電離波動系におけるダイナミック安定化

愛媛大学理学部　飯塚剛

Takeshi Iizuka

Faculty of Science, Ehime University

1　序文

ダイナミック安定化は、代表的なカピッツアの振り子 [1] や Bose-Einstein 凝縮 [2]、レーザーによる粒子トラップ [3] など、様々な系で見つけられる普遍的な現象である。一方、カピッツアの振り子の拡張として、加振された連成振り子の安定性解析 [4] がある。さらに、この「連成」に対する連続極限を波動とみなして「波動に対するダイナミック安定化」を定式化した研究 [5] もある。本研究では、より現実的な波動に対象にダイナミック安定化の方法を適用するために、イオンプラズマ系 [6] に対して高速で振動する電場を加えた系を取り上げる。

次節では、系の基本的な方程式を示す。第 3 節では、電子を質点とみなしてダイナミック安定化を適用する。次の第 4 節ではイオンを流体とみなして、波動としてのダイナミック安定化を議論する。これより、高速電場下での有効方程式を得る。さらに 1 次元化して弱非線形近似を第 5 節を導入する。第 6 節では高温近似を考えて、イオンプラズマ系における KdV ソリトンの影響を考える。最終節では「安定化」に対するコメントをする。

2　基本方程式

イオンと電子の電離状態に振動電場が加わった系を考える。イオンの電荷、質量、速度場、個数密度場をそれぞれ $e, m, \boldsymbol{v}, n$ とし、電子の電荷、質量、個数密度場をそれぞれ $-e, m_e, n_e$ とする。また電子とイオンから生じるスカラーポテンシャルを ϕ とする。$\epsilon \ll 1$ として、振動電場を生む加電圧を $\epsilon^{-1}V(\boldsymbol{x})\cos(\epsilon^{-1}\omega t)$ とする。この系が満たす方程式は

$$m\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v})\right) = -e\nabla\left(\phi + \epsilon^{-1}V(\boldsymbol{x})\cos\frac{\omega t}{\epsilon}\right), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\boldsymbol{v}) = 0, \tag{2.2}$$

$$n_e = N\exp\left\{-\frac{(-e)\phi_e}{k_B T}\right\}, \tag{2.3}$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{e}{\epsilon_0}(n - n_e), \tag{2.4}$$

である。$\boldsymbol{x}$ は位置、t は時間を示す。第 1 式はイオンを流体とみなしたときの運動方程式である。第 2 式はイオンの個数保存を示す連続方程式である。第 3 式は電子の密度を

表す熱平衡の式である。k_B 、T、N はそれぞれボルツマン定数、絶対温度、定常状態で電子の密度である。ϕ_e は電子が受ける有効スカラーポテンシャルを示し、$(-e)\phi_e$ は対応するエネルギーである。ここで電子の質量がイオンに比べて十分小さいので熱応答がはやいものとした。さらに、振動電場の周波数は十分高いものとして

(電子の熱緩和時間) $\gg$ (振動電場の周期)

が成立するものとする。上記の仮定より次節で ϕ_e を求める。第 4 式は、ポアソン方程式である。ただし ϵ_0 は電気定数である。

3　電子の有効ポテンシャル

振動加電圧の周期は熱緩和時間より十分短いと仮定したので、電子の個数密度についてリアルタイムの電位によるボルツマン分布を仮定することはできない。そこでまず、ある 1 つの電子に注目して電子の運動を考える。電子の位置を $\boldsymbol{x}(t)$ とすると運動方程式は、

$$m_e\ddot{\boldsymbol{x}} = e\nabla\left(\phi + \epsilon^{-1}V(\boldsymbol{x})\cos\frac{\omega t}{\epsilon}\right), \tag{3.1}$$

である。$\epsilon \ll 1$ に注意して、上式に対しダイナミック安定化の理論を適用する。まず「高速時間」τ を $\tau = \epsilon^{-1}t$ で定義する。次に $\boldsymbol{x}(t)$ を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0(t) + \epsilon\boldsymbol{x}_1(t,\tau) + \epsilon^2\boldsymbol{x}_2(t,\tau) + \cdots, \tag{3.2}$$

と摂動展開する。ただし、$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots$ は運動の振動成分 (AC 成分) を表しており振動周期分の平均値は 0 である。つまり、

$$\int_0^{2\pi/\omega} \boldsymbol{x}_i(t,\tau)\mathrm{d}\tau \equiv \langle\boldsymbol{x}_i\rangle = 0,\ (i = 1, 2, \cdots), \tag{3.3}$$

である。展開式 (3.2) を運動方程式 (3.1) へ代入して摂動論を適用する。ϵ^{-1} のオーダーからは

$$m_e\frac{\partial^2\boldsymbol{x}_1}{\partial\tau^2} = e\nabla V(\boldsymbol{x}_0)\cos\omega\tau, \tag{3.4}$$

を得るが、これを 2 回積分して $\boldsymbol{x}_1 = -\dfrac{e\nabla V}{m_e\omega^2}\cos\omega\tau$ を得る。ただし $\boldsymbol{x}_1$ は AC 成分であると仮定したので、積分定数は 2 回とも 0 とした。次に ϵ^0 のオーダーからは

$$\begin{aligned} m_e\left(\ddot{\boldsymbol{x}}_0 + 2\frac{\partial^2\boldsymbol{x}_1}{\partial\tau\partial t} + \frac{\partial^2\boldsymbol{x}_2}{\partial\tau^2}\right) &= e\nabla\phi(\boldsymbol{x}_0) + e(\boldsymbol{x}_1\cdot\nabla)(\nabla V(\boldsymbol{x}_0))\cos\omega\tau \\ &= -\nabla\left(-e\phi(\boldsymbol{x}_0) + \frac{e^2}{2m_e\omega^2}|\nabla V(\boldsymbol{x}_0)|^2\cos^2\omega\tau\right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る。ただし 2 番目の等式では $\boldsymbol{x}_1$ の表式を代入した。この式に対して先に述べた平均をとる。つまり、τ に関して 1 周期分の平均値を計算する。結果左辺の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を含む項は消えて、右辺に関しては $\langle\cos^2\omega\tau\rangle = 1/2$ とする。結果

$$m_e\ddot{\boldsymbol{x}}_0 = -\nabla\left(-e\phi(\boldsymbol{x}_0) + \frac{e^2}{4m_e\omega^2}|\nabla V(\boldsymbol{x}_0)|^2\right), \tag{3.6}$$

を得る。高速振動によって電子が受ける有効スカラーポテンシャル ϕ_e は (3.6) の右辺の括弧内である。つまり

$$\phi_e = \phi - \frac{e}{4m_e\omega^2}|\nabla V(\boldsymbol{x}_0)|^2, \tag{3.7}$$

とすることが出来る。

4　波動系のダイナミック安定化

前節では質点としての電子に対して、ダイナミック安定化の理論を適用したが、本節では流体としてのイオンに対してダイナミック安定化の理論を試みる。元となる方程式は (2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4) であったが ϕ_e が具体的に求まったので、(2.3)、(2.4) をまとめて

$$\nabla^2\phi = -\frac{e}{\epsilon_0}\left(n - N\exp\left\{\frac{(-1)}{k_BT}\left(-e\phi + \frac{e^2}{4m_e\omega^2}|\nabla V|^2\right)\right\}\right), \tag{4.1}$$

とする。前節同様 τ を高速時間 $\epsilon^{-1}t$ として、次のような摂動展開を導入する。

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x},t,\tau) + \epsilon\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x},t,\tau) + \cdots \tag{4.2}$$

$$n = n_0(\boldsymbol{x},t) + \epsilon n_1(\boldsymbol{x},t,\tau) + \cdots \tag{4.3}$$

$$\phi = \phi_0(\boldsymbol{x},t) + \epsilon\phi_1(\boldsymbol{x},t,\tau) + \cdots. \tag{4.4}$$

また AC 成分に関する仮定

$$\langle\boldsymbol{v}_1\rangle = \langle\boldsymbol{v}_2\rangle = \cdots = \boldsymbol{0}, \quad \langle n_1\rangle = \langle\phi_1\rangle = \cdots = 0, \tag{4.5}$$

を設ける。運動方程式 (2.1) の $O(\epsilon^{-1})$ からは

$$m\frac{\partial\boldsymbol{v}_1}{\partial\tau} = -e\nabla V(\boldsymbol{x})\cos\omega\tau, \tag{4.6}$$

を得る。これを積分することにより、

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{e}{m\omega}\nabla V\sin\omega\tau, \tag{4.7}$$

となる。$O(\epsilon^0)$ からは

$$m\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial\boldsymbol{v}_1}{\partial t} + \frac{\partial\boldsymbol{v}_2}{\partial\tau} + (\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0 + (\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0 + (\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1\right) = -e(\nabla\phi_0), \tag{4.8}$$

を得る。これに対して前節同様の平均化を行うと

$$m\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}_0}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_0 + \langle(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1\rangle\right) = -e(\nabla\phi_0), \tag{4.9}$$

となる。さらに (4.7) を用いると

$$\langle(\boldsymbol{v}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_1\rangle = \left(\frac{e}{m\omega}\right)^2(\nabla V\cdot\nabla)\nabla V\underbrace{\langle\sin^2\omega\tau\rangle}_{1/2} = \nabla\left(\frac{e\nabla V}{2m\omega}\right)^2, \tag{4.10}$$

がわかる。次に連続方程式 (2.2) に対しては $O(\epsilon^0)$ で、

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \nabla\cdot(n_0\boldsymbol{v}_0) + \nabla\cdot(n_0\boldsymbol{v}_1) = 0, \tag{4.11}$$

を得るが、左辺第 3 項は平均化によって消える。ポアソン方程式 (4.1) の $O(\epsilon^0)$ からは

$$\nabla^2\phi_0 = -\frac{e}{\epsilon_0}\left(n_0 - N\exp\left\{\frac{1}{k_BT}\left(e\phi_0 - \frac{e^2}{4m_e\omega^2}|\nabla V|^2\right)\right\}\right), \tag{4.12}$$

が導かれる。ここで改めて、$n_0 \to n,\ \boldsymbol{v}_0 \to \boldsymbol{v},\ \phi_0 \to \phi$ として、得られた有効方程式を列挙すると、

$$m\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right) = -\nabla\left(e\phi + \frac{e^2}{4m\omega^2}\left|\nabla V\right|^2\right), \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\boldsymbol{v}) = 0, \tag{4.14}$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{e}{\epsilon_0}\left(n - N\exp\left\{\frac{1}{k_BT}\left(e\phi - \frac{e^2}{4m_e\omega^2}|\nabla V|^2\right)\right\}\right), \tag{4.15}$$

となる。これらは高速振動電場 $-\epsilon^{-1}(\nabla V(\boldsymbol{x}))\cos(\epsilon^{-1}\omega t)$ のある系での「イオン・電子系」の有効方程式となる。時間依存性は陽にないが、空間の陽な依存性は $|\nabla V|^2$ に含まれている。

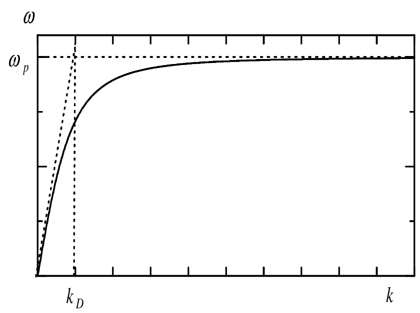
5 弱非線形理論 (長波長)

弱非線形波動を調べる前に、振動電場がなくかつ線形化した場合を考える。つまり (2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.4) に対して、$V=0$ とし、非線形項は無視して静電ポテンシャルだけの式にすると

$$\nabla^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) = \frac{e^2N}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{k_BT}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{m}\nabla^2\phi\right), \tag{5.1}$$

となる。次に平面波解 $\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}$ を仮定すると、分散関係

$$\omega^2 = \frac{\omega_p^2|\boldsymbol{k}|^2}{|\boldsymbol{k}|^2 + k_D^2}, \tag{5.2}$$



を得る。グラフにすると右図のようになる。ただし横軸は角波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の大きさ $k=|\boldsymbol{k}|$ で縦軸は角周波数 ω である。また $k_D \equiv \sqrt{\dfrac{Ne^2}{\epsilon_0 k_BT}}$ はデバイ波数と呼ばれ $\omega_p \equiv \sqrt{\dfrac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$ はプラズマ振動数と呼ばれる。特に $k=|\boldsymbol{k}|$ が k_D より十分大きいときは $\omega=\omega_p$ となる。一方 $k\to 0$ のときは、

$$\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k=0} = \frac{\omega_p}{k_D} = \sqrt{\frac{k_BT}{m}} \equiv c_0, \tag{5.3}$$

となる。c_0 はイオン音速と呼ばれる。

次に $k \to 0$ での弱非線形波動を考える。ただしここでは空間を 1 次元とする。有効方程式 (4.13)、(4.14)、(4.15) の $\boldsymbol{v}$ を v とし、∇ を V に対しては $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$、$n, v, \phi$ に対しては $\frac{\partial}{\partial x}$ とすると

$$m\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \frac{\partial}{\partial x}v)\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(e\phi + \frac{e^2}{4m\omega^2}\left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|^2\right), \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0, \tag{5.5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \phi = -\frac{e}{\epsilon_0}\left(n - N\exp\left\{\frac{1}{k_BT}\left(e\phi - \frac{e^2}{4m_e\omega^2}\left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|^2\right)\right\}\right), \tag{5.6}$$

となる。ここで非線形性と電子の軽さを示す新たなスモールネスパラメター ε を導入する。このとき $m \gg m_e$ より、(5.4)、(5.6) において、

$$\frac{e^2}{4m\omega^2}\left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|^2 = \varepsilon F(\varepsilon^{\frac{3}{2}}x), \quad \frac{e^2}{4m_e\omega^2}\left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|^2 = \alpha F(\varepsilon^{\frac{3}{2}}x), \quad \alpha = \frac{\varepsilon m}{m_e} \sim O(1), \tag{5.7}$$

とする。ただし $V(x)$ の変化がゆっくりであるものとした。次に摂動展開

$$v = \varepsilon\widetilde{v}_1 + \varepsilon^2\widetilde{v}_2 + \cdots, \quad \phi = \varepsilon\widetilde{\phi}_1 + \varepsilon^2\widetilde{\phi}_2 + \cdots, \quad n = \exp\left(-\frac{\alpha F}{k_BT}\right)(N + \varepsilon\widetilde{n}_1 + \varepsilon^2\widetilde{n}_2 + \cdots), \tag{5.8}$$

を導入する。さらに長波長領域での現象を考えることを考慮して、次の座標変換を導入する。

$$\xi = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(x - c_0t), \quad \eta = \varepsilon^{\frac{3}{2}}x, \quad c_0 = \sqrt{\frac{k_BT}{m}} \text{ イオン音速} \tag{5.9}$$

以上を (5.4)、(5.5)、(5.6) に代入して ε の各オーダーを比較する。まず (5.4) からは

$$O(\varepsilon^{3/2}):\ mc_0\frac{\partial\widetilde{v}_1}{\partial\xi} = e\frac{\partial\widetilde{\phi}_1}{\partial\xi}, \tag{5.10}$$

$$O(\varepsilon^{5/2}):\ -mc_0\frac{\partial\widetilde{v}_2}{\partial\xi} + m\widetilde{v}_1\frac{\partial\widetilde{v}_1}{\partial\xi} = -e\frac{\partial\widetilde{\phi}_2}{\partial\xi} - e\frac{\partial\widetilde{\phi}_1}{\partial\eta} - \frac{\mathrm{d}F(\eta)}{\mathrm{d}\eta}, \tag{5.11}$$

となる。F は (5.7) より、$\eta = \varepsilon^{3/2}$ の関数 $F(\eta)$ であることに注意しよう。次に (5.5) からは

$$O(\varepsilon^{3/2}):\ -c_0\frac{\partial\widetilde{n}_1}{\partial\xi} + N\frac{\partial\widetilde{v}_1}{\partial\xi} = 0, \tag{5.12}$$

$$O(\varepsilon^{5/2}):\ \mathrm{e}^{-\frac{\alpha F}{k_BT}}\left\{-c_0\frac{\partial\widetilde{n}_2}{\partial\xi} + N\frac{\partial\widetilde{v}_2}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi}(\widetilde{n}_1\widetilde{v}_1)\right\} + N\frac{\partial}{\partial\eta}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha F}{k_BT}}\widetilde{v}_1) = 0. \tag{5.13}$$

最後に (5.6) からは

$$O(\varepsilon):\ \widetilde{n}_1 = \frac{Ne}{k_BT}\widetilde{\phi}_1, \tag{5.14}$$

$$O(\varepsilon^2):\ \frac{\partial^2\widetilde{\phi}_1}{\partial\xi^2} = -\frac{e}{\epsilon_0}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha F}{k_BT}}\left\{\widetilde{n}_2 - N\left(\frac{e\widetilde{\phi}_2}{k_BT} + \frac{1}{2}\left(\frac{e\widetilde{\phi}_1}{k_BT}\right)^2\right)\right\}, \tag{5.15}$$

がわかる。(5.10)、(5.12) を ξ で積分して積分定数を 0 とすると、

$$mc_0\widetilde{v}_1 = e\widetilde{\phi}_1, \quad c_0\widetilde{n}_1 = N\widetilde{v}_1, \quad \therefore \widetilde{n}_1 = \frac{Ne}{mc_0^2}\widetilde{\phi}_1 = \frac{Ne}{k_BT}\widetilde{\phi}_1, \tag{5.16}$$

となり、(5.14) と一致する。次に $\dfrac{\partial}{\partial\xi}(5.15) + \dfrac{eN\mathrm{e}^{-\alpha F/k_BT}}{\epsilon_0 k_BT}(5.11)$ より $\widetilde{\phi}_2$ を消去して

$$\frac{\partial^3\widetilde{\phi}_1}{\partial\xi^3} + \frac{eN\mathrm{e}^{-\alpha F/k_BT}}{\epsilon_0 k_BT}\left(-mc_0\frac{\partial\widetilde{v}_2}{\partial\xi} + m\widetilde{v}_1\frac{\partial\widetilde{v}_1}{\partial\xi}\right) = -\frac{e}{\epsilon_0}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha F}{k_BT}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\widetilde{n}_2 - \frac{N}{2}\left(\frac{e\widetilde{\phi}_1}{k_BT}\right)^2\right\}$$
$$-\frac{eN\mathrm{e}^{-\alpha F/k_BT}}{\epsilon_0 k_BT}\left(e\frac{\partial\widetilde{\phi}_1}{\partial\eta} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\right), \tag{5.17}$$

を得る。さらに $(5.17)+\dfrac{emc_0}{\epsilon_0 k_BT}(5.13)$ より $\dfrac{\partial\widetilde{v}_2}{\partial\xi}$ を消去して

$$\frac{\partial^3\widetilde{\phi}_1}{\partial\xi^3} + \frac{eN\mathrm{e}^{-\alpha F/k_BT}}{\epsilon_0 k_BT}m\widetilde{v}_1\frac{\partial\widetilde{v}_1}{\partial\xi} + \frac{emc_0}{\epsilon_0 k_BT}\left(-c_0\mathrm{e}^{-\frac{\alpha F}{k_BT}}\frac{\partial\widetilde{n}_2}{\partial\xi} + \mathrm{e}^{-\frac{\alpha F}{k_BT}}\frac{\partial}{\partial\xi}(\widetilde{n}_1\widetilde{v}_1) + N\frac{\partial}{\partial\eta}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha F}{k_BT}}\widetilde{v}_1)\right)$$
$$= -\frac{e}{\epsilon_0}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha F}{k_BT}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\widetilde{n}_2 - \frac{N}{2}\left(\frac{e\widetilde{\phi}_1}{k_BT}\right)^2\right\} - \frac{eN\mathrm{e}^{-\alpha F/k_BT}}{\epsilon_0 k_BT}\left(e\frac{\partial\widetilde{\phi}_1}{\partial\eta} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\right), \tag{5.18}$$

が導かれるが、c_0 の表式 (5.3) を考慮するとこの式の両辺の $\widetilde{n}_2$ が消去されることがわかる。この式と (5.16) より $\widetilde{n}_1, \widetilde{v}_1$ を消去して $\widetilde{\phi}_1$ だけの式にすると

$$\frac{\partial\widetilde{\phi}_1}{\partial\eta} + \frac{\epsilon_0 k_BT}{2e^2N}\exp\left\{\frac{\alpha F}{k_BT}\right\}\frac{\partial^3\widetilde{\phi}_1}{\partial\xi^3} + \frac{e}{k_BT}\widetilde{\phi}_1\frac{\partial\widetilde{\phi}_1}{\partial\xi} + \frac{1}{2e}\left(1 - \frac{\alpha e\widetilde{\phi}_1}{k_BT}\right)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} = 0, \tag{5.19}$$

を得る。ここで $u(\xi,\eta)$ を

$$\widetilde{\phi}_1(\xi,\eta) = u(\xi,\eta)\exp\left\{\frac{\alpha}{2k_BT}F\right\}, \tag{5.20}$$

で定義する。すると (5.19) は

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{\epsilon_0 k_BT}{2e^2N}\exp\left\{\frac{\alpha F(\eta)}{k_BT}\right\}\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3} + \frac{e}{k_BT}u\frac{\partial u}{\partial\xi}\exp\left\{\frac{\alpha}{2k_BT}F\right\} + \frac{1}{2e}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\exp\left\{-\frac{\alpha}{2k_BT}F\right\} = 0, \tag{5.21}$$

となる。さらに $w[\xi,\eta]$ を

$$u(\xi,\eta) = w[\xi,\eta] + \frac{k_BT}{e\alpha}\exp\left\{-\frac{\alpha}{2k_BT}F\right\}, \tag{5.22}$$

で定義すると (5.21) は

$$\frac{\partial w}{\partial\eta} + \frac{\epsilon_0 k_BT}{2e^2N}\exp\left\{\frac{\alpha F(\eta)}{k_BT}\right\}\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^3} + \frac{e}{k_BT}w\frac{\partial w}{\partial\xi}\exp\left\{\frac{\alpha}{2k_BT}F\right\} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial w}{\partial\xi} = 0, \tag{5.23}$$

となる。ここで変数変換 $(\xi,\eta)\to(\zeta,\tau)$ を

$$\zeta=\xi-\frac{1}{\alpha}\eta,\quad \tau=\eta, \tag{5.24}$$

で導入する。ここでの τ は前節の τ とは異なることに注意しよう。すると

$$\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial\zeta}, \tag{5.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial\tau}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\zeta}=\frac{\partial}{\partial\zeta}, \tag{5.26}$$

となるので (5.23) は $w(\zeta,\tau)=w[\xi,\eta]$ として

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}+\frac{\epsilon_0k_BT}{2e^2N}\exp\left\{\frac{\alpha F(\tau)}{k_BT}\right\}\frac{\partial^3w}{\partial\zeta^3}+\frac{e}{k_BT}\exp\left\{\frac{\alpha F(\tau)}{2k_BT}\right\}w\frac{\partial w}{\partial\zeta}=0, \tag{5.27}$$

を得る。これは係数が「時間」τ に依存する K-dV 方程式 (後述) ある。

6 高温極限

(5.27) において k_BT/F が十分大きいものと仮定する。$O(\alpha)\ \sim\ 1$ なので $\exp\{\alpha F/k_BT\}\sim 1$、$\exp\{\alpha F/2k_BT\}\sim 1$ とできる。このとき (5.27) は

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}+b\frac{\partial^3w}{\partial\zeta^3}+aw\frac{\partial w}{\partial\zeta}=0, \tag{6.1}$$

$$b\equiv\frac{\epsilon_0k_BT}{2e^2N},\quad a\equiv\frac{e}{k_BT} \tag{6.2}$$

で与えられる。(6.1) は K-dV(Korteweg-de Vries) 方程式とよばれ、非線形波動の代表的な方程式であり、様々な物理の系に現れるモデルである。また、これは可積分性を持ち初期値問題が可解であることが知られている [6]。特別な解としてソリトン解があり、もっとも単純な 1 ソリトン解は「速度」を $d(>0)$ として、

$$w=\frac{3d}{a}\mathrm{sech}^2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{b}}(\zeta-d\tau)\right\}, \tag{6.3}$$

が知られている。これをもとの変数に遡って書くと

$$\widetilde{\phi}_1(\xi,\eta)=\frac{3d}{a}\mathrm{sech}^2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{b}}\left(\xi-(\alpha^{-1}+d)\eta\right)\right\}+\frac{k_BT}{e\alpha} \tag{6.4}$$

$$=\frac{3d}{a}\mathrm{sech}^2\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{d}{b}}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(x-c_0t)-(\alpha^{-1}+d)\varepsilon^{\frac{3}{2}}x\right)\right\}+\frac{k_BT}{e\alpha}, \tag{6.5}$$

を得る。これでスカラーポテンシャル（の最低次) がわかった。これと (5.16) より、速度場と個数密度が求まる。ここで不等式

$$c_0<\frac{c_0}{1-\epsilon d}<\frac{c_0}{1-\epsilon(d+\alpha^{-1})}, \tag{6.6}$$

に注目しよう。左辺は、線形波であるイオン音波の速度であり、中辺は弱非線形効果を取り入れたソリトンの速度である。右辺はさらに振動電場による効果を考慮した時の孤立波の速度になっている。つまり振動電場によって、ソリトンが「高速化」された意味する。さらに (6.5) の右辺第 2 項は、スカラーポテンシャルが「底上げ」されたことを意味する。

7 結論と考察

本研究では、イオン電子系に対して高速振動電場を加えた系を考えた。結果、有効方程式 (4.13)、(4.14)、(4.15) を得た。この解析はダイナミック安定化の理論を波動現象に適用する新しい試みと考えらえる。次に空間次元を 1 として、長波長域での弱非線形近似を行うことによって、K-dV 型の方程式 (5.27) が求まった。さらに高温極限をとることにより、K-dV 方程式 (6.1) を得ることができた。ソリトン解を取り上げることによりスカラーポテンシャルの「底上げ」と、ソリトンの「高速化」を見出すことができた。

最後に本題である「安定化」について述べたい。そもそもダイナミック安定化は有効ポテンシャルによってもたらされる現象である。しかしここでは、安定化の解釈を拡大して、加振動力 (振動電場) によって、新たな有効ポテンシャルが生じること自体を「安定化」とみなすこととしている。一方、分散が強い場合プラズマには不安定性があることが知られている。このような場合の振動電場の効果については将来の課題としたい。

参考文献

[1] P. L. Kapitza, 'Dynamic stability of a pendulum with an oscillating point of suspension,' Journal of Experimental and Theoretical Physics, vol. 21, pp. 588-597, 1951.
[2] H. Saito and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. 90, 040403(2003).
[3] I. Gilary, N. Moiseyev, S. Rahav, and S. Fishman, " Trapping of particles by lasers: the quantum Kapitza pendulum," Journal of Physics A, vol. 36, no. 25, pp. L409-L415, (2003).
[4]Roberta Citro et al. 'Dynamical stability of a many-body Kapitza pendulum', Annals of Physics 360 (2015) 694-710.
[5] 飯塚剛, 「高速加振による波動系の不安定化とキンクの生成」, 数理解析研究所講究録 2128, p83 (2019).
[6] 渡辺慎介「ソリトン物理入門」培風館, p115 (1985).