

周囲気体が速度振動する 平面液体ジェットの破断現象

Breakup phenomena of a planar liquid jet for velocity oscillations of a surrounding gas

同志社大学・高機能微粒子研究センター 吉永隆夫

Takao Yoshinaga

Research Center for Highly-Functional Nanoparticles,
Doshisha Univ.

大阪大学・工 藤原邦夫

Kunio Fujiwara

Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1 まえおき

液体ジェットの問題は、微粒化、混合などジェット不安定化の応用や製紙やコーティングなど安定化の応用で工業上重要であり、古くから理論的・実験的に研究されてきた [1, 2, 3]. 特に、平面ジェットの不安定による破断現象は、Squire [4] による線形解析以来、多くの研究者によりその発生メカニズムが調べられてきた [5, 6, 7]. なかでも非線形解析では、Mehring と Sirignano [8] は長波近似で得られた非線形方程式を用いて、周囲流体がなくともシートは破断することを示した. また、Kan と Yoshinaga [9] は 2 枚の平面壁間でのシートの挙動を数値的に調べ、シートと壁面間の距離の減少が非線形性と不安定性を増加させることを示した. さらに、Fujiwara [10] は 2 枚の平行平板間でのシート部と周囲気体部に長波近似 (薄膜近似) を適用し、周囲流体を含む液体シートの非線形方程式を導出し、周囲気体によるシート破断の影響を解析的に調べている.

このような平面ジェットの不安定性は、ジェットと周囲気体間の速度差による空力不安定に基づく Kelvin-Helmholtz (KH) 不安定現象として知られているが、同様な不安定現象は周囲気体の振動によっても引き起こされる. この不安定現象は古くからパラメトリック励振として、ブランコや振子で知られており、固有振動数の 2 倍で加振したときに励起される振動現象である. このような現象は流体においても鉛直加振された容器内液面に発生する定在波 (ファラデー波) [11] や、鉛直または水平加振された 2 層流体界面の振動現象 [12, 13, 14] などがこれまで調べられてきた. 近年、液体ジェットでも関連する現象が実

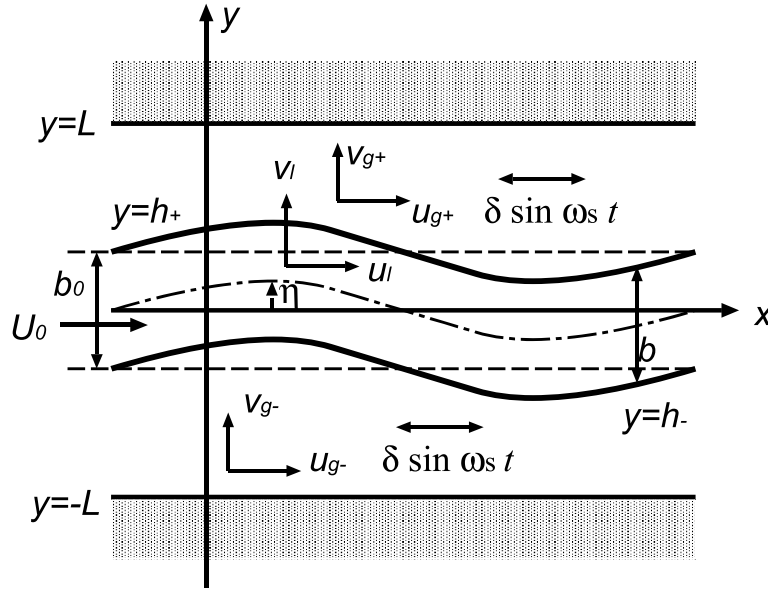


図 1: Schematic of a planar liquid jet and surrounding gas between solid walls, where the gas phases are subjected to velocity oscillations in the x direction.

験や解析で調べられるようになった。Dighe と Gadgil [15] は周囲気体をジェット面に垂直に加振したとき、低周波ではシートが大きく変形するが高周波では小さく振動し破断することを示した。一方、Jia [16] 等はジェット面平行に加振するとき、外部振動がジェットの破断を遅らせ、外部振動数の半分の振動が励起される場合があることを示した。この実験に関連して、無限に広がった周囲気体に加えられたジェットに平行な速度振動が、ジェットの安定性にどのような影響を及ぼすかを線形解析により調べられている [17, 18]。

本解析では、Fujiwara [10] により示された長波方程式を用いて、ジェット平行に加えられた周囲気体の速度振動によるジェットの安定性と破断現象を線形および非線形の解析により調べている。

2 長波近似と非線形発展方程式

図 1 に示すような平面壁間に挟まれた 2 次元平面液体ジェットを考え、主流方向を x 軸、厚み方向を y 軸に取る。ジェット上下界面は $y = h_{\pm}(x, t)$ 、ジェット部厚み中央面は $\eta(x, t) \equiv (h_+(x, t) + h_-(x, t))/2$ 、気相部厚み中央面は $\eta(x, t)_{\pm} \equiv (\pm L \pm h_{\pm})/2$ 、ジェット部厚み $b(x, t) \equiv h_+(x, t) - h_-(x, t)$ 、気相部厚み $b(x, t)_{\pm} \equiv L - |h(x, t)_{\pm}|$ で表される。また壁面は $y = \pm L$ で規定される。ジェット液体部、周囲気体部での諸量をそれぞれ添え字 l, g で表し、流速 (u_l, v_l) , (u_g, v_g) 、圧力 p_l, p_g 、密度 ρ_l, ρ_g 、表面張力 σ 、粘性係数 μ_l とする。ただし、周囲気体部の粘性は無視 ($\mu_g = 0$) し、圧縮性と重力の影響は考えないものとする。さらに、周囲気体部の速度変動が x 軸方向に $\delta \sin \omega_s t$ で与えられているとする。

基礎方程式はジェット流体部 ($-h_- < y < h_+$)、及び周囲気体部 ($-L < y < h_-$, $h_+ <$

$y < L$) に対する連続の式と運動方程式であり, 境界条件としては $y = \pm L$, $y = h_{\pm}$ での運動学的条件と, $y = h_{\pm}$ での力学的条件 (界面接線方向と法線方向) からなる.

解析を簡単にするため, 液相, 気相厚みがジェット変形波長に比べて十分小さいとし, 以下の薄膜近似を考える:

(i) 液相部 ($h_- < y < h_+$):

$$u_l(x, y, t) = u_{l0}(x, t) + (y - \eta)u_{l1}(x, t) + (y - \eta)^2 u_{l2}(x, t) + \dots, \quad (1a)$$

$$v_l(x, y, t) = v_{l0}(x, t) + (y - \eta)v_{l1}(x, t) + (y - \eta)^2 v_{l2}(x, t) + \dots, \quad (1b)$$

$$p_l(x, y, t) = p_{l0}(x, t) + (y - \eta)p_{l1}(x, t) + (y - \eta)^2 p_{l2}(x, t) + \dots, \quad (1c)$$

(ii) 気相部 ($-L < y < h_-$, $h_+ < y < L$):

$$u_{g\pm}(x, y, t) = u_{g0\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})u_{g1\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})^2 u_{g2\pm}(x, t) + \dots, \quad (2a)$$

$$v_{g\pm}(x, y, t) = v_{g0\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})v_{g1\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})^2 v_{g2\pm}(x, t) + \dots, \quad (2b)$$

$$p_{g\pm}(x, y, t) = p_{g0\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})p_{g1\pm}(x, t) + (y - \eta_{\pm})^2 p_{g2\pm}(x, t) + \dots. \quad (2c)$$

ここで, $|h - \eta| \leq b/2 \sim O(b)$, $|h_{\pm} - \eta_{\pm}| \leq b_{\pm}/2 \sim O(b_{\pm})$ の程度であるが η , $\eta_{\pm}$ の大きさは変形波長 ($\sim \lambda$) 程度 $\sim O(1)$ として $b, b_{\pm} \ll \lambda$ であることに注意しよう.

このような近似を基礎方程式と境界条件に用い, 厚み b , $b_{\pm}$ の最低次の項を残して, 無次元化された以下の方程式系を得る:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -u_{l0} \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_{l0}, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -u_{l0} \frac{\partial b}{\partial x} - b \frac{\partial u_{l0}}{\partial x}, \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{l0}}{\partial t} &= -u_{l0} \frac{\partial u_{l0}}{\partial x} - \frac{\partial p_{l0}}{\partial x} + p_{l1} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 u_{l0}}{\partial x^2} - u_{l1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u_{l1}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2u_{l2} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{l0}}{\partial t} &= -u_{l0} \frac{\partial v_{l0}}{\partial x} - p_{l1} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial^2 v_{l0}}{\partial x^2} - v_{l1} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v_{l1}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + 2v_{l2} \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3d)$$

$$\frac{\partial u_{g0\pm}}{\partial t} = -u_{g0\pm} \frac{\partial u_{g0\pm}}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_{g0\pm}}{\partial x} + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x} \right) p_{g1\pm}, \quad (3e)$$

$$\frac{\partial v_{g0\pm}}{\partial t} = -u_{g0\pm} \frac{\partial v_{g0\pm}}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} p_{g1\pm}. \quad (3f)$$

ここで, 代表速度, 距離, 時間, 圧力はそれぞれ, 攪乱がない場合の主流速度 U_0 , ジェット半厚み $b_0/2$, 時間 $U_0/(b_0/2)$, 動圧力 $\rho_l U_0^2$ を用い, 無次元量としては密度比 $\gamma = \rho_g/\rho_l$,

壁面距離 $m = L/(b_0/2)$, レイノルズ数 $\text{Re} = \rho_l U_0(b_0/2)/\mu_l$, ウェバー数 $\text{We} = \rho_l U_0^2(b_0/2)/\sigma$ が導入されている．ここに,

$$\begin{aligned} 2v_{g0\pm} &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial t} + u_{g0\pm} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} \pm \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial t} &= \pm \frac{\partial}{\partial x} \left[u_{g0\pm} \left(m - \frac{b}{2} \mp \eta \right) \right], \end{aligned}$$

の関係があり, $p_{l0}, p_{l1}, u_{l1}, v_{l1}, u_{l2}, v_{l2}$ は u_{l0}, v_{l0} の関数である．

3 線形安定性

前節で得られた長波方程式系で外部振動の下での攪乱の線形時間安定性を調べ, 厳密方程式系 (基礎方程式+境界条件) から得られる線形安定性の結果と比較する．まず, 平衡状態が界面変位一定状態 ($h_{\pm} = \pm 1$) と仮定したとき, 外部振動のため流速と圧力は以下のように変化する:

$$\begin{aligned} u_{l0} &= U_l(t), v_{l0} = 0, u_{g0\pm} = U_g(t), v_{g0\pm} = 0, \\ p_{l0} &= p_{g0\pm} = P(t)x, \eta = p_{l1} = p_{g1\pm} = 0, b = 2. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, $\bar{U}_l$ と $\bar{U}_g$ は定数で, $U_g(t) = \bar{U}_g + \delta \sin \omega_s t$, $U_l(t) = \bar{U}_l + \gamma \delta \sin \omega_s t$, $P(t) = -\gamma \delta \omega_s \cos \omega_s t$ となる．波数 k の正弦攪乱を含む微小攪乱を $\sim$ のついた量で表し以下のように仮定する: 長波方程式に対して,

$$(\tilde{u}_l, \tilde{v}_l, \tilde{u}_{g\pm}, \tilde{v}_{g\pm}, \tilde{p}_l, \tilde{p}_{g\pm}) = [\hat{u}_l(t), \hat{v}_l(t), \hat{u}_{g\pm}(t), \hat{v}_{g\pm}(t), \hat{p}_l(t), \hat{p}_{g\pm}(t)] \exp(\mathbf{i} k x), \quad (5a)$$

$$(\tilde{\eta}, \tilde{b}) = [\hat{\eta}(t), \hat{b}(t)] \exp(\mathbf{i} k x). \quad (5b)$$

一方, 厳密方程式に対して,

$$\begin{aligned} &(\tilde{u}_l, \tilde{v}_l, \tilde{u}_{g\pm}, \tilde{v}_{g\pm}, \tilde{p}_l, \tilde{p}_{g\pm}) \\ &= [\hat{u}_l(y, t), \hat{v}_l(y, t), \hat{u}_{g\pm}(y, t), \hat{v}_{g\pm}(y, t), \hat{p}_l(y, t), \hat{p}_{g\pm}(y, t)] \exp(\mathbf{i} k x), \end{aligned} \quad (6a)$$

$$(\tilde{\eta}, \tilde{b}) = [\hat{\eta}(t), \hat{b}(t)] \exp(\mathbf{i} k x). \quad (6b)$$

これらの攪乱が平衡解 (4) に加わった場合の安定性を考える．上記諸量を長波方程式および厳密方程式に代入し, 攪乱の 2 次以上の量を無視する．このとき密度比 γ が十分小さい場合を考えるので, 反対称モードが支配的になり, かつ We が極端に小さくなければ液体粘性は常に攪乱の増幅を抑える．そのため以下では非粘性 ($\text{Re} \rightarrow \infty$) の場合について考える．その結果, 反対称モードに対する以下の分散方程式を得る:

$$(1 + Q) \frac{d^2 \hat{\eta}}{dt^2} + 2A(t) \frac{d \hat{\eta}}{dt} + B(t) \hat{\eta} = 0. \quad (7)$$

ここで、長波方程式に対して

$$Q = \gamma \left[\frac{1}{k^2(m-1)} + \frac{m-1}{4} \right], \quad (8a)$$

$$A(t) = i k (U_\ell + Q U_g), \quad (8b)$$

$$B(t) = i k \frac{dU_\ell}{dt} - k^2 U_\ell^2 + Q \left(i k \frac{dU_g}{dt} - k^2 U_g^2 \right) + \frac{k^2}{\text{We}}. \quad (8c)$$

一方、厳密方程式 (基礎方程式 + 境界条件) に対して

$$Q = \gamma \coth k(m-1) + \tanh k, \quad (9a)$$

$$A(t) = i k [U_g \gamma \coth k(m-1) + U_\ell \tanh k], \quad (9b)$$

$$B(t) = (-k^2 U_g^2 + i k \frac{dU_g}{dt}) \gamma \coth k(m-1) + (-k^2 U_\ell^2 + i k \frac{dU_\ell}{dt}) \tanh k + \frac{k^3}{\text{We}}. \quad (9c)$$

(7) 式は変数変換

$$\hat{\eta} = F(t) \exp \left(- \int \frac{A}{1+Q} dt \right), \quad (10a)$$

$$\omega_s t = 2\tau \text{ and } 2\tau \rightarrow 2\tau + \pi/2, \quad (10b)$$

を導入することにより、以下の Hill の方程式に帰着する [13, 17] :

$$\frac{d^2 F}{d\tau^2} + (\theta_0 + 2\theta_2 \cos 2\tau + 2\theta_4 \cos 4\tau) F = 0. \quad (11)$$

ここで、

$$\theta_0 = \frac{4k^2}{\omega_s^2(1+Q)} \left(\frac{1}{\text{We}} - \frac{Q}{1+Q} (\bar{U}_l - \bar{U}_g)^2 + \frac{1}{2}(\gamma-1)^2 \delta^2 \right), \quad (12)$$

$$\theta_2 = -\frac{4k^2 Q}{\omega_s^2(1+Q)^2} (\bar{U}_l - \bar{U}_g)(\gamma-1)\delta, \quad (13)$$

$$\theta_4 = -\frac{k^2 Q}{\omega_s^2(1+Q)^2} (\gamma-1)^2 \delta^2. \quad (14)$$

$$(15)$$

(11) 式は以下の解を持つことが知られている [19, 18] :

$$F(\tau) = \exp(\mu\tau) \psi(\tau). \quad (16)$$

ここで、 ψ は適当な π -周期関数、 μ は以下で与えられる Floquet 指数である :

$$\cosh(\mu\tau) = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi \sqrt{\theta_0}}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{\theta_0}} \sin \pi \sqrt{\theta_0} \left(\frac{\theta_2^2}{1-\theta_0} + \frac{\theta_4^2}{2^2-\theta_0} \right). \quad (17)$$

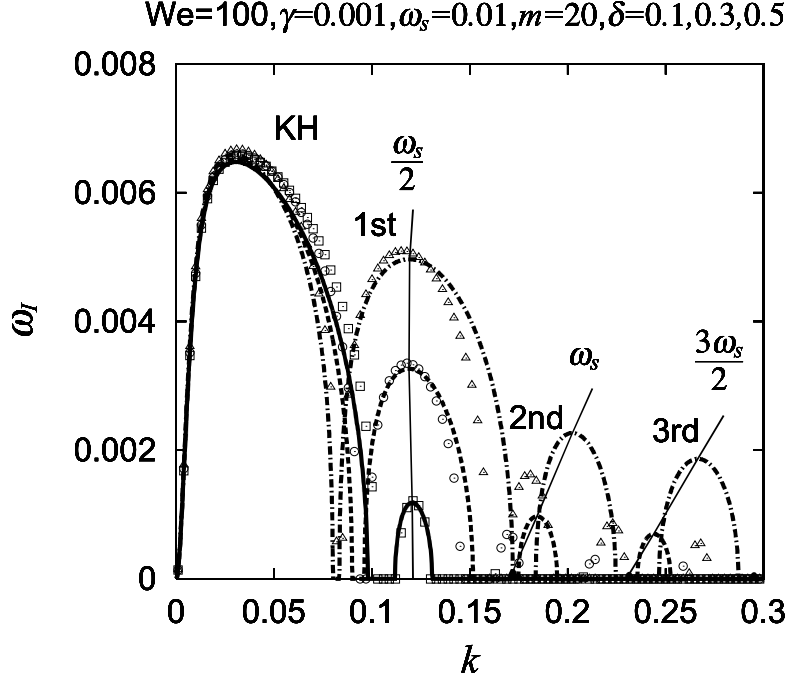


図 2: Variations of the growth rate $\omega_I (\equiv \mu_R)$ for k . The approximations are denoted by solid lines ($\delta = 0.5$), broken lines ($\delta = 0.3$) and dash-dotted lines ($\delta = 0.1$), while the exact analysis by $\triangle$ ($\delta = 0.5$), $\circ$ ($\delta = 0.3$) and $\square$ ($\delta = 0.1$).

$\mu = \mu_R + i\mu_I$ とすると, $\mu_R > 0$ で F は時間的に増幅して不安定になる. このとき攪乱 $\hat{\eta}$ の時間発展は元の座標系で書き直すと以下ようになる:

$$\hat{\eta} \propto \exp\left(\frac{\omega_s}{2}\mu_R t\right) \times \exp\left(i\frac{\omega_s}{2}\mu_I t - \frac{ik\omega_s(\overline{U}_\ell + Q\overline{U}_g)t + ik(\gamma + Q)\delta \sin \omega_s t}{(1+Q)\omega_s}\right) \exp(ikx)\psi\left(\frac{\omega_s}{2}t\right). \quad (18)$$

以下では $U_\ell = 1 + \gamma\delta \sin \omega_s t$, $U_g = \delta \sin \omega_s t$ として増幅率の計算結果の例を示す. 図 3 では $We = 100$, $\gamma = 0.001$, $m = 20$, $\omega_s = 0.01$ の場合, 増幅率 $\omega_I (\equiv \mu_R)$ の波数 k に対する変化を $\delta = 0.1, 0.3, 0.5$ に対して厳密解析と比較して示している. 長波長領域 ($k \lesssim 0.1$) では従来の Kelvin-Helmholtz (KH) 不安定が現れるが, 高波数領域 ($k \gtrsim 0.1$) では ω_s の外部振動により発生するパラメトリック不安定が現れる. 図では, k が大きくなるにつれて 1st, 2nd, 3rd モードが現れるが, それぞれは $\omega_s/2$, ω_s , $3\omega_s/2$ の振動数に対応している.

近似解と厳密解の比較では, KH 不安定に関しては比較的良好に一致しているが, パラメトリック不安定では高次モードになるに従い差異が大きくなる. また, δ に関しては, KH 不安定が空力不安定であるため影響は小さい. しかし, パラメトリック不安定では, δ が大きくなるにつれて発生する不安定の強さは大きくなる. また, 厳密解析とのずれは, δ が大きくなるにつれて, その差がより大きくなることがわかる. いずれにしても, ω_s の外部振動に対して, パラメトリック励振により $\omega_s/2$ に相当する波数攪乱が最も大きく励

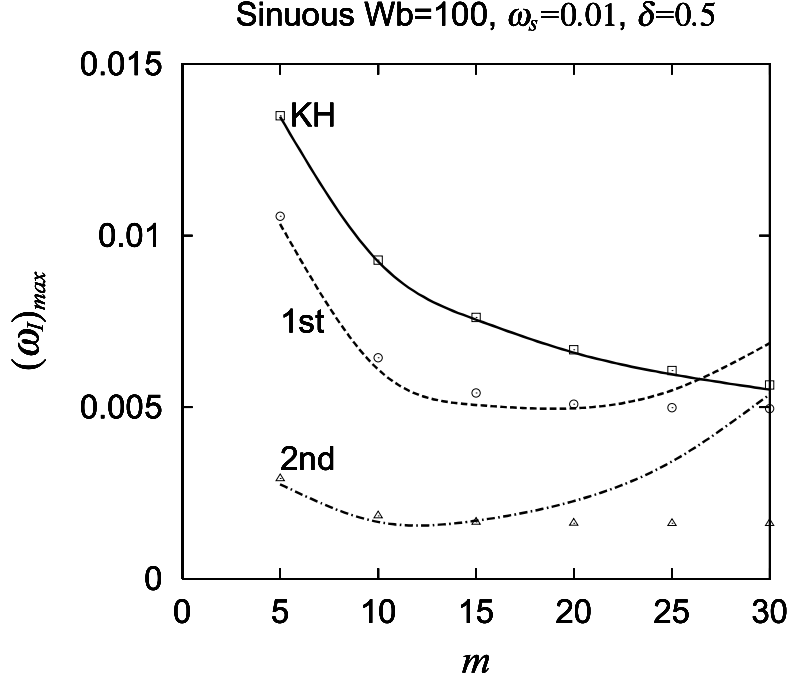


図 3: Variation of the maximum growth rates $(\omega_I)_{max} (\equiv (\mu_R)_{max})$ of each modes for different m . The approximations are denoted by solid lines (KH mode), broken lines (1st mode) and dash-dotted lines (2nd mode), while the exact analysis by $\triangle$ (2nd mode), $\circ$ (1st mode) and $\square$ (KH mode).

起されることがわかる．このとき， ω_s , $3\omega_s/2$ 等に相当する高次モードも発生するが，高次モードになるにつれて弱くなる．

次に，各モードの最大増幅率 $\omega_{Imax} (\equiv \mu_{Rmax})$ のシート壁面間距離 m に対する変化を見る．図 3 では $We = 100$, $\gamma = 0.001$, $\omega_s = 0.01$, $\delta = 0.5$ として， m が変化するときの増幅率の変化を，近似解と厳密解で比較している．図よりわかるように，長波領域での KH 不安定モードでは $m \lesssim 30$ でも，近似解は厳密解によく一致している．しかし，短波長領域のパラメトリックモードでは m が増加するにつれて近似解は厳密解からずれ，両者が一致するのは $m \lesssim 20$ 程度であることがわかる．さらに高次モードでは近似解と厳密解はより小さい m でしか一致しない．このことから，近似が有効な範囲として当該パラメータでは $m \lesssim 20$ と見なせる．また，厳密解析からわかるように m の増加とともに KH 不安定では増幅率が一様に減少していくのに対し，パラメトリックモードでは $\gtrsim 10$ ではほぼ一定に保たれている．(10a), (9a) からわかるように， m の影響は密度比 γ の補正項として現れ，増幅率に対するその影響は空力不安定である KH 不安定に大きく現れる．そのため，パラメトリックモードでは m が十分小さい場合を除いてあまり大きく影響しないと考えられる．

4 計算結果

非線形解析では各モードでの最大増幅率近傍での波数 k_m を攪乱の初期値とし、長波方程式 (3a) から (3f) を周期境界条件のもとで解く。このとき、 $U_l = \gamma \delta \sin \omega_s t$, $U_g(t) = \delta \sin \omega_s t$, $\hat{\eta} = 2 \cos k_m x$ として (5a), (5b) で初期攪乱を与える。

計算方法は、時間微分はオイラー法、空間微分は2次差分、圧力方程式はガウスの消去法を用いて、時間差分 $\Delta t = 0.01$, 空間差分 $\Delta x = \lambda/N$ ($\lambda = 2\pi/k_m$, $N = 50$) とする。さらに、 η の時間発展で (7) 式を4次の Runge-Kutta 法で解くことにより η の時間発展の線形解と非線形解の比較を行っている。以下では $We = 100$, $\gamma = 0.001$, $m = 20$, $\omega_s = 0.01$ とした場合について述べる。

4.1 KH 不安定モード

図4はKH不安定モードにおけるシート最終形状と各時刻におけるシート厚みの最大値 b_{max} , 最小値 b_{min} および中心面変位の最大値 η_{max} の時間発展を示している。ここで、比較のため外部振動がない場合 ($\delta = 0$) を (a) 図に、外部振動がある場合 ($\delta = 0.5$) を (b) 図に示している。また、 η_{max} の図では実線は非線形解析結果を、○は線形解析結果を示している。

図4(a)で、シートの最終形状は不安定による増幅の結果壁面に接触している。その過程で、厚み b に関しては b_{max} , b_{min} とともに一定値 (線形解) から緩やかにずれてくる。また、中心面変位 η に関しては、 η_{max} が時間的に増幅していくが、最終段階を除くほとんどの部分で線形解析と非線形解析は一致している。そのため、非線形性が顕著になるのは最終段階で壁面に接触する付近である。一方、図4(b)では、最終形状は (a) 図と同様壁面に接触しているが、そこに至る過程では、 η の変化に外部振動の影響がみられ、増幅は時間的に一様ではない。また、 b は一定値 (線形解) から最終段階まで緩やかにずれ、非線形性の影響が現れている。さらに、最終段階での壁に接触するまでの時間は外部振動のために伸びており、実験結果 [16] と定性的に一致する。

4.2 パラメトリックモード

図5は $We = 100$, $\gamma = 0.001$, $\omega_s = 0.01$, $m = 20$, $\delta = 0.5$ としたときの、パラメトリックモードにおけるシート最終形状と各時刻での厚み b_{max} , b_{min} と中心面の変位 η_{max} の時間発展を示す。ここで、(a) 図では第1パラメトリックモード ($k = 0.12$) を、(b) 図では第2パラメトリックモード ($k = 0.2$) を示している。また、 η_{max} の図では実線は非線形解析を表し、○は線形解析結果を示している。

図5(a)の第1パラメトリックモード ($k = 0.12$) では、最終段階でのシート形状が大きく変形し破断していることがわかる。このとき厚み b_{max} , b_{min} は緩やかに時間的に変化し最終点近傍で急激に変動し b_{min} が0になり破断に至ることがわかる。中心面変位 η_{max} の時間的な増加は外部振動のため単調ではなく振動的であり、線形解析との比較から最終段

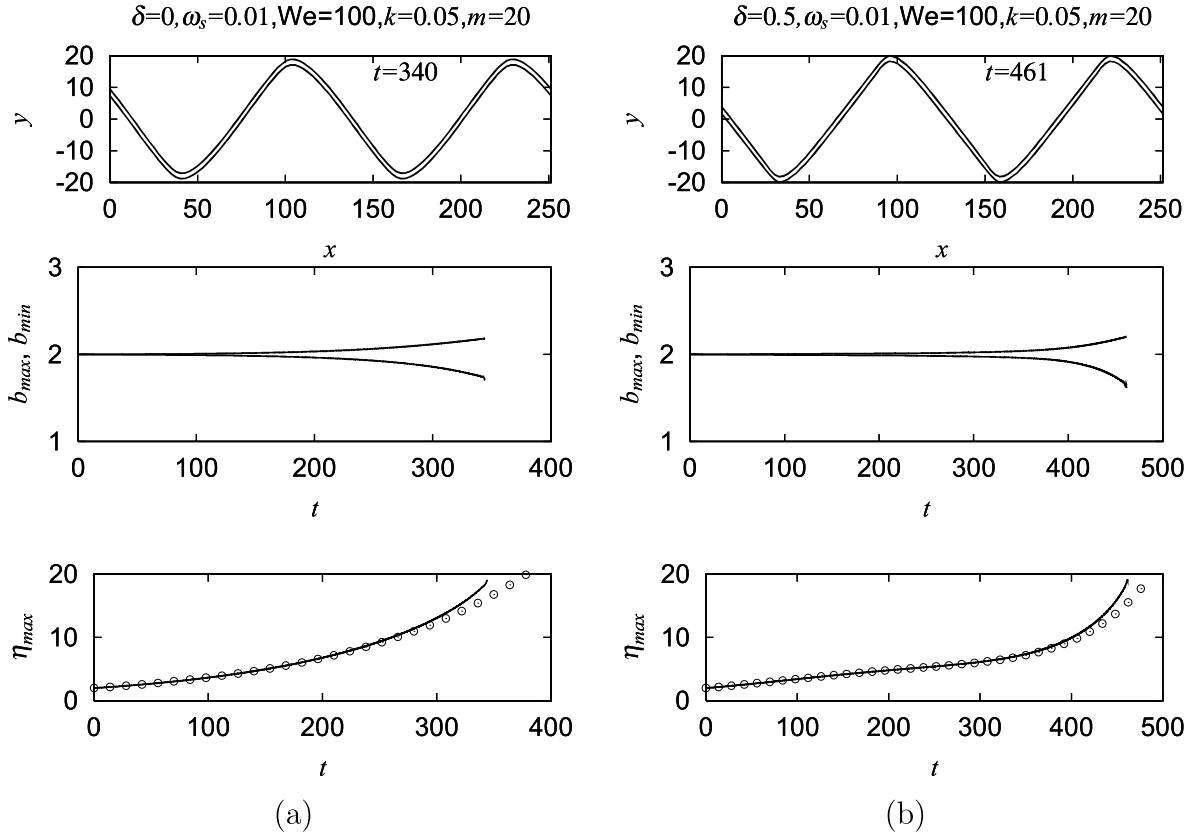


FIG 4: Sheet profiles in the final stage and evolutions of b_{max} , b_{min} , η_{max} in the KH unstable mode ($k = 0.05$) when $We = 100$, $\gamma = 0.001$, $m = 20$ and $\omega_s = 0.01$, where (a) shows $\delta = 0$ and (b) $\delta = 0.5$. In the figures, the solid lines denote the nonlinear results and $\bigcirc$ denotes the linear calculations.

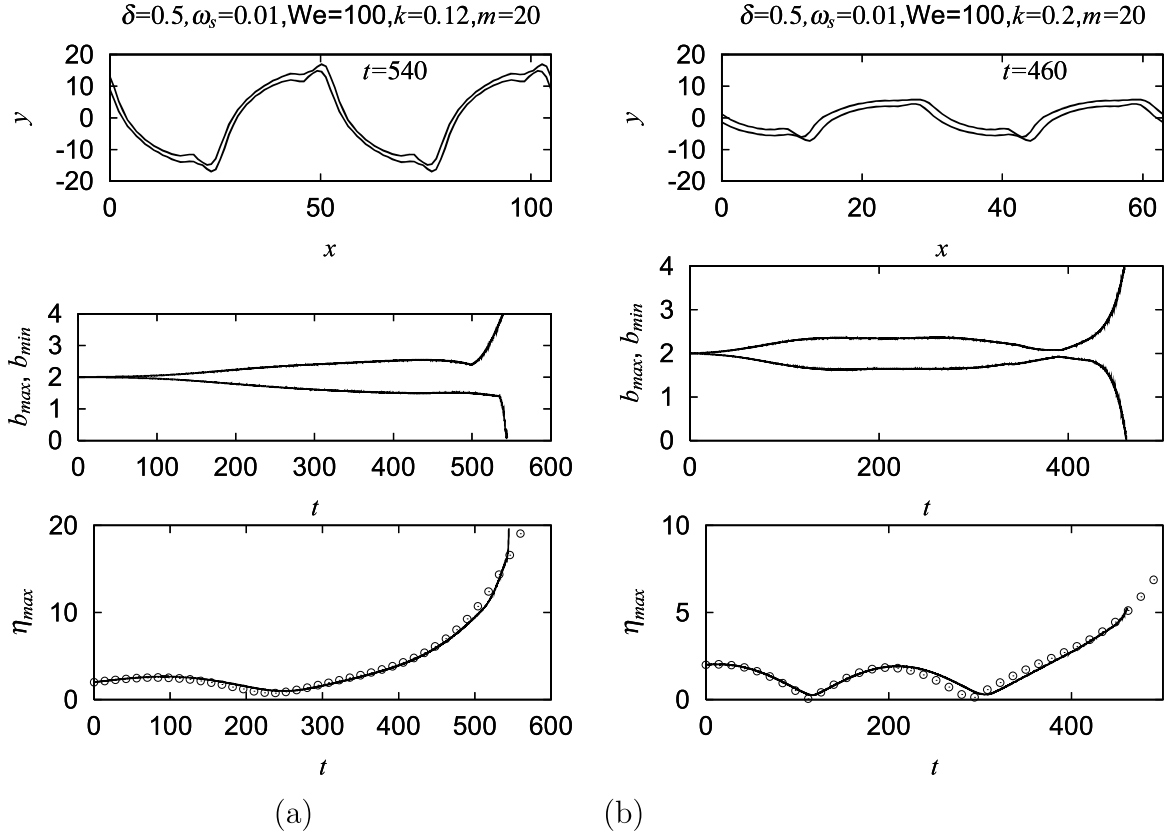


Figure 5: Final sheet profiles and evolutions of $b_{\min}$, $b_{\max}$ and $\eta_{\max}$ in the parametric mode when $\text{We} = 100$, $\gamma = 0.001$, $m = 20$, $\delta = 0.5$ and $\omega_s = 0.01$, where (a) shows the 1st mode ($k = 0.12$) and (b) the 2nd mode ($k = 0.2$). In the figures, the solid lines denote the nonlinear analysis, while $\circ$ the linear analysis.

階で急激に増加して線形解からずれていることがわかる．一方，図 5(b) の第 2 パラメトリック不安定モードでは ($k = 0.2$)，最終形状はより小さい振幅で破断していることがわかる．そのため破断までの時間は少なくなっている．シート厚さは時間的に緩やかに変化した後，最終段階で急激に変化し $b_{min} = 0$ となり破断する．また， η_{max} も第 1 モードよりも変化の時間的な周期が短くなり，最終段階で線形解析より大きくなり破断に至ることがわかる．いずれにしても，破断近傍で非線形性が大きく働くと考えられる．

以上のことから，外部振動があるとき，長波領域での KH 不安定モードに加え，短波長領域でのパラメトリックモードでも不安定が発生し，場合によってはシートが壁面に接触する前に破断に至ることが示された．特に，パラメトリック不安定の場合，厚みや中心面変位が時間的に大きく変動しながらは増加していく．それに対して KH 不安定モードでは中心面変位は一樣に増加し，厚みは緩やかに変化していく．

5 結論

以上まとめて以下の結論を得る：

1. 線形および非線形解析により，外部振動を加えることによりパラメトリック不安定がおこることを示した．その不安定の大きさは振動周波数や振動振幅に依存するが，従来の空力不安定である KH 不安定モードとはその発生メカニズムが異なりお互いに独立した現象と考えられる．
2. 壁面の影響は周囲気体の密度比と大きく関連するので，壁面距離 m の影響は空力不安定を表す KH モードに大きな影響を及ぼす．そのとき， m が大きくなれば KH モードでの増幅率や増幅領域が減少するが，十分小さな m を除いてパラメトリックモードへの影響は小さい．
3. パラメトリック不安定により，高波数領域での不安定とそれによるシート破断がおこることが解析で示された．このような不安定はノズルまたはジェット周囲からの外部振動により容易に実現されることから，パラメトリック不安定は実際の現象においても容易に起こりうるということがわかる．

本解析では時間安定性が調べられ，外部振動数の半分の振動数 (分数調波) に対応する波数攪乱が大きく励起されることを確認した．しかし，実際の現象ではノズル付近で入力された外部振動に対する時空間発展の結果，分散調波振動の不安定波が発生することが予想される．適当な条件の下での実験では分数調波振動が自然発生することが報告されている．そのため，周期境界条件の下での解析で対応するこの現象は，波長 λ の初期攪乱に対して波長 2λ の攪乱の発生と増幅を確認する必要があるが，今回の解析では確認できなかった．

謝辞

本研究は科研費 (C:16K06082) の助成を受けたものである．ここに感謝の意を表する．

参考文献

- [1] Lin, S.P., *Breakup of liquid sheets and jets* (Cambridge, 2003).
- [2] Eggers, J. and Villermaux, E., “Physics of liquid jets”, Rep. Prog. Phys., 71 (2008) pp.036601.
- [3] Ashgriz, N., *Handbook of atomization and sprays* (Springer, 2011).
- [4] Squire, H.B., “Investigation of the instability of a moving liquid film”, British J. Appl. Phys., 4 (1953) pp.167-169.
- [5] Clark, C. J. and Dombrowski, N., “Aerodynamic instability and disintegration of inviscid liquid sheets”, Proc. R. Soc. Lond. A 329 (1972) pp. 467-478.
- [6] Jazayeri, S. A. and Li, X., “Nonlinear instability of planar liquid sheets”, J. Fluid Mech. 406 (2000) pp. 281-308.
- [7] Yang, L., Wang, C., Fu, Q., Du, M. and Tong, M., “Weakly nonlinear instability of planar viscous sheets”, J. Fluid Mech. 735 (2013) pp. 249-287
- [8] Mehring, C. and Sirignano, W. A., “Nonlinear capillary wave distortion and disintegration of thin planar liquid sheets”, J. Fluid Mech. 388 (1999) pp. 69-113.
- [9] Kan, K. and Yoshinaga, T., “Instability of a planar liquid sheet with surrounding fluids between two parallel walls“, Fluid Dyn. Res. 39 (2007) pp. 389-412.
- [10] Fujiwara, K., “Instabilities and breakup phenomena of a planar viscous liquid sheet with surrounding fluids between solid walls“, Master thesis (Osaka Univ. 2007) [in Japanese].
- [11] Benjamin, T. B. and Ursell, F. “The stability of a plane free surface of a liquid in vertical periodic motion“, Proc. Roy. Soc. A 225 (1954) pp. 505 - 515.
- [12] Kelly, R. E. “The stability of an unsteady Kelvin-Helmholtz flow”, J. Fluid Mech. 22 (1965) pp. 547 - 560.
- [13] Kumar, K. and Tuckerman, A. S. “Parametric instability of the interface between two fluids”, J. Fluid Mech. 297 (1994) pp.49 - 68.
- [14] Talib, E., Jalikop, V. and Juel, A., “The influence of viscosity on the frozen wave instability: theory and experiment”, J. Fluid Mech 584 (2007) pp. 45 - 68.
- [15] Dighe, S. and Gadgil, H., “On the nature of instabilities in externally perturbed sheets”, J. Fluid Mech. 916 (2021) A57.

- [16] Jia, B-q., Xie, L., Deng, X-d., He, B-s, Yang, L-j and Fu, Q-f., "Experimental study on the oscillatory Kelvin-Helmholtz instability of a planar liquid sheet in the presence of axial oscillating gas flow", J. Fluid Mech. 959 (2023) A18.
- [17] Yang, L-j, Jia, B-q, Fu, Q-f and Yang, Q., "Stability of an air-assisted viscous liquid sheet in the presence of acoustic oscillations", European J. Mech. B Fluids 67 (2018) pp. 366-376.
- [18] Jia, B-q., Xie, L., Yang, L-j, Fu, Q-f. and Cui, X., "Linear instability of viscoelastic planar liquid sheets in the presence of gas velocity oscillations", J. Non-Newtonian Fluid Mech. 273 (2019) 104169.
- [19] McLachlan, N. W., " *Theory and Application of Mathieu Functions*" The Clarendon Press, Oxford, 1951, P.127.