)$ を次のように定める.

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!\left\{ {n \atop k} \right\}}{(e^x-1)^k},$$
$$G_n(x) = \frac{(n-1)!}{x^n} - (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{n+m}}{n+m}\frac{x^m}{m!}.$$

すると, $F_1(x) = G_1(x)$ は Bernoulli 数の定義と同値であり, $n = 1$ の場合が成り立つ. 明らかに, $G_n(x)$ は漸化式 $\frac{d}{dx}G_n(x) = -G_{n+1}(x)$ を満たす. 一方, 第 2 種 Stirling 数を定める漸化式 (5.1) により, $\frac{d}{dx}F_n(x) = -F_{n+1}(x)$ であることも示される. 初期値, 漸化式が同じであるので, $F_n(x) = G_n(x)$ がすべての $n > 0$ に対して成り立つ. □

以下, 次を仮定する.

- S は集合.
- $H\colon S \to \mathbb{R}_{\geq 1}$ は S から 1 以上の実数への写像.
- 任意の正実数 $B > 0$ に対し, $N(S,H,B) = \#\{x \in S\colon H(x) \leq B\}$ は有限.
- ゼータ関数 $Z(S,H,s)$ を
$$Z(S,H,s) = \sum_{x\in S} \frac{1}{H(x)^s}$$
によって定めたとき, この級数は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きな s に対して絶対収束し, さらに, ある $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し, $Z(S,H,s) \in \mathbb{Q}(\alpha^{-s})$ が成立する.

この仮定の下で, ゼータ関数 $Z(S,H,s)$ は周期 $\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\log\alpha}$ の周期関数である. さらに, $Z(S,H,s)$ の極からなる有限集合 Poles を次のように定める.

$$\mathrm{Poles} = \left\{ a \in \mathbb{C}\colon a \text{ is a pole of } Z(S,H,s), 0 \leq \mathrm{Re}(a), 0 \leq \mathrm{Im}(a) < \frac{2\pi}{\log\alpha} \right\}.$$

これは, 実部が非負であるような $Z(S,H,s)$ の極の, 周期 $\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\log\alpha}$ に関する完全代表系である. 各 $a \in \mathrm{Poles}$ に対し, a における $Z(S,H,s)$ の Laurent 展開を次のように定める.

$$Z(S,H,s) = \sum_{n=1}^{N_a} \frac{c_n(a)}{(\log\alpha)^n(s-a)^n} + (\text{holomorphic at } s = a),\ c_{N_a}(a) \neq 0.$$

以上の設定の下, $Z(S,H,s)$ の極の情報から, $N(S,H,B)$ の漸近挙動が次のように求められる.

定理 5.2.

$$N(S,H,B)=\sum_{\alpha^m\le B}\sum_{a\in \mathrm{Poles}}\alpha^{am}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\frac{m^{n-1}}{(n-1)!}+O(1).$$

証明. まず, $Z(S,H,s)$ の定義により,

$$Z(S,H,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\#\{x\in S\colon H(x)=\alpha^m\}\alpha^{-ms}$$

となることに注意する. 以下, $Z(S,H,s)$ をより平易な関数で近似することにより, $\#\{x\in S\colon H(x)=\alpha^m\}$ に関する評価を導く.

補題 5.1 より,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n+k}\frac{(k-1)!}{(n-1)!}\left\{{n \atop k}\right\}}{(1-\alpha^{-(s-a)})^k}-\frac{1}{(\log\alpha)^n(s-a)^n}$$

は $s=a$ で正則である. 従って, 各 $a\in\mathrm{Poles}$ に対し,

$$Z(S,H,s)-\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n+k}\frac{(k-1)!}{(n-1)!}\left\{{n \atop k}\right\}}{(1-\alpha^{-(s-a)})^k}$$

は $s=a$ で正則である. $\alpha^{-(s-a)}$ は周期 $2\pi\sqrt{-1}/\log\alpha$ の周期関数であり, Poles は, 実部が非負であるような $Z(S,H,s)$ の極の, 周期 $\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\log\alpha}$ に関する完全代表系であったので,

$$Z(S,H,s)-\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n+k}\frac{(k-1)!}{(n-1)!}\left\{{n \atop k}\right\}}{(1-\alpha^{-(s-a)})^k}$$

は $\mathrm{Re}(s)\ge 0$ で正則である. さらにこの関数は周期的だから, ある正定数 $\sigma>0$ が存在し, $\mathrm{Re}(s)>-\sigma$ で正則. 一方, Poles にわたる和は, 次のように α^{-s} に関するべき級数に書き換えられる.

$$\begin{aligned}
&\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n+k}\frac{(k-1)!}{(n-1)!}\left\{{n \atop k}\right\}}{(1-\alpha^{-(s-a)})^k}\\
&=\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\frac{(k-1)!}{(n-1)!}\left\{{n \atop k}\right\}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-k}{m}(-\alpha^{-(s-a)})^m\\
&=\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}\frac{(k-1)!}{(n-1)!}\left\{{n \atop k}\right\}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{m}\alpha^{ma}\alpha^{-ms}\\
&=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{-ms}\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\alpha^{am}\sum_{n=1}^{N_a}\frac{c_n(a)}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{{n \atop k}\right\}(k-1)!\binom{m+k-1}{k-1}.
\end{aligned}$$

最初の等式は二項定理であり, 次の等式は二項係数に関する公式 $\binom{-k}{m} = (-1)^m \binom{m+k-1}{m}$ による. Pochhammer 記号 $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を導入すると,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ {n \atop k} \right\}(k-1)!\binom{m+k-1}{k-1} \\
=&\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ {n \atop k} \right\}(m)_k \\
=&m^{n-1}
\end{aligned}
$$

が分かる. ただし, $x^n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\left\{ {n \atop k} \right\}(x)_k$ が成り立つことを用いた. 以上より,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n+k}\frac{(k-1)!}{(n-1)!}\left\{ {n \atop k} \right\}}{(1-\alpha^{-(s-a)})^k} \\
=&\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^{-ms}\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\alpha^{am}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\frac{m^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}
$$

である.

α^{-s} に関するべき級数

$$
\sum_{m=0}^{\infty}\left(\#\{x\in S\colon H(x)=\alpha^m\}-\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\alpha^{ma}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\frac{m^{n-1}}{(n-1)!}\right)\alpha^{-ms}
$$

は $\mathrm{Re}(s) > -\sigma$ に関して正則であり, 特に $s = -\sigma/2$ を代入したべき級数は絶対収束する. 各項は 0 に収束しなくてはならないから, ある正定数 $C > 0$ が存在し, すべての非負整数 m に対し

$$
\left|\#\{x\in S\colon H(x)=\alpha^m\}-\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\alpha^{ma}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\frac{m^{n-1}}{(n-1)!}\right|\alpha^{m\sigma/2}\leq C.
$$

が成り立つ.

$$
N(S,H,B)=\sum_{\alpha^m\leq B}\#\{x\in S\colon H(x)=\alpha^m\}
$$

であるので,

$$
\begin{aligned}
&\left|N(S,H,B)-\sum_{\alpha^m\leq B}\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\alpha^{am}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\frac{m^{n-1}}{(n-1)!}\right| \\
\leq&\sum_{\alpha^m\leq B}\left|\#\{x\in S\colon H(x)=\alpha^m\}-\sum_{a\in\mathrm{Poles}}\alpha^{ma}\sum_{n=1}^{N_a}c_n(a)\frac{m^{n-1}}{(n-1)!}\right| \\
\leq&C\sum_{m\leq T}(\alpha^{-\sigma/2})^m \\
<&\frac{C}{1-\alpha^{-\sigma/2}}.
\end{aligned}
$$

$\square$

以上の漸近評価は, 階段状の不連続な関数による近似である. これは, H の値が α の冪しかとらないことに起因する.

6 具体例

$K=\mathbb{F}_5(t,\sqrt{t^3+3})$, $\phi(z)=z^2+1/t\in K[z]$ とする. この状況で $N(K,\phi,B)$ の漸近公式を求める. K に関しては次のことがわかる：

- 体 K は楕円曲線 $y^2=x^3+3$ over $\mathbb{F}_5$ の関数体である.
- Jacobi 記号の計算 $\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\left(\frac{f(0)}{t}\right)=f(0)^{(5-1)/2}=-1$ in $\mathbb{F}_5$ により, 素イデアル $t\mathbb{F}_5[t]$ は K で惰性. 従って, $S=\{v\in M_K\colon v(t)>0\}=\{v_t\}$ である. ただし, v_t は素イデアル $t\mathcal{O}_K$ に対応する素点. さらに, $q_{v_t}=5^2=25, v_t(t)=1$.
- $\{(x,y)\in\mathbb{F}_5^2\colon y^2=x^3+3\}=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,4),(3,0)\}$ は 5 点からなり, 楕円曲線 $y^2=x^3+3$ の Frobenius trace は 0. これより, K のゼータ関数は
$$\zeta_K(s)=\frac{1+5^{1-2s}}{(1-5^{-s})(1-5^{1-s})}.$$

定理 4.1, により, ゼータ関数 $Z_K(\phi,s)$ は次のように求められる.

$$\begin{aligned}&Z_K(\phi,s)\\ =&\frac{\zeta_K(s-1)}{\zeta_K(s)}\frac{u_{v_t}+(q_{v_t}-1)u_{v_t}^2-q_{v_t}u_{v_t}^3}{1-u_{v_t}^2}+\frac{q-1}{\zeta_K(s)}\frac{u_{v_t}-u_{v_t}^2}{1-u_{v_t}^2}\\ =&5^{-s}\frac{(1-5^{-s})(1+5^{2-s})(1+5^{3-2s})}{(1+5^{-s})(1-5^{2-s})(1+5^{1-2s})}+4\cdot5^{-s}\frac{(1-5^{-s})(1+5^{1-s})}{(1+5^{-s})(1+5^{1-2s})}.\end{aligned}$$

極の代表系は
$$\text{Poles}=\left\{2,\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\log(5)},\frac{1}{2}+\frac{3\pi\sqrt{-1}}{2\log(5)},\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\log(5)}\right\}$$
であり, すべて単純であり, Laurent 係数は 表 1のように求められる.

表 1: Laurent coefficients

$a\in$ Poles	2	$\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{-1}}{2\log(5)}$	$\frac{1}{2}+\frac{3\pi\sqrt{-1}}{2\log(5)}$	$\frac{\pi\sqrt{-1}}{\log 5}$
$c_1(a)$	$\frac{8}{91}$	$\frac{2}{7}(23-3\sqrt{-5})$	$\frac{2}{7}(23+3\sqrt{-5})$	$\frac{400}{13}$

以上のデータと 定理 5.2 により,

$$
\begin{aligned}
&N(K,\widehat{H}_\phi,B)\\
=&\sum_{5^m\le B}\sum_{a\in\mathrm{Poles}}5^{am}c_1(a)+O(1)\\
=&\sum_{5^m\le B}\left(\frac{8}{91}25^m+\frac{2}{7}(23-3\sqrt{-5})(\sqrt{-5})^m+\frac{2}{7}(23+3\sqrt{-5})(-\sqrt{-5})^m+\frac{400}{13}(-1)^m\right)+O(1)\\
=&\frac{8}{91}\sum_{5^m\le B}25^m+\frac{92}{7}\sum_{5^{2m}\le B}(-5)^m+\frac{30}{7}\sum_{5^{2m+1}\le B}(-5)^m+O(1)\\
=&\frac{25}{273}25^{\left\lfloor\frac{\log B}{\log 5}\right\rfloor}+\frac{5}{21}\left(46(-5)^{\left\lfloor\frac{1}{2}\cdot\frac{\log B}{\log 5}\right\rfloor}+15(-5)^{\left\lfloor\frac{1}{2}\left(\frac{\log B}{\log 5}-1\right)\right\rfloor}\right)+O(1).
\end{aligned}
$$

謝辞

本研究集会において講演の機会を下さった研究代表者の安福悠先生, 副代表者の中筋麻貴先生, および集会の運営に携われた皆様に深い感謝を申し上げます．指導教員である都築暢夫先生には研究における様々な点において丁寧なご指導をしていただきました．また，筆者は日本学術振興会特別研究員 (JP22J20227) および東北大学人工知能エレクトロニクス卓越大学院プログラムにおける助成を受けております.

参考文献

[1] G. S. Call and J. H. Silverman, *Canonical heights on varieties with morphisms*, Compositio Math. **89** (1993), no. 2, 163–205. MR1255693

[2] M. Hindry and J. H. Silverman, *Diophantine geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 201, Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction. MR1745599

[3] L.-c. Hsia, *On the dynamical height zeta functions*, J. Number Theory **63** (1997), no. 1, 146–169. MR1438655

[4] W. Parry, *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of shifts of finite type and their suspensions*, Israel J. Math. **45** (1983), no. 1, 41–52. MR710244

[5] S. Schanuel, *On heights in number fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 262–263. MR162787

[6] J. H. Silverman, *The arithmetic of dynamical systems*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 241, Springer, New York, 2007. MR2316407